6. Системи линейни уравнения

Математиката е вратата и ключът към всички науки.

Роджър Бейкън

6.1. Системи нехомогенни уравнения.

Определение 6.1. Съвкупността от m уравнения

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right. \tag{6.1}$$

с n неизвестни $x_1, x_2, \dots, x_n$, *коефициенти* a_{ij} и *свободни членове* b_i $(i \in I_m, j \in I_n)$ се нарича *система линейни уравнения.*

Определение 6.2. Всяка наредена n-торка $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, удовлетворяваща всички уравнения от системата (6.1), се нарича *решение* на системата.

Определение 6.3. Системата (6.1) се нарича:

I) *Съвместима*, ако има поне едно решение. По-точно:
  1) *определена*, ако има единствено решение;
  2) *неопределена*, ако има безброй много решения.

II) *Несъвместима*, ако няма решение.

Определение 6.4. Матриците $A = (a_{ij})$ и $A|B = (a_{ij}|b_i)$ се наричат съответно *основна* и *разширена матрица* на системата (6.1).

Теорема 6.1 (Теорема на Руше[1]). *Системата линейни уравнения* (6.1) *е съвместима тогава и само тогава, когато рангът на основната е равен на ранга на разширената ѝ матрица, т.е.* $\mathsf{rang}A = \mathsf{rang}(A|B)$.

Теорема 6.2. *Системата линейни уравнения* (6.1) *е определена тогава и само тогава, когато рангът на основната ѝ матрица е равен на броя на неизвестните, т.е.* $\mathsf{rang}A = n$.

Следствие 6.1. *Системата линейни уравнения* (6.1) *е неопределена тогава и само тогава, когато* $\mathsf{rang}A = \mathsf{rang}(A|B) < n$.

[1]Йожен Руше (1832–1910) – френски математик.

Следствие 6.2. *Една система от n линейни уравнения с n неизвестни е определена тогава и само тогава, когато детерминантата на основната ѝ матрица е различна от нула.*

Теорема 6.3 (Формули на Крамер[1]). *Нека в системата линейни уравнения* (6.1) $m = n$ *и* $\det A \neq 0$. *Тогава единственото решение на системата* (6.1) *се получава чрез формулите:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{6.2}$$

където $\Delta = \det A$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \cdots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Забележка 6.1. Нека е дадена система от n линейни уравнения с n неизвестни, за която детерминанта на основната матрица $\Delta = 0$. Тогава системата е:

1) неопределена, точно когато $\Delta_i = 0$ за всяко $i \in I_n$;
2) несъвместима, точно когато $\Delta_i \neq 0$ за някое $i \in I_n$.

Задача 6.1. *Да се изследват и решат системите:*

$$а)\ \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -2 \end{array} \right. ; \qquad б)\ \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 27 \end{array} \right. ;$$

$$в)\ \left| \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 21 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 29 \end{array} \right. ; \qquad г)\ \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -6 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{array} \right. ;$$

$$д)\ \left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{array} \right. ; \qquad е)\ \left| \begin{array}{l} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -13 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{array} \right. ;$$

$$ж)\ \left| \begin{array}{l} 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 18 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{array} \right. ; \quad з)\ \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 14 \\ 4x_2 + 7x_4 = 15 \end{array} \right. ;$$

[1]Габриел Крамер (1704–1752) – швейцарски математик и физик.

$$и)\left|\begin{array}{l} x_1-4x_2+2x_3=-3\\ 7x_1-15x_2+11x_3-4x_4=4\\ 3x_1+x_2-x_3+x_4=-6\\ 3x_1+x_2-2x_3-5x_4=3\end{array}\right. ;\quad к)\left|\begin{array}{l} 5x_1-x_2+2x_3+x_4=7\\ 2x_1+x_2+4x_3-x_4=1\\ x_1-3x_2-6x_3+3x_4=0\end{array}\right. ;$$

$$л)\left|\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5\end{array}\right. ;\quad м)\left|\begin{array}{l} 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=5\\ 6x_1-3x_2+14x_3-7x_4=18\\ 4x_1-2x_2+x_3-3x_4=7\\ 10x_1-5x_2+5x_3-8x_4=19\end{array}\right. ;$$

