Тема 1.

Вектори. Линейни операции със свободни вектори. Линейни пространства и подпространства. Геометрично векторно пространство

1. Свободен вектор

Определение 1.1. Наредена двойка точки (A, B) се означава с $\overrightarrow{AB}$ и се нарича *насочена отсечка*. Точка A се нарича *начало*, а точка B – *край* на $\overrightarrow{AB}$.

Ако началото и краят съвпадат (т. е. $A \equiv B$), то насочената отсечка $\overrightarrow{AA}$ се нарича *нулева* (в този случай насочената отсечка съвпада с точката A).

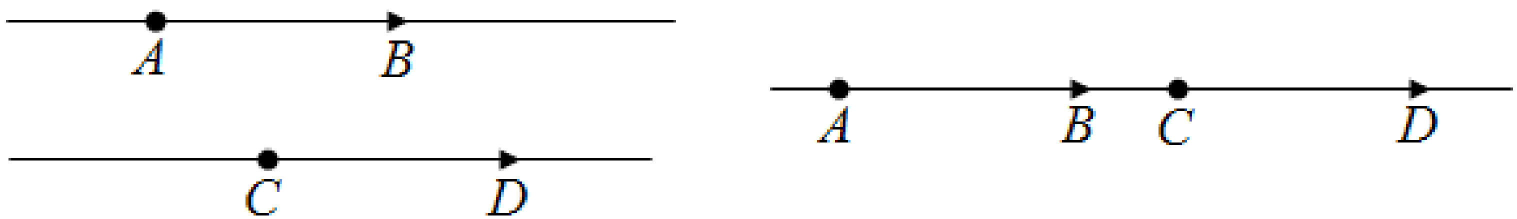
На фиг. 1.1 са изобразени насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Фиг. 1.1

Под **дължина на насочената отсечка** $\overrightarrow{AB}$ ще разбираме дължината на отсечката AB и ще означаваме дължина с двете вертикални черти за модул на число (или с двойни вертикални черти, за да разграничим от знака за модул, ако желаем):

$$|\overrightarrow{AB}| = AB \qquad \text{или} \qquad ||\overrightarrow{AB}|| = AB.$$

Определение 1.2. Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат *колинеарни*, ако правите AB и CD са успоредни или съвпадат. Записваме $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

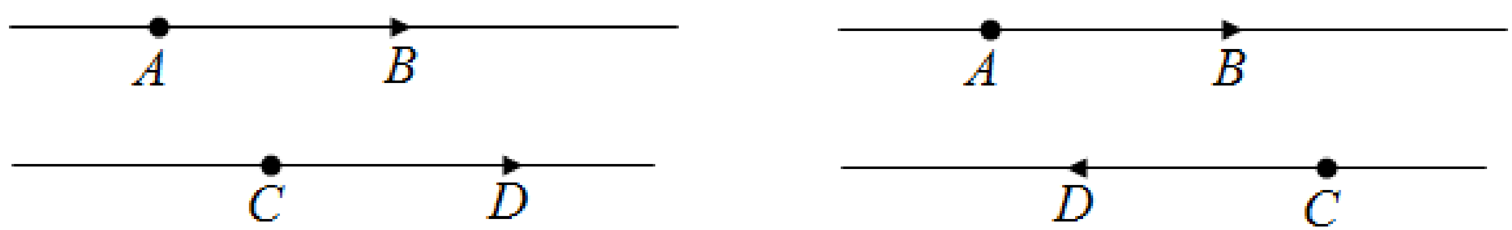


Фиг. 1.2

За точките A, B, C и D също се казва, че са колинеарни, ако лежат върху една права.

