Определение 5.7. Максималният брой линейно независими вектори в една система от вектори $\{a_1, \dots, a_n\}$ се нарича *ранг* на системата и ще означаваме с $\mathsf{rang}\{a_1, \dots, a_n\}$.

Определение 5.8. Максималният брой линейно независими редове (или стълбове) в една матрица $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ се нарича *ранг* на матрицата A и ще означаваме с $\mathsf{rang}A$.

Определение 5.9. Матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

където $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, се нарича *трапецовидна матрица* или *матрица с трапецовидна форма*.

Теорема 5.1. *Рангът на трапецовидната матрица (5.1) е равен на броя на ненулевите ѝ редове, т.е.* $\mathsf{rang}A = r$.

Теорема 5.2. *Извършването на елементарни преобразувания по редовете и стълбовете на една матрица не променя нейния ранг.*

Забележка 5.4. Не е трудно да се докаже, че Определение 5.8 е еквивалентно на Определение 5.7. Това означава, че ранг на система от вектори се намира по същия начин като ранг на матрица.

Забележка 5.5. Една детерминанта е равна на нула, точно когато системата от редовете ѝ (стълбовете ѝ) е линейно зависима.

Задача 5.1. *Проверете дали е линейно зависима и определете ранга на системата вектори:*

а) $a_1 = (2, 1, 3)$, $a_2 = (1, 0, -5)$, $a_3 = (-4, -1, 7)$;
б) $a_1 = (1, 1, -1)$, $a_2 = (0, 2, 1)$, $a_3 = (1, 0, -2)$;
в) $a_1 = (1, 2, -1)$, $a_2 = (2, 1, 0)$, $a_3 = (0, 3, -2)$;
г) $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, 0)$;
д) $a_1 = (-1, 2, 2)$, $a_2 = (1, -1, 2)$, $a_3 = (1, 1, 2)$;
е) $a_1 = (1, 2, 1, -1)$, $a_2 = (3, 1, -2, 1)$, $a_3 = (9, 8, -1, -1)$;
ж) $a_1 = (1, 0, -1, 1, 1)$, $a_2 = (3, 1, 2, -4, 2)$, $a_3 = (2, -1, -3, 1, -2)$, $a_4 = (-2, 5, 11, -5, 13)$;
з) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

и) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

к) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$;

л) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Образуваме матрица, по редовете на която са разположени векторите от системата. След това, извършвайки елементарни преобразувания по редовете и стълбовете на тази матрица, намираме трапецовидната (или триъгълната) ѝ форма.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тъй като получаваме нулев ред, то системата е линейно зависима. Ненулевите редове са два, което означава, че $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 2$.

Тъй като координатите на векторите a_1, a_2 и a_3 формират квадратна матрица, то изследването за линейна зависимост може да бъде извършено и чрез пресмятане на детерминантата на тази матрица и използване на Забележка 5.5.

з) Ще решим задачата по два начина.

Начин 1. При това решение ще използваме директно Определение 5.3 и Определение 5.7. Нека $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ са реални числа. Тъй като A_1, A_2, A_3 принадлежат на векторното пространство $M_2(\mathbb{R})$, то съгласно Определение 5.3, за да установим дали системата е линейно зависима, трябва да изследваме уравнението

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

След извършване на действията в лявата страна на уравнението получаваме

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

което е еквивалентно на системата

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0. \end{array}\right.$$

Очевидно тази система има единствено решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Следователно системата е линейно независима. Тогава от Определение 5.7 заключаваме, че $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3\} = 3$.

Начин 2. Запазвайки съответствието на елементите, записваме матриците A_1, A_2 и A_3 като „матрици ред“ по следния начин: $(1, 2, 0, 1)$, $(0, 1, 2, 0)$ и $(0, 1, 1, 1)$, след което постъпваме аналогично на а):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \urcorner^{-1} \\ \hookleftarrow_{+} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тъй като не може да се получи нулев ред, то заключаваме, че системата е линейно независима с $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3\} = 3$.

Отговори. б) линейно независима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 3$;
в) линейно зависима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 2$;
г) линейно независима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 3$;
д) линейно независима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 3$;
е) линейно зависима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 2$;
ж) линейно зависима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = 3$;
и) линейно независима, $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3\} = 3$;
к) линейно зависима, $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3\} = 2$;
л) линейно независима, $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3, A_4\} = 4$.

5.2. **Смяна на база на линейно пространство.**

Нека $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ е база на линейното пространство L и $e' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ е система от вектори на L. Тогава векторите от e' са линейни комбинации на базисните вектори, т.е.

$$\begin{aligned} e'_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \ldots + t_{n1}e_n, \\ e'_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{n2}e_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n, \end{aligned} \tag{5.2}$$

където $t_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ са координатите на векторите от e' в базата e.