9. Метрични действия със свободни вектори

Физиците трябва да осъзнаят, че математиката е доказан път към истината.

Брайън Грийн

9.1. Скаларно произведение на вектори.

Определение 9.1 (Скаларно произведение). *Скаларно произведение* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарича реалното число $\vec{a}\vec{b}$, определено от равенството

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}), \tag{9.1}$$

където $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \in [0,\pi]$ е ъгълът между $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ са съответните им дължини.

Определение 9.2 (Скаларен квадрат). *Скаларен квадрат* $\vec{a}^{\,2}$ на вектора $\vec{a}$ се нарича скаларното произведение на $\vec{a}$ със себе си, т.е.

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2. \tag{9.2}$$

Забележка 9.1. От равенството (9.2) се вижда, че дължината $|\vec{a}|$ на произволен вектор $\vec{a}$ може да бъде намерена чрез

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}. \tag{9.3}$$

Теорема 9.1 (Свойства на скаларното произведение)**.** *Нека $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ са произволни вектори, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава са в сила следните равенства:*

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (комутативност);
2) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (дистрибутивност);
3) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$ (хомогенност);
4) $\vec{a}^{\,2} \geq 0$, като $\vec{a}^{\,2} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$ (неотрицателност).

Определение 9.3. Векторно пространство над $\mathbb{R}$, в което е зададено скаларно произведение, удовлетворяващо свойствата от Теорема 9.1, се нарича *реално евклидово пространство.*

Пример 9.1. Забележителни реални евклидови пространства са *реалната права* $\mathbb{R}$, *реалната равнина* $\mathbb{R}^2$ и *тримерното пространство* $\mathbb{R}^3$.

Забележка 9.2. Геометричното векторно пространство, снабдено със скаларно произведение, е реално евклидово пространство и се нарича *евклидово геометрично пространство.*

Теорема 9.2. *Нека са дадени векторите* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *и* $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *относно ортонормирана координатна система (база). Тогава са в сила равенствата:*

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,\ \vec{a}^{\,2} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,\ |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \quad (9.4)$$

Следствие 9.1. *Ако относно ортонормирана координатна система са дадени точките* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$*, то разстоянието между тях, т.е. дължината на отсечката* M_1M_2*, се пресмята по формулата*

$$d(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (9.5)$$

Теорема 9.3. *Нека са дадени два ненулеви вектора* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *и* $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *относно ортонормирана координатна система и* φ *е ъгълът между тях. Тогава*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (9.6)$$

Забележка 9.3. Ако $\vec{a}\vec{b} > 0$, то ъгълът между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е остър. Ако $\vec{a}\vec{b} < 0$, то ъгълът между векторите е тъп.

Теорема 9.4 (Критерий за ортогоналност)**.** *Два ненулеви вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *са взаимно перпендикулярни, точно когато* $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Теорема 9.5 (Нормиране на вектори)**.** *Нека* $\vec{a} \neq \vec{o}$. *Тогава векторът* $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ *е еднопосочно колинеарен с* $\vec{a}$ *и има дължина единица, т.е.* $|\vec{e}\,| = 1$.

Определение 9.4. Нека $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\vec{b} \neq \vec{o}$. Да разгледаме произволна ос, определена от посоката на $\vec{b}$. През точките A и B прекарваме прави, перпендикулярни на $\vec{b}$, които пресичат оста съответно в точките A' и B'. Тогава числото λ, определено от $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\vec{e}$, където $\vec{e}$ е единичен вектор, еднопосочно колинеарен с $\vec{b}$, се нарича *скаларна ортогонална проекция* на вектора $\vec{a}$ върху вектора $\vec{b}$ и се означава с $\operatorname{proj}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Теорема 9.6. *Нека* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *са произволни ненулеви вектори. Тогава е в сила равенството*

$$\operatorname{proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}. \quad (9.7)$$

Определение 9.5. Векторът $\overrightarrow{\mathrm{proj}_{\vec{b}}}\,\vec{a} = (\mathrm{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a})\vec{e}$, където $\vec{e}$ е единичен вектор, еднопосочно колинеарен с $\vec{b}$, се нарича *векторна ортогонална проекция* на $\vec{a}$ върху ос, определена от посоката на $\vec{b}$.