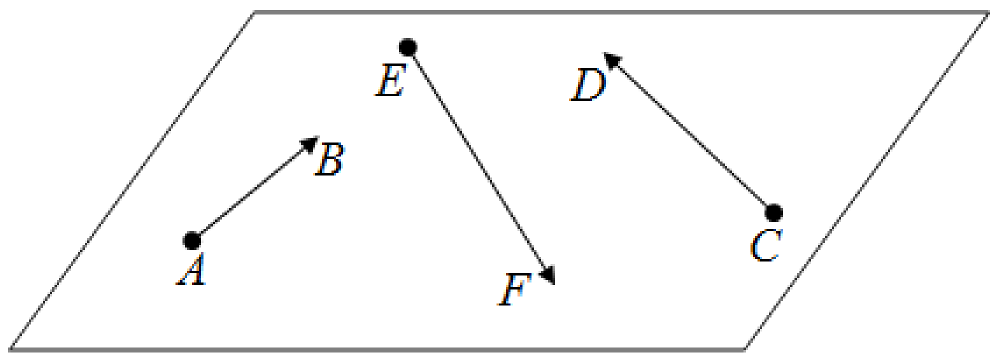
Ако лъчите $AB^{\rightarrow}$ и $CD^{\rightarrow}$ са еднопосочно успоредни, то насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат *еднопосочно колинеарни* и записваме $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.
Ако лъчите $AB^{\rightarrow}$ и $CD^{\rightarrow}$ са разнопосочно успоредни, то насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат *разнопосочно колинеарни* и записваме $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

На фиг. 1.3. са изобразени еднопосочно колинеарните насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (в ляво) и разнопосочно колинеарните насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (в дясно).



Фиг. 1.3

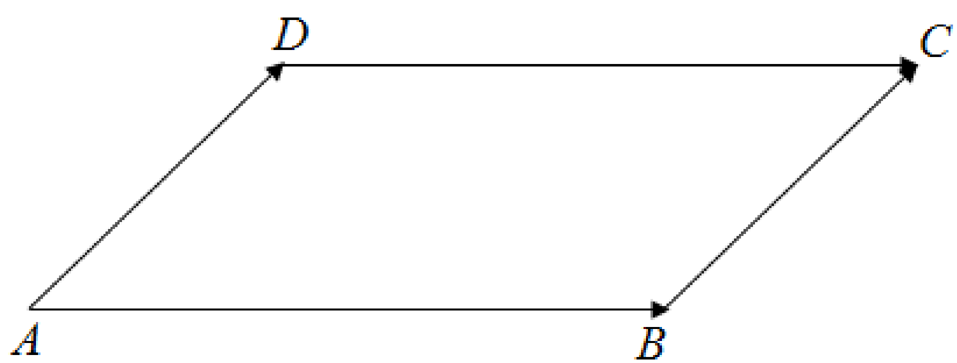
Определение 1.3. Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ се наричат *компланарни*, ако правите AB, CD и EF лежат в една равнина или са успоредни на една равнина. Точките A, B, C, D, E и F, лежащи в една равнина, също се наричат компланарни.



Фиг. 1.4

Определение 1.4. Ненулевите насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат *равни*, ако:
1) отсечките AB и CD имат равни дължини;
2) насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са еднопосочно колинеарни, т. е. $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Следствие. Фигурата $ABCD$ е успоредник, точно когато $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ или $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (като при това четирите точки не са колинеарни).



Фиг. 1.5

Пример.

Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ в успоредника $ABCD$ са еднопосочно колинеарни (нещо повече, те са равни $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$).

Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ в успоредника $ABCD$ са разнопосочно колинеарни (както ще видим в следващите слайдове, те са и нещо повече – противоположни, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$).

Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$ в успоредника $ABCD$ са компланарни.

Равенството на насочени отсечки е *релация на еквивалентност* и като такава притежава свойствата:
1) *рефлексивност*: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$;
2) *симетричност*: ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$;
3) *транзитивност*: ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$
за произволни насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$.

Отбелязваме, че всяка релация, притежаваща свойствата 1), 2) и 3) е релация на еквивалентност.

Нека V е множеството на всички насочени отсечки. Релацията на еквивалентност "равенство на насочени отсечки" разбива V на непресичащи се *класове на еквивалентност*. Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са множествата от всички насочени отсечки, съответно равни на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ или нямат нито един общ елемент, или съвпадат. Втората възможност е налице, точно когато $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Така достигаме до следващото важно определение

Определение 1.5. Всеки клас $\vec{a}$ от равни насочени отсечки се нарича ***свободен вектор***. Всеки елемент на $\vec{a}$ се нарича представител на $\vec{a}$. Ако $\overrightarrow{AB}$ е представител на $\vec{a}$, то вместо $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ записваме $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Ако A е произволна точка, а $\vec{a}$ е произволен свободен вектор, то съществува единствена точка B такава, че $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Построяването на представителя $\overrightarrow{AB}$ се нарича *пренасяне* на $\vec{a}$ в т. A.