$$н)\left|\begin{array}{l} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2\\ 9x_1-6x_2+9x_3+7x_4=5\\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4=-1\end{array}\right. ;$$

$$о)\left|\begin{array}{l} x_1+3x_2-2x_3+6x_4-x_5=9\\ 2x_1+5x_2-4x_3+9x_4=16\\ 2x_1-x_2+4x_3-x_4-12x_5=-4\\ 3x_1+2x_2-5x_3-2x_4+8x_5=12\\ 5x_1+4x_2-3x_3+4x_4-4x_5=16\end{array}\right. .$$

Решение. а) Ще решим задачата по четири начина.

Начин 1 (Метод на Гаус). Нека A и $A|B$ са съответно основната и разширената матрици на системата а). Като се имат предвид Определение 5.8 и Забележка 5.4, установяваме че $\mathsf{rang}A=\mathsf{rang}(A|B)=3$, колкото е броят на неизвестните в системата. Тогава от Теорема 6.1 следва, че системата е съвместима, а от Теорема 6.2 следва, че системата е определена.

За да намерим решението на системата, ще преобразуваме разширената ѝ матрица до трапецовидна форма:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 5 & 7\\ 2 & 7 & 4 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 0 & -6\end{array}\right).$$

Последната матрица е разширената матрица на системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1+2x_2+2x_3=2\\ -x_2+x_3=3\\ 3x_2=-6.\end{array}\right.$$

Чрез заместване от третото към първото уравнение получаваме $x_2=-2$, $x_3=1$ и $x_1=4$, т.е. единствено решение на системата е наредената тройка $(4,-2,1)$.

Начин 2 (Метод на Гаус-Жордан). Продължаваме да преобразуваме матрицата от предходния метод, докато превърнем основната матрица A в единична матрица E:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot(1/3) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Най-десният стълб в последната матрица е решението на системата, т.е. $x_1 = 4$, $x_2 = -2$ и $x_3 = 1$.

Начин 3 (Метод на Крамер). Тъй като детерминантата на основната матрица

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

то от Следствие 6.2 заключаваме, че системата е определена.

За да решим системата, ще използваме Теорема 6.3. За целта пресмятаме детерминантите

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -12, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -3.$$

Така от формулите на Крамер (Теорема 6.3) получаваме

$$x_1 = \frac{-12}{-3} = 4, \quad x_2 = \frac{6}{-3} = -2, \quad x_3 = \frac{-3}{-3} = 1,$$

т.е. решението на системата е наредената тройка $(4, -2, 1)$.

Начин 4 (чрез матрично уравнение). Системата а) е еквивалентна на матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

чието единствено решение е $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (вж. Задача 4.3).

ж) Тази задача ще решим по метода на Гаус. Записваме разширената матрица на системата, като разменяме местата на първия и четвъртия ред, след което привеждаме към трапецовидна форма:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 6 & 15 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 6 & 18 \\ 3 & -3 & -1 & -4 & 26 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 13 & -11 \\ 0 & -7 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -9 & -4 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & 25/3 & 100/3 & -50/3 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot 3/25 \\ \mid \cdot 1/8 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оттук се вижда, че рангът на основната и разширената матрица е равен на 3, което е по-малко от броя на неизвестните ($n = 4$). Тогава от Теорема 6.1 следва, че системата е съвместима, а от Следствие 6.1 следва, че системата е неопределена. Решенията на системата зависят от $4 - 3 = 1$ на брой реални параметъра (свободни неизвестни). От друга страна, последната матрица, получена по метода на Гаус, е разширената матрица на системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_2 + 4x_3 + 13x_4 = -11 \\ x_3 + 4x_4 = -2 \end{array} \right. .$$

Като положим x_4 за параметър, т.е. $x_4 = p$, за общо решение на системата получаваме $(p + 7, p - 1, -4p - 2, p)$, където $p \in \mathbb{R}$.