Определение 9.6. *Директорни косинуси на посоката*, определена от даден вектор $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$, се наричат косинусите на ъглите α, β и γ, които този вектор сключва съответно с базисните вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

Забележка 9.4. Ако векторът $\vec{e} = (x, y, z)$ е единичен, а базата $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ е ортонормирана, то директорните косинуси на посоката на $\vec{e}$ съвпадат с неговите координати, т.е. $\cos\alpha = x$, $\cos\beta = y$ и $\cos\gamma = z$. Освен това е изпълнено равенството

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Теорема 9.7 (*Метод на Грам*[1]*-Шмид* [2])**.** *Нека $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ са линейно независими вектори в $\mathbb{R}^m$. Тогава векторите $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, определени от равенствата*

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1 = \vec{a}_1,\\
&\vec{e}_2 = \vec{a}_2 - \tfrac{\vec{e}_1\vec{a}_2}{\vec{e}_1^{\,2}}\vec{e}_1,\\
&\vec{e}_3 = \vec{a}_3 - \tfrac{\vec{e}_1\vec{a}_3}{\vec{e}_1^{\,2}}\vec{e}_1 - \tfrac{\vec{e}_2\vec{a}_3}{\vec{e}_2^{\,2}}\vec{e}_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\vec{e}_n = \vec{a}_n - \tfrac{\vec{e}_1\vec{a}_n}{\vec{e}_1^{\,2}}\vec{e}_1 - \tfrac{\vec{e}_2\vec{a}_n}{\vec{e}_2^{\,2}}\vec{e}_2 - \cdots - \tfrac{\vec{e}_{n-1}\vec{a}_n}{\vec{e}_{n-1}^{\,2}}\vec{e}_{n-1},
\end{aligned} \tag{9.8}$$

са ортогонални помежду си.

Забележка 9.5. Векторите $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ от (9.8) могат да бъдат нормирани до получаването на ортонормираната система от вектори $\vec{e}_i' = \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}$. По този начин от произволна база се получава ортонормирана база.

Задача 9.1. *Докажете, че за скаларното произведение на произволни свободни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са изпълнени свойствата:*

а) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^{\,2} - \vec{b}^{\,2}$;
б) $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} \pm 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$.

[1] Йорген Грам (1850–1916) – датски математик.

[2] Ерхард Шмид (1876–1959) – немски математик, роден на територията на днешна Естония.

Решение. б) Като използваме последователно определението за скаларен квадрат на свободен вектор (Определение 9.2) и свойствата на скаларното произведение от Теорема 9.1, получаваме

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2.$$

Останалите тъждества се доказват аналогично.

Задача 9.2. *Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са вектори от произволно векторно пространство над $\mathbb{R}$.*

а) Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни и $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, пресметнете $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$ и $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$.

б) Ако $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, пресметнете $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$, $(\vec{a}+\vec{b})^2$, $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

в) Ако $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$, пресметнете $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$ и $(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-4\vec{b})$.

Решение. а) Тъй като $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни, то $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 0$, което означава че $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 1$. Тогава от (9.1) пресмятаме скаларното произведение $\vec{a}\vec{b} = 2.3.1 = 6$ и скаларните квадрати $\vec{a}^2 = 2^2 = 4$ и $\vec{b}^2 = 3^2 = 9$. Като използваме равенството от Задача 9.1 а), установяваме, че $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 4 - 9 = -5$.

б) Аналогично на а), намираме $\vec{a}\vec{b} = 3.4.\cos\frac{\pi}{3} = 6$, $\vec{a}^2 = 9$, $\vec{b}^2 = 16$. Тогава, като използваме равенството от Задача 9.1 б), получаваме:

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 + 2.6 + 16 = 37 \text{ и } (\vec{a}-\vec{b})^2 = 13.$$

Упътване. в) От свойствата на скаларното произведение, като се има предвид, че $\vec{a}\vec{b} = -1$, $\vec{a}^2 = 2$, $\vec{b}^2 = 1$, получаваме

$$(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-4\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} - 8\vec{b}^2 = -4.$$

Задача 9.3. *Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са вектори, за които $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, то намерете:*

а) стойностите на реалния параметър λ, за които векторите $\vec{c} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \lambda\vec{b}$ са взаимно ортогонални;

б) ъгъла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ така, че векторите $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ да сключват ъгъл с големина $\frac{\pi}{4}$.