Нулев свободен вектор се нарича множеството от всички нулеви насочени отсечки и означаваме с $\vec{o}$.

Под дължина на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ разбираме дължината на отсечката AB. Под дължина на свободния вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ разбираме дължината на произволен негов представител, т. е. дължината на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ и означаваме с $|\vec{a}|$.

Очевидно дължината на нулевия вектор е числото нула, т.е. $|\vec{o}| = 0$.

Ако $\vec{a}$ е свободен вектор с представител насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, то свободният вектор с представител $\overrightarrow{BA}$ се означава с $(-\vec{a})$ и се нарича ***противоположен свободен вектор*** на $\vec{a}$.

Тъй като

$$-(-\vec{a}) = \vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad (-\vec{a}) = \overrightarrow{BA} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

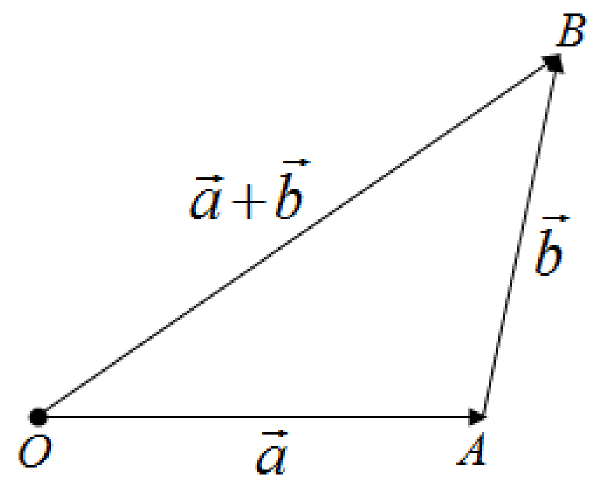
Свободните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се наричат колинеарни, ако съответните им представители са колинеарни. Нулевият вектор е колинеарен на всеки друг свободен вектор.

Свободните вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се наричат компланарни, ако съответните им представители са компланарни.

2. Линейни действия със свободни вектори

Събиране на свободни вектори

Определение 1.6. (правило на триъгълника) Събиране на два свободни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е действие, което им съпоставя свободния вектор $\vec{a}+\vec{b}$, наречен тяхна сума, определен по следния начин: ако O е произволна точка и $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, то $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$.

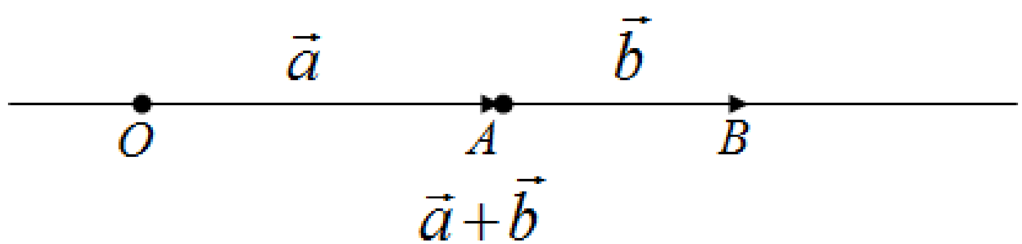


Фиг. 1.6

Релация на Шал за насочени отсечки: За произволни три точки A, B и C е изпълнено равенството

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Ако $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} + \vec{b} \parallel \vec{a} \parallel \vec{b}$.