к) По метода на Гаус последователно получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -6 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -7 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -14 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

От последната матрица се вижда, че $\mathsf{rang} A = 2$, а $\mathsf{rang}(A|B) = 3$, което съгласно Теорема 6.1 означава, че системата е несъвместима, т.е. няма решение.

Отговори. б) определена, $(6, -11, 6)$; в) определена, $(2, 3, 5)$; г) определена, $(1, 1, -1)$; д) определена, $(1, 2, -1)$; е) несъвместима; з) определена, $(2, 2, 0, 1)$; и) определена, $(-1, 2, 3, -2)$;
л) определена, $(-2, 2, -3, 3)$; м) неопределена, $(p, 2p-7q+1, q, 5q-3)$, $p, q \in \mathbb{R}$; н) неопределена, $\left(\dfrac{1+2p}{3}, p, 1, -1\right)$, $p \in \mathbb{R}$; о) неопределена, $(p+q+1, 2q-3p+2, 3q-p-1, p, q)$, $\quad p, q \in \mathbb{R}$.

Задача 6.2. *Намерете стойностите на реалните числа a и b така, че системата линейни уравнения*

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{array}\right.$$

да бъде: а) определена; б) неопределена; в) несъвместима.

Решение. Ще решим задачата по два начина.

Начин 1 (с формули на Крамер). Тъй като основната матрица на дадената система е квадратна, можем да използваме Следствие 6.2 и Забележка 6.1.

а) Пресмятаме детерминантата на основната матрица на системата и получаваме $\Delta = a - 2$. Съгласно Следствие 6.2, системата е определена, точно когато $\Delta \neq 0$, т.е. $a \neq 2$ $(b \in \mathbb{R})$.

б) Пресмятаме детерминантите

$$\Delta_1 = 3a - 2b + 4, \quad \Delta_2 = b - a - 3 \quad \text{и} \quad \Delta_3 = b - 5.$$

Съгласно Забележка 6.1, системата е неопределена, точно когато $\Delta = \Delta_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, т.е. за $a = 2$ и $b = 5$.

в) Отново от Забележка 6.1 заключаваме, че системата е несъвместима, точно когато $\Delta = 0$ и $\Delta_i \neq 0$ за някое $i = 1, 2, 3$, т.е. $a = 2$ и $b \neq 5$.

Начин 2 (по метод на Гаус). Намираме трапецовидната форма на разширената матрица на системата:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a-3 & b-6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & b-5 \end{array}\right).$$

Тогава:

а) Съгласно Теорема 6.2, системата е определена, точно когато $\mathsf{rang} A = 3$, т.е. $a \neq 2$ $(b \in \mathbb{R})$.

б) Съгласно Теорема 6.1 и Следствие 6.1, системата е неопределена, точно когато $\mathsf{rang} A = \mathsf{rang}(A|B) = 2$, т.е. $a = 2$ и $b = 5$.

в) Съгласно Теорема 6.1, системата е несъвместима, точно когато $\mathsf{rang} A = 2$ и $\mathsf{rang}(A|B) = 3$, т.е. $a = 2$, $b \neq 5$.

Решаване на матрични уравнения чрез системи линейни уравнения:

Задача 6.3. *Намерете неизвестната матрица X от матричното уравнение:*

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}.$

б) $X \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

в) $X \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}.$

Решение. а) Нека въведем означенията:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&-5\\6&-10\end{pmatrix}.$$

Тогава даденото уравнение може да се запише във вида

$$AX=B. \tag{6.3}$$

Тъй като $\det A=0$, което означава, че не съществува обратна матрица A^{-1}, то не можем да използваме подхода от Задача 4.3. Вместо това ще сведем даденото матрично уравнение до система линейни уравнения за елементите на неизвестната матрица X. Тъй като A и B са квадратни матрици от втори ред и е изпълнено (6.3), то X също трябва да бъде квадратна матрица от втори ред. Следователно X има вида

$$X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}.$$

Тогава, извършвайки матричното умножение в лявата страна на (6.3) и приравнявайки съответните елементи на матриците AX и B, достигаме до следната система линейни уравнения:

$$\left|\begin{array}{l}x_1+2x_3=3\\2x_1+4x_3=6\\x_2+2x_4=-5\\2x_2+4x_4=-10.\end{array}\right.$$