Решение. От условието на задачата имаме $\vec{a}^2 = 16$ и $\vec{b}^2 = 4$. Тогава:

а) Векторите $\vec{c}$ и $\vec{d}$ са взаимно ортогонални, точно когато $\vec{c}\vec{d} = 0$. Пресмятаме $\vec{c}\vec{d} = (\vec{a}+\lambda\vec{b})(\vec{a}-\lambda\vec{b}) = \vec{a}^2 - \lambda^2\vec{b}^2 = 16 - 4\lambda^2$, откъдето достигаме до уравнението $4 - \lambda^2 = 0$. Следователно $\lambda = \pm 2$.

б) От първото равенство в (9.6) получаваме

$$\begin{aligned}\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) &= \frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \frac{(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})}{\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}} \\ &= \frac{\vec{a}^2-\vec{b}^2}{\sqrt{(\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2)(\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2)}} \\ &= \frac{12}{\sqrt{(20+2\vec{a}\vec{b})(20-2\vec{a}\vec{b})}}. \qquad (9.9)\end{aligned}$$

От друга страна, $\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Следователно $\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Така от последното равенство и (9.9) получаваме

$$\frac{12}{\sqrt{400-4(\vec{a}\vec{b})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откъдето намираме $\vec{a}\vec{b} = \pm 2\sqrt{7}$. Следователно

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pm\frac{2\sqrt{7}}{4.2} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Задача 9.4. *Докажете, че за всеки четири точки A, B, C и D е изпълнено равенството (тъждество на Ойлер)*

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BD} = 0 \qquad (9.10)$$

и като следствие от него докажете, че:

а) височините в триъгълника се пресичат в една точка (ортоцентър);

б) ако две двойки срещуположни ръбове в един тетраедър са перпендикулярни, то и останалите два срещуположни ръба също са перпендикулярни.

Решение. Нека O е произволна точка. Като приложим тъждеството на Шал към лявата страна на (9.10), получаваме

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}) + \\ &(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}).\end{aligned}$$

Оттук, като използваме дистрибутивното свойство на скаларното произведение, получаваме (9.10).

а) Нека AA_1, BB_1 и CC_1 са височини в произволен $\triangle\, ABC$ и H е пресечната точка на AA_1 и BB_1. Ще докажем, че CC_1 също минава през H. Прилагаме тъждеството на Ойлер за A, B, C и H

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BH} = 0.$$

Тъй като $AH \perp BC$ и $BH \perp CA$, то $\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BH} = 0$. Следователно $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CH} = 0$, което показва, че $CH \perp AB$. От друга страна, $CC_1 \perp AB$, което означава, че H лежи на височината CC_1.

Упътване. Твърдението от б) се доказва аналогично на това от а).

В следващите задачи, ако не е указано друго, ще считаме координатната система за дясна ортонормирана.

Задача 9.5. *Намерете скаларното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, техните дължини, както и ъгъла между тях, ако:*

а) $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (2, -1)$;
б) $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, -1)$;
в) $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, 8)$;
г) $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 0, -1)$;
д) $\vec{a} = (2, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$.

Решение. а) От (9.4) получаваме $\vec{a}\vec{b} = 3.2 + 1.(-1) = 5$, $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$. Тогава, след заместване в (9.6), получаваме $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следователно $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

б) Аналогично на а), пресмятаме $\vec{a}\vec{b} = 1.0 + 1.1 + 0.(-1) = 1$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$. Тогава $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, откъдето $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Отговори. в) $\vec{a}\vec{b} = 0$, $|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{69}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$;
г) $\vec{a}\vec{b} = -3$, $|\vec{a}| = \sqrt{6}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$; д) $\vec{a}\vec{b} = 8$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$, $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{8}{9}$.