Фиг. 1.7

Събирането на един свободен вектор $\vec{a}$ с противоположния свободен вектор на друг $(-\vec{b})$ се нарича ***разлика на свободни вектори*** и се записва:

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

Тъй като $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, то тържеството на Шал (правилото на триъгълника) може да се запише и като разлика на насочени отсечки

$$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}.$$

Умножение на свободен вектор с число

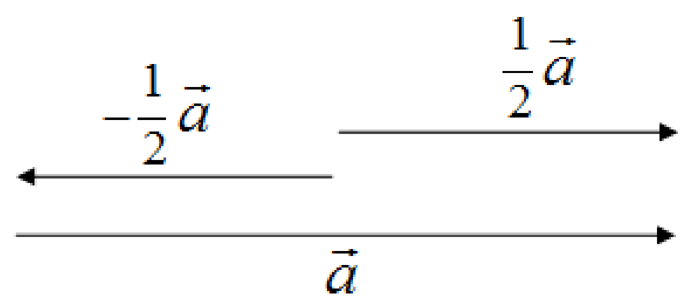
Определение 1.7. Умножение на реално число λ със свободен вектор $\vec{a}$ е действие, което им съпоставя свободен вектор $\lambda\vec{a}$, наречен тяхно произведение, определен по следния начин:

ако $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{o}$, то $\lambda\vec{a} = \vec{o}$;

в противен случай:

1) $\lambda\vec{a}$ е с дължина $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|$;

2) ако $\lambda > 0$, то $\lambda\vec{a}$ е еднопосочно колинеарен с $\vec{a}$ и ако ако $\lambda < 0$, то $\lambda\vec{a}$ е разнопосочно колинеарен с $\vec{a}$.

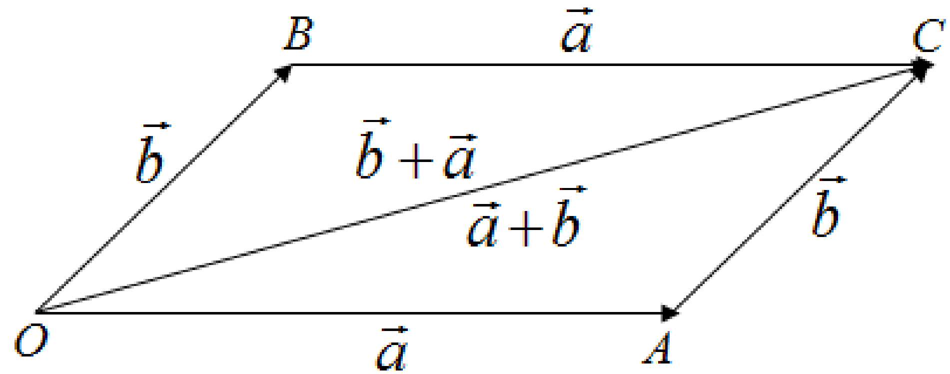


Фиг. 1.8

Теорема 1.1. *Линейните действия със свободни вектори притежават следните свойства:*
1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ *(комутативност при събиране);*
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ *(асоциативност при събиране);*
3. *съществува свободен вектор* $\vec{o}$ *такъв, че* $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ *за всеки свободен вектор* $\vec{a}$;
4. *за всеки свободен вектор* $\vec{a}$ *съществува свободен вектор* $(-\vec{a})$ *такъв, че* $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$;
5. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ *(дистрибутивност относно числов множител);*
6. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ *(дистрибутивност относно векторен множител);*
7. $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$ *(асоциативност при умножение с число);*
8. $1\vec{a}=\vec{a}$,
където $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *са произволни свободни вектори, а* λ,μ *– произволни реални числа.*

Доказателство.

1. Избираме представители на свободните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нека това бъдат съответно насочените отсечки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (фиг. 1.9).



Фиг. 1.9 **Правило на успоредника за събиране на свободни вектори**

Допълваме $\measuredangle AOB$ до успоредника $OACB$. Тогава, съгласно правилото на триъгълника за събиране на насочени отсечки имаме

от $\triangle OAC$: $\quad \vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$;

от $\triangle OBC$: $\quad \vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$.

Следователно $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, т.е. събирането на свободни вектори е комутативно.