Тъй като първото уравнение е еквивалентно на второто, а третото е еквивалентно на четвъртото, то системата е еквивалентна на

$$\left|\begin{array}{l}x_1+2x_3=3\\x_2+2x_4=-5.\end{array}\right. \tag{6.4}$$

Очевидно системата (6.4) е неопределена и нейното общо решение зависи от 2 реални параметъра. Полагаме $x_3=p$ и $x_4=q$, където $p,q\in\mathbb{R}$. Тогава за останалите неизвестни получаваме $x_1=3-2p$ и $x_2=-5-2q$. Следователно матриците X, които са решения на даденото матрично уравнение, имат вида

$$X=\begin{pmatrix}3-2p&-5-2q\\p&q\end{pmatrix},\qquad p,q\in\mathbb{R}.$$

б) Даденото уравнение записваме във вида $XA=B$, където

$$A=\begin{pmatrix}2&-3\\4&-6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&1\\3&-1\end{pmatrix}.$$

Отново установяваме, че $\det A = 0$. Постъпвайки аналогично на подточка а), достигаме до следната система линейни уравнения за неизвестните елементи на матрицата X:

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ -3x_1 - 6x_2 = 1 \\ 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ -3x_3 - 6x_4 = -1. \end{array} \right.$$

Можем да разгледаме първите две уравнения като система относно неизвестните x_1 и x_2 и последните две като система за x_3 и x_4. И за двете системи установяваме, че са несъвместими. Следователно не съществува матрица X, която да удовлетворява даденото матрично уравнение.

Отговори. в) $X = \begin{pmatrix} 2-2p & p \\ 4-2q & q \end{pmatrix}$, $p, q \in \mathbb{R}$.

6.2. **Системи хомогенни уравнения.**

Определение 6.5. Система от вида

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \tag{6.5}$$

се нарича *система хомогенни линейни уравнения.*

Забележка 6.2. Системата (6.5) е винаги съвместима, тъй като има поне едно решение: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (нулево решение). Следователно системата (6.5) е определена, точно когато има само нулевото (тривиално) решение и е неопределена, точно когато има и ненулеви (нетривиални) решения.

Теорема 6.4. *Множеството от решенията на системата хомогенни линейни уравнения (6.5) е линейно пространство с размерност $n - r$, където n е броят на неизвестните в системата, а r е рангът на основната матрица на системата.*

Определение 6.6. Всяка база на линейното пространство от решенията на неопределена система хомогенни линейни уравнения се нарича нейна *фундаментална* (*базисна*) *система решения.*

Забележка 6.3. Всички решения на неопределена система хомогенни линейни уравнения са линейни комбинации на векторите от произволна нейна фундаментална система решения.

Задача 6.4. *Решете системите хомогенни линейни уравнения и намерете по една тяхна фундаментална система решения:*

$$\text{а)}\left|\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3-3x_4=0\\ x_1-x_2+x_3-x_4+2x_5=0\\ 2x_1+x_2-3x_4-x_5=0\\ 3x_1-2x_2+x_3-2x_4+3x_5=0\end{array}\right. ;\quad \text{б)}\left|\begin{array}{l} x_1+2x_2-x_4=0\\ 2x_1+3x_2-4x_3-5x_4=0\\ 2x_1+4x_2-2x_4=0\end{array}\right. ;$$

$$\text{в)}\left|\begin{array}{l} x_1+3x_2-2x_3+2x_5=0\\ 2x_1+6x_2-5x_3-2x_4+4x_5-3x_6=0\\ 2x_1+6x_2+8x_4+4x_5+18x_6=0\\ 5x_3+10x_4+15x_6=0\end{array}\right. ;$$

$$\text{г)}\left|\begin{array}{l} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0\\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0\\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0\\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5=0.\end{array}\right. .$$

Решение. Тъй като извършването на елементарни преобразувания по редовете няма да измени нулевия стълб от свободни членове, то при решаването на системи хомогенни линейни уравнения по метода на Гаус вместо да работим с разширената матрица на системата, можем да работим само с нейната основна матрица.