Задача 9.6. *Намерете вектор $\vec{p}$, сключващ остър ъгъл с оста Oz, колинеарен с вектора $\vec{a} = (2, -3, 6)$ и такъв, че $|\vec{p}| = 14$.*

Решение. От условието за колинеарност между векторите $\vec{p}$ и $\vec{a}$ следва, че $\vec{p} = \lambda\vec{a} = \lambda(2, -3, 6)$. Тогава $|\vec{p}| = |\lambda||\vec{a}| = 7|\lambda| = 14$, откъдето $|\lambda| = 2$, т.е. $\lambda = \pm 2$. Тъй като ъгълът между векторите $\vec{p}$ и $\vec{e}_3 = (0, 0, 1) \parallel Oz$ е остър, то е изпълнено $\vec{p}\vec{e}_3 = 6\lambda > 0$. Следователно търсената стойност на коефициента на колинеарност е $\lambda = 2$, откъдето $\vec{p} = (4, -6, 12)$.

Задача 9.7. *Намерете координатите на вектора $\vec{p}$, сключващ равни тъпи ъгли с векторите $\vec{a} = (-1, 1, -1)$, $\vec{b} = (-1, 1, 1)$ и $\vec{c} = (5, -1, -1)$, ако $|\vec{p}| = \sqrt{5}$.*

Решение. Нека $\vec{p} = (x, y, z)$. Пресмятаме $\vec{a}\vec{p} = y - x - z$, $\vec{b}\vec{p} = y - x + z$, $\vec{c}\vec{p} = 5x - y - z$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{3}$, $|\vec{c}| = 3\sqrt{3}$. Тъй като $\vec{p}$ сключва равни ъгли с $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то е изпълнено $\frac{\vec{a}\vec{p}}{|\vec{a}||\vec{p}|} = \frac{\vec{b}\vec{p}}{|\vec{b}||\vec{p}|} = \frac{\vec{c}\vec{p}}{|\vec{c}||\vec{p}|}$, откъдето след заместване получаваме

$$\frac{y - x - z}{\sqrt{15}} = \frac{y - x + z}{\sqrt{15}} = \frac{5x - y - z}{3\sqrt{15}}.$$

От горните равенства намираме $y = 2x$, $z = 0$. Следователно $\vec{p} = (x, 2x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Сега отчитаме условието за дължината на $\vec{p}$, съгласно което достигаме до уравнението $x^2 + 4x^2 = 5$. Тогава $x = \pm 1$. Така получихме противоположните вектори $\vec{p}_1 = (1, 2, 0)$ и $\vec{p}_2 = (-1, -2, 0)$, които образуват равни ъгли с $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Тъй като $\vec{a}\vec{p}_1 = 1 > 0$, а $\vec{a}\vec{p}_2 = -1 < 0$, то векторът $\vec{p}_2$ сключва равни тъпи ъгли с $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и следователно търсеният вектор е $\vec{p} = \vec{p}_2 = (-1, -2, 0)$.

Задача 9.8. *Намерете директорните косинуси на посоката, определена от насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, ако:*

а) $A(-2, 1, 3)$, $B(0, -1, 2)$;
б) $A(1, 2, 4)$, $B(-1, 4, 8)$;
в) $A(6, 4, 6)$, $B(6, 7, 10)$.

Решение. а) Пресмятаме координатите на $\overrightarrow{AB} = (2, -2, -1)$, откъдето намираме $|\overrightarrow{AB}| = 3$. Тогава директорните косинуси на посоката на $\overrightarrow{AB}$ са координатите на единичния вектор

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{3}(2, -2, -1)$$

и следователно се определят от равенствата

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{1}{3}.$$

Отговори. б) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$; в) $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\gamma = \frac{4}{5}$.

Задача 9.9. *Намерете единичния вектор $\vec{a}$, който сключва ъгли от 45° и 60° съответно с координатните оси Ox и Oy и остър ъгъл γ с Oz. Намерете скаларната проекция на $\vec{a}$ върху вектора $\vec{b} = (\sqrt{2}, -3, -5)$.*

Решение. Тъй като векторът $\vec{a}$ е единичен, то координатните му съвпадат с директорните косинуси на посоката, определена от него, т.е. с косинусите на ъглите, които образува с координатите оси.