От горното доказателство следва *правилото на успоредника за събиране на насочени отсечки* (свободни вектори) (фиг. 1.9)

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.$$

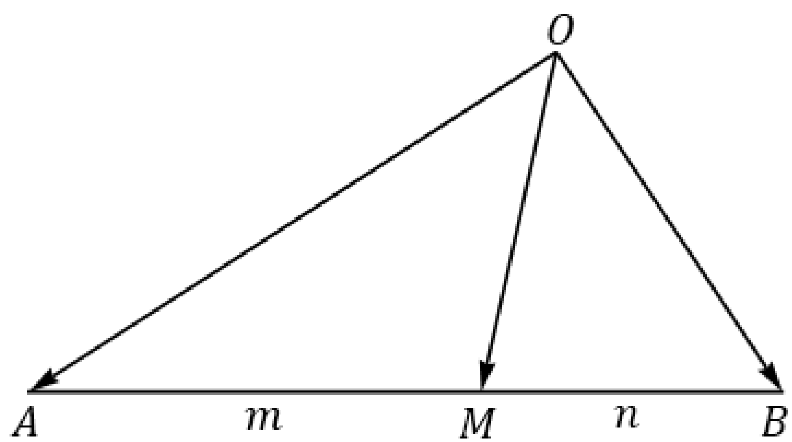
Правилото на триъгълника и правилото на успоредника за събиране на вектори са еквивалентни. Те представляват две различни геометрични конструкции за едно и също правило – правилото за събиране на свободни вектори.

Нека точката M лежи на отсечката AB, като я дели вътрешно в отношение $AM : MB = m : n$. Докажете, че

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n},$$

където точката O е произволна. Като следствие, докажете, че M е среда на отсечката AB, точно когато

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$



Съгласно тъждеството на Шал за точките O, M и A е изпълнено

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}.$$

От условието на задачата е известно, че $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$. Тогава

$$AM = \frac{m}{m+n} AB.$$

Последното равенство е в сила и за насочените отсечки $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$, тъй като те са еднопосочно колинеарни, т.е.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB}.$$

За насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ имаме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Като комбинираме последните две равенства, достигаме до

$$\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}).$$

Сега заместваме получения израз за $\overrightarrow{AM}$ от горното равенство в $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ и намираме

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}.\end{aligned}$$

Точката M е среда на отсечката AB, точно когато я дели на две равни части, т.е. при $m = n$. Заместваме последното условие в доказаната формула и достигаме до

$$\overrightarrow{OM} = \frac{m\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)}{2m} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

3. Линейно (векторно) пространство

Определение 1.8. Непразно множество V се нарича ***линейно (векторно) пространство над числовото поле*** $\mathbb{K}$, ако е снабдено с две действия - *събиране*, което на всеки два елемента $a, b \in V$ съпоставя елемент $a + b \in V$, наречен сума на a и b и *умножение с число*, което на всеки елемент $a \in V$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ съпоставя елемента $\lambda a \in V$, наречен произведение на λ и a, при което за произволни $a, b, c \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ са изпълнени следните свойства (аксиоми):

1. $a + b = b + a$ *(комутативност при събиране)*;

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(асоциативност при събиране)*;

3. *съществува елемент* o *такъв, че* $a + o = a$ *за всеки елемент* a; *елементът* o *се нарича нулев елемент*;

4. *за всеки елемент* a *съществува елемент* $(-a)$ *такъв, че* $a + (-a) = o$; *елементът* $(-a)$ *се нарича противоположен елемент на* a;

5. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ *(дистрибутивност относно множител от* $\mathbb{K}$*)*;

6. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ *(дистрибутивност относно множител от* V*)*;

7. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ *(асоциативност при умножение с множител от* $\mathbb{K}$*)*;

8. $1a = a$.

Елементите на V се наричат *вектори*. Действията събиране на вектори и умножение на число с вектор се наричат *линейни действия (операции)*.

Забележка. Ще разглеждаме предимно случая, когато $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Тогава V се нарича *реално векторно пространство*.

Ако $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – полето на комплексните числа, то V се нарича *комплексно векторно пространство*.

Някои следствия от аксиомите 1–8.

Следствие 1.1. *Нулевият елемент на всяко векторно пространство е единствен.*

Следствие 1.2. *Противоположният елемент на всеки елемент на векторно пространство е единствен.*

Следствие 1.3. $0a = o$ *за всяко* $a \in V$.

Следствие 1.4. $(-1)a = -a$ *за всяко* $a \in V$.

Следствие 1.5. *Ако* $\lambda a = o$, *то или* $\lambda = 0$, *или* $a = o$.

