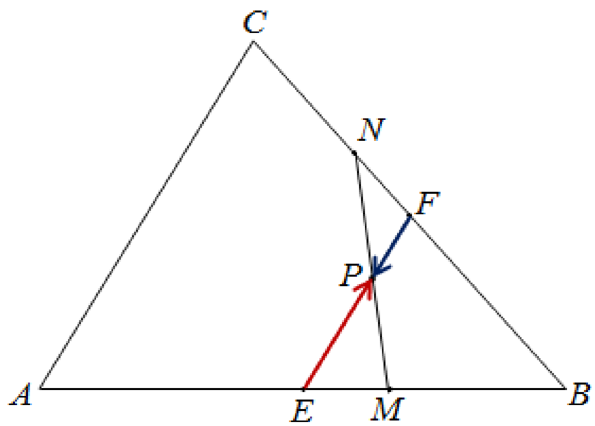
Решения на избрани задачи от Упражнение 1

Свободни вектори и линейни действия с тях. Векторно пространство

Задача 4. Точките M и N лежат съответно върху страните AB и BC на $\triangle\ ABC$, като $AM : MB = BN : NC = 2 : 1$. Точките E и F са среди съответно на AB и BC. Докажете, че точките E, F и средата на MN са колинеарни.

Решение.



Нека P е средата на MN. За да докажем, че трите точки E, F и P са колинеарни (лежат върху една права), ще покажем, че две насочени отсечки, съставени от тези точки, са колинеарни - напр. $\overrightarrow{EP}$ и $\overrightarrow{FP}$.

Съгласно правилото на триъгълника имаме

$$\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MP}. \tag{0.1}$$

Тъй като $AM : MB = 2 : 1$, а E е среда на AB, следва, че $EM = \frac{1}{6}AB$. Насочените отсечки $\overrightarrow{EM}$ и $\overrightarrow{AB}$ са еднопосочно колинеарни, следователно същото равенство е в сила и за тях, т.е. $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$.

Точката P е среда на MN. Тогава $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$. Заместваме двете равенства в (0.1) и получаваме

$$\overrightarrow{EP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}. \tag{0.2}$$

По-нататък можем да представим насочената отсечка $\overrightarrow{MN}$ по следния начин (използвайки правилото на триъгълника)

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM}. \tag{0.3}$$

Тъй като $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, от горното равенство получаваме

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\right). \tag{0.4}$$

Заместваме (0.4) в (0.2) и след преобразуване намираме

$$\overrightarrow{EP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right). \tag{0.5}$$

Аналогично постъпваме и с $\overrightarrow{FP}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FP} &= \overrightarrow{FN} + \overrightarrow{NP} = \tfrac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{NM} = \tfrac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}\right)\\ &= \tfrac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BN}\right) = \tfrac{1}{6}\overrightarrow{BC} - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)\\ &= -\tfrac{1}{6}\overrightarrow{BC} - \tfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} = -\tfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right).\end{aligned} \tag{0.6}$$

От равенствата (0.5) и (0.6) следва, че $\overrightarrow{EP} = -2\overrightarrow{FP}$, което показва, че $\overrightarrow{EP}$ и $\overrightarrow{FP}$ са колинеарни (линейно зависими) и следователно точките E, F и P лежат върху една права (са също колинеарни).

Забележка. Задачата може да бъде решена аналогично с избор на други насочени отсечки, съставени от трите точки E, F и P.

Ето едно значително по-кратко решение.

Тъй като EF се средна явява средна отсечка в $\triangle ABC$, то $EF = \frac{1}{2}AC$ и $EF \parallel AC$. Следователно е изпълнено $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

За вектора $\overrightarrow{EP}$ последователно получаваме

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AE} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned} \tag{0.7}$$

От горното равенство и полученото за вектора $\overrightarrow{EF}$ следва, че $\overrightarrow{EP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$, т.е. векторите $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{EP}$ са колинеарни. Следователно и точките E, F и P са колинеарни.

Задача 6. Установете кое от следните множества е векторно пространство:
б) множеството $N = \{(\lambda - 2\mu)x + \mu x^2 + x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ относно събирането на полиноми и умножението на полином с число в $\mathbb{R}_n[x]$;
в) множеството $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0, x - y = 0\}$ относно обичайните линейни действия, дефинирани в $\mathbb{R}^n$;
г) множеството на матрици от вида $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, относно събирането на матрици и умножението на матрица с число в $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$;
Отговор. Множествата в подточките а), в) и г) са векторни пространства. За подточка в) използвайте, че елементите на множеството F са решенията на системата

$$\left|\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y = 0. \end{array}\right. \tag{0.8}$$

А решенията на (0.8) са $x = t$, $y = t$, $z = 2t$, т. е. наредени тройки от вида $(t, t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогава множеството F може да се зададе и по следния еквивалентен на дадения в задачата запис

$$F = \{(t, t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Като използвате въведените в $\mathbb{R}^n$ правила за събиране на елементи от това векторно пространство и умножението им с реално число, докажете, че F е векторно подпространство на $\mathbb{R}^3$.