Така $\vec{a} = (\cos 45^\circ, \cos 60^\circ, \cos\gamma) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \cos\gamma)$. При това е изпълнено $\cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2\gamma = 1$, откъдето $\cos\gamma = \pm\frac{1}{2}$. Понеже по условие ъгъл γ е остър, то $\cos\gamma = \frac{1}{2}$. Следователно $\vec{a} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Скаларната проекция на $\vec{a}$ върху $\vec{b}$ пресмятаме по формулата

$$\operatorname{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 9.10. *Намерете векторната проекция на* $\vec{a} = (4, -3, 2)$ *върху ос* l*, която сключва с координатните оси равни остри ъгли.*

Решение. Най-напред ще намерим единичен вектор $\vec{e}$, определящ посоката върху оста l. Аналогично на предходната задача, имаме

$$\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad \text{и} \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

където α, β и γ са ъглите, които $\vec{e}$ сключва с трите координатни оси. По условие имаме $\alpha = \beta = \gamma$, откъдето следва, че $3\cos^2\alpha = 1$, т.е. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ (защото ъглите са остри). Така получаваме $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Тогава скаларната проекция на $\vec{a}$ върху вектора $\vec{e}$ е $\operatorname{proj}_{\vec{e}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{e}}{|\vec{e}|} = \sqrt{3}$. Следователно векторната проекция на $\vec{a}$ върху оста l е $\overrightarrow{\operatorname{proj}}_{\vec{e}} \vec{a} = (\operatorname{proj}_{\vec{e}} \vec{a})\vec{e} = \sqrt{3}\,\vec{e} = (1, 1, 1)$.

Задача 9.11. *Като използвате метода на Грам-Шмид (Теорема 9.7), ортогонализирайте системите от вектори:*

а) $\vec{a}_1 = (1, -1)$, $\vec{a}_2 = (2, -1)$;
б) $\vec{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 1, -1)$;
в) $\vec{a}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 1)$.

Решение. а) Тъй като координатите на $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не са пропорционални, то двата вектора са линейно независими. Нека $\vec{e}_1 = \vec{a}_1$. Пресмятаме $\vec{e}_1\vec{a}_2 = 3$ и $\vec{e}_1^{\,2} = 2$. Тогава от (9.8) получаваме

$$\vec{e}_2 = \vec{a}_2 - \frac{3}{2}\vec{e}_1 = (2, -1) - \frac{3}{2}(1, -1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

б) Аналогично на подточка а), първо установяваме, че дадените три вектора не са линейно зависими, понеже детерминантата от координатите им е различна от нула. Нека $\vec{e}_1 = \vec{a}_1$. Тогава имаме $\vec{e}_1\vec{a}_2 = -1$, $\vec{e}_1^{\,2} = 2$. Следователно $\vec{e}_2 = (-1, 1, 0) + \frac{1}{2}(1, 0, 1) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$. След това изчисляваме $\vec{e}_1\vec{a}_3 = -1$, $\vec{e}_2\vec{a}_3 = \frac{1}{2}$, $\vec{e}_2^{\,2} = \frac{3}{2}$. Тогава $\vec{e}_3 = \vec{a}_3 + \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

Отговори. в) $\vec{e}_1(0, 1, 1)$, $\vec{e}_2(1, 0, 0)$, $\vec{e}_3(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Задача 9.12. *Даден е* $\triangle\ ABC$ *с върхове точките* $A(0,-2)$, $B(8,4)$ *и* $C(3,-6)$. *Намерете дължините на медианата през върха* C *и на ъглополовящата през върха* A *и докажете, че триъгълникът е правоъгълен.*

Решение. За да намерим дължината на медианата през C, най-напред намираме средата $M(4,1)$ на страната AB. Остава да намерим дължината на насочената отсечка $\overrightarrow{CM}$. За целта пресмятаме $\overrightarrow{CM}=(1,7)$ и намираме $|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$.

Нека AL е ъглополовящата през върха A, като $L\in BC$. От училищния курс е известно, че $\frac{BL}{CL}=\frac{AB}{AC}$. Пресмятаме $\overrightarrow{AB}=(8,6)$ и $\overrightarrow{AC}=(3,-4)$. Следователно $|\overrightarrow{AB}|=10$ и $|\overrightarrow{AC}|=5$. Тогава $\frac{BL}{CL}=\frac{2}{1}$ и от (7.6) получаваме

$$\overrightarrow{AL}=\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{3}=\left(\frac{14}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

Оттук пресмятаме $|\overrightarrow{AL}|=\frac{10}{3}\sqrt{2}$.