Следствие 1.6. *Ако* a *и* b *са произволни вектори от* V, *то уравнението* $a + x = b$ *има единствено решение* $x \in V$, *което се определя от* $x = b + (-a)$ *и се нарича разлика на векторите* a *и* b *(означаваме с* $b - a$*).*

Определение 1.9. Непразното подмножество W на векторното пространство V ($\emptyset \neq W \subseteq V$) се нарича *векторно подпространство* на V, ако W е векторно пространство относно линейните действия, дефинирани над елементите на V. В такъв случай записваме $W \leq V$.

Определение 1.10. Нека V е векторно пространство над полето $\mathbb{K}$, а $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е произволна система (съвкупност) от вектори на V. Вектор от вида

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k$$

се нарича *линейна комбинация* на векторите $a_1, a_2, ..., a_k$, а числата $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ се наричат *коефициенти* на тази линейна комбинация.

Твърдение 1.1. *Непразното подмножество W на векторното пространство V е векторно подпространство на V, точно когато е изпълнено едно от следните еквивалентни условия:*

1) *W е затворено относно линейните действия над елементите на V, т. е. за произволни $a, b \in W$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ имаме: $a + b \in W$* и *$\lambda a \in W$;*

2) *W е затворено относно взимането на линейни комбинации на елементи на W, т. е. за всеки $a, b \in W$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ имаме $\lambda a + \mu b \in W$.*

Множеството $\{o\}$ е векторно пространство и се нарича *нулево векторно пространство.*

Очевидно за всяко векторно пространство V е изпълнено $V \leq V$, $\{o\} \leq V$. Тези векторни подпространства се наричат *тривиални* векторни подпространства на V.

Примери за векторни пространства и подпространства

Пример 1.1. Множеството от свободните вектори е векторно пространство над $\mathbb{R}$ относно операциите събиране на свободни вектори и умножение на свободен вектор с число. Това пространство се нарича ***геометрично векторно пространство***.

Векторите, колинеарни с дадена права, образуват векторно подпространство на геометричното векторно пространство.

Същото важи и за векторите, компланарни с дадена равнина.

Пример 1.2. Множеството на наредените двойки реални числа $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$, е векторно пространство над $\mathbb{R}$ относно операциите събиране и умножение с реално число, дефинирани съответно чрез:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

за произволни $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Нулевият елемент на $\mathbb{R}^2$ е наредената двойка $(0, 0)$.

Тогава противоположният елемент на $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ е $(-x, -y)$.

Геометричната интерпретация на $\mathbb{R}^2$ е множеството от всички точки (x, y) в равнината.

Обобщение на идеята от предходния слайд е следното векторно пространство.

Множеството $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$, на *наредените n-торки от реални числа* е векторно пространство над $\mathbb{R}$ относно операциите събиране и умножение с реално число, дефинирани съответно чрез:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

за произволни $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Нулевият елемент на $\mathbb{R}^n$ е наредената n-торка $(0, 0, ..., 0)$.

Тогава противоположният елемент на $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ е $(-x_1, -x_2, ..., -x_n)$.

В частност, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ е векторното пространство на наредените тройки реални числа. Геометричната му интерпретация е множеството от всички точки в тримерното пространство.

Пример 1.3. Множеството $\mathrm{C}[a, b]$ от всички реални непрекъснати функции в интервала $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ е реално векторно пространство относно следните операции:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

където $f(x), g(x) \in \mathrm{C}[a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Нулевият елемент на $\mathrm{C}[a, b]$ е нулевата функция, т. е. числото 0. Противоположният елемент на $f(x) \in \mathrm{C}[a, b]$ е $-f(x)$.

Пример 1.4. Множеството $\mathbb{R}_n[x]$ на полиномите на x с реални коефициенти от степен $\leq n$, $n \in \mathbb{N}$, е векторно пространство над $\mathbb{R}$ относно операциите събиране на полиноми и умножение на полином с реално число. Ако $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ и $g(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + b_0$ са елементи на $\mathbb{R}_n[x]$, а $\lambda \in \mathbb{R}$, то:

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + ... + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$
$$\lambda f(x) = \lambda(a_n x^n + ... + a_1 x + a_0) = \lambda a_n x^n + ... + \lambda a_1 x + \lambda a_0.$$

$\mathbb{R}_n[x]$ е векторно подпространство на пространството $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ на всички непрекъснати функции, дефинирани над $\mathbb{R}$.