а) Преобразуваме основната матрица на системата по метода на Гаус

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & -3 & -1\\ 3 & -2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix} \sim\\
&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -2 & 3 & -1\\ 0 & -5 & -2 & 7 & 3\end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid\cdot -1/2\\ \\ \\ \end{array} \sim\\
&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & 3 & -1\\ 0 & -5 & -2 & 7 & 3\end{pmatrix} \sim\\
&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{6.6}$$

Тъй като $\mathsf{rang} A = 3$, а броят на неизвестните е $n = 5$, то системата е неопределена и има ненулеви решения, зависещи от 2 параметъра. Последната матрица в (6.6) е основна матрица на системата хомогенни линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{array} \right. \tag{6.7}$$

Като положим $x_4 = p$ и $x_5 = q$, от (6.7) получаваме следното общо решение на системата

$$(p, p+q, p-q, p, q) \qquad p, q \in \mathbb{R}. \tag{6.8}$$

За да намерим една фундаментална система решения на дадената система уравнения, трябва да намерим една база на двумерното линейно пространство от наредени петорки от вида (6.8). Това ще направим, като дадем две двойки от независими стойности на двата параметъра p и q. По този начин се получават два вектора (вж. Таблица 1), които са база на линейното пространство от решенията на системата, и съгласно Определение 6.6 образуват една фундаментална система решения на системата уравнения.

Таблица 1. Базисни вектори за пример а)

p	q	v_i
1	0	$v_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$
0	1	$v_2 = (0, 1, -1, 0, 1)$

в) По метода на Гаус достигаме до следната трапецовидна форма на основната матрица на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Тази матрица е основна матрица на системата хомогенни линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 0 \\ x_6 = 0. \end{array} \right. \tag{6.10}$$

Тъй като $\mathsf{rang} A = 3$, а броят на неизвестните е $n = 6$, то общото решение на системата зависи от 3 параметъра. Като положим $x_2 = p$, $x_4 = q$ и $x_5 = s$, получаваме общото решение

$$(-3p - 4q - 2s, p, -2q, q, s, 0), \qquad p, q, s \in \mathbb{R}.$$

Аналогично на подточка а) намираме една фундаментална система решения, както е показано на Таблица 2.

Таблица 2. Базисни вектори за пример в)

p	q	s	v_i
1	0	0	$v_1 = (-3, 1, 0, 0, 0, 0)$
0	1	0	$v_2 = (-4, 0, -2, 1, 0, 0)$
0	0	1	$v_3 = (-2, 0, 0, 0, 1, 0)$

Отговори. б) $(8p+7q, -4p-3q, p, q)$, $p, q \in \mathbb{R}$. Една фундаментална система решения е $v_1 = (8, -4, 1, 0)$ и $v_2 = (7, -3, 0, 1)$;

г) $\left(-\frac{2p+4q+8s}{3}, p, 3+3s, q, s\right)$, $p, q, s \in \mathbb{R}$. Една фундаментална система решения е $v_1 = (-2/3, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (-4/3, 0, 1, 1, 0)$ и $v_3 = (-8/3, 0, 3, 0, 1)$.

Задача 6.5. *Дадена е матрицата* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Да се намерят всички матрици* $B \in M_2(\mathbb{R})$, *за които* $AB = BA$ *(в този случай казваме, че матриците* A *и* B *комутират).*

Решение. Нека $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Тогава

$$AB = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 & 3x_2 + 4x_4 \end{pmatrix} \text{ и } BA = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 & 2x_1 + 4x_2 \\ x_3 + 3x_4 & 2x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

Като приравним съответните елементи на матриците AB и BA, достигаме до системата хомогенни линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \end{array} \right.$$

от която получаваме $x_4 = x_1 + x_3$ и $x_3 = 3/2x_2$. Ако положим $x_1 = p$ и $x_2 = 2q$, то получаваме

$$B = \begin{pmatrix} p & 2q \\ 3q & p + 3q \end{pmatrix} \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

Ще отбележим, че множеството на матриците, които са решение на задачата, е двумерно линейно пространство.