Тъй като $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}=0$, то триъгълникът е правоъгълен с прав ъгъл при върха A.

Задача 9.13. *Даден е* $\triangle\ ABC$ *с върхове* $A(2,0,2)$, $B(0,2,-2)$ *и* $C(2,2,0)$. *Намерете:*

а) дължините на страните и големините на вътрешните ъгли на $\triangle\ ABC$;

б) координатите на петата H *на височината през върха* A.

Решение. а) Намираме насочените отсечки $\overrightarrow{AB}=(-2,2,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(0,2,-2)$ и $\overrightarrow{BC}=(2,0,2)$. За дължините им получаваме съответно $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{6}$, $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{2}$ (следователно $\triangle\ ABC$ е равнобедрен). Пресмятаме скаларните произведения $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC}=12$ и $\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB}=-4$. Вътрешните ъгли на триъгълника намираме чрез

$$\cos\sphericalangle ABC=\cos\sphericalangle BAC=\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\sphericalangle ACB=\cos\sphericalangle(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=-\frac{1}{2}.$$

Следователно $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BAC=\frac{\pi}{6}$, $\sphericalangle ACB=\frac{2\pi}{3}$.

б) Тъй като точката H е от правата BC, то насочените отсечки $\overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{BC}$ са колинеарни. Последното условие е равносилно на $\overrightarrow{BH}=x\overrightarrow{BC}$, $x\in\mathbb{R}$. Тъй като AH е височина към страната BC, насочените отсечки $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{BC}$ са перпендикулярни. Следователно имаме $\overrightarrow{AH}\overrightarrow{BC} = 0$. От друга страна, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC}$. Така за неизвестния коефициент на колинеарност x получаваме уравнението $(\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC})\overrightarrow{BC} = 0$, откъдето $x = -\frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}^2} = \frac{3}{2}$. Тогава за радиус-вектора $\overrightarrow{OH}$ на точката H получаваме

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OB} + x\overrightarrow{BC} = (0, 2, -2) + \frac{3}{2}(2, 0, 2).$$

Следователно $H(3, 2, 1)$.

Задача 9.14. *Даден е $\triangle ABC$.*

а) *Ако $A(3, -1, 3)$, $B(2, 0, 3)$, $C(2, -1, 4)$, докажете, че $\triangle ABC$ е равностранен и намерете разстоянието от медицентъра му G до центъра на координатната система.*

б) *Ако $A(8, 5, 2)$, $B(8, 2, -1)$, $C(6, 3, 1)$, докажете, че $\triangle ABC$ е равнобедрен и правоъгълен ($\sphericalangle C = \frac{\pi}{2}$).*

Отговори. а) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(7, -2, 10)$, разстоянието от G до O е $|\overrightarrow{OG}| = \sqrt{17}$; б) $\overrightarrow{CA} = (2, 2, 1)$, $\overrightarrow{CB} = (2, -1, -2)$, откъдето $|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = 3$, $\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB} = 0$.

9.2. **Векторно и смесено произведение на вектори.**

Определение 9.7 (Векторно произведение). *Векторно произведение* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарича векторът $\vec{a} \times \vec{b}$, за който са изпълнени условията:

1) ако $\vec{a} = \vec{o}$ или $\vec{b} = \vec{o}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$;
2) ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ненулеви вектори, то
   а) $|\vec{a} \times \vec{b}\,| = |\vec{a}\,||\vec{b}\,| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$;
   б) $(\vec{a} \times \vec{b}\,) \perp \vec{a}$ и $(\vec{a} \times \vec{b}\,) \perp \vec{b}$, т.е. $(\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{b} = 0$;
   в) ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, то векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ (в този ред) образуват положително (дясно) ориентирана база в тримерното пространство.

Теорема 9.8. *Ако $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ образуват дясно ориентирана ортонормирана база, то за тях са валидни равенствата:*

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

Теорема 9.9 (Свойства на векторното произведение)**.** *Нека $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са произволни вектори, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава са в сила следните равенства:*