В следващата тема ще разгледаме още един пример на реално векторно пространство, което играе важна роля в математиката – векторното пространство на матриците.

Комплексни числа

Уравнението $x^2 + 1 = 0$ няма реални корени. Решавайки го като квадратно уравнение, получаваме, че неговите два корена са комплексните (чисто имагинерните) числа $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$.

Числото $i = \sqrt{-1}$ (т.е. $i^2 = -1$) се нарича ***имагинерна единица***.

Числото $z = x + iy$, където $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, се нарича ***комплексно число (в алгебричен вид).***

Числата $x = \mathrm{Re}(z)$ и $y = \mathrm{Im}(z)$ се наричат съответно ***реална част*** на z и ***имагинерна част*** на z.

Множеството $\mathbb{C} = \{x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ се нарича множество (поле) на комплексните числа.

Множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа е подмножество на $\mathbb{C}$.

Комплексните числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ се наричат равни, ако $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексни числа – комплексни корени на уравнения

Намерете корените на квадратното уравнение $x^2 + 6x + 25 = 0$.

Дискриминантата на уравнението е $D = 3^2 - 25 = -16 < 0$. Следователно уравнението няма реални корени, то има комплексни корени. Намираме

$$\sqrt{D} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4\sqrt{-1} = 4i$$

Тогава двата комплексни корена са:

$$x_{1,2} = -3 \pm 4i.$$

Забележете, че $x_1 + x_2 = -3 + 4i - 3 - 4i = -6 \in \mathbb{R}$. Произведението им също е реално число (формули на Виет).

Събиране на комплексни числа

Ако $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ са две комплексни числа, то комплексното число

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i$$

се нарича **сума** на z_1 и z_2.

Аналогично, числото $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i$ се нарича **разлика** на z_1 и z_2.

Умножаване на комплексни числа

Комплексното число

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$$

се нарича **произведение** на z_1 и z_2.

Нека $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 + 4i$. Намерете:

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i;$$

$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (3 + 4i) = (1 - 3) + (2 - 4)i = -2 - 2i;$$

$$z_1 z_2 = (1+2i)(3+4i) = 3+4i+6i+8i^2 = (3-8)+(4+6)i = -5+10i.$$

Нека $z = x + iy$ е произволно комплексно число. Тогава комплексното число $\overline{z} = x - iy$ се нарича **комплексно спрегнато** на z (казва се, че z и $\overline{z}$ са комплексно спрегнати).

Комплексно спрегнати са двата корена $x_1 = -3 + 4i$ и $x_2 = -3 - 4i$ на квадратното уравнение, което решихме в един от предишните слайдове.

В сила са свойствата:
1) $\overline{\overline{z}} = z$;

2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;

3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$;

4) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$;

5) $z - \overline{z} = -2\mathrm{Im}(z)$;

6) $z = \overline{z}$, точно когато z е реално число.

Нека $z = x + iy$ е произволно комплексно число. Тогава неотрицателното реално число

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

се нарича **модул** (абсолютна стойност) на z. Очевидно $|z| = |\overline{z}|$.

Намерете модула на $z = 3 + 4i$.

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Нека $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ $(z_2 \neq 0)$ са две комплексни числа. Тогава комплексното число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

се нарича **частно** на z_1 и z_2.

Намерете частното $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 3 + 4i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3 - 4i + 6i - 8i^2}{9+16} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i.$$

Литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald, *Linear algebra and its applications*, 5th ed. Pearson, 2016.

3. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 4th ed., Nelson Engineerin
2007, ISBN-13: 978-813-150-172-6.

4. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Angebra (applications version)*, 11th ed., Wiley, 2014, ISBN 978-1-118-43441-3.

5. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed., Springer, 2015.

6. K. Singh, *Linear Algebra Step by Step*, Oxford University Press, 2014.

7. C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

8. S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 9th ed., Pearson, 2015.