Задачи

Аналитична геометрия

1. Векторно и смесено произведение на свободни вектори

Задача 1. Дадени са векторите $\vec{a}(3,-1,-2)$, $\vec{b}(1,2,-1)$, $\vec{c}(1,1,-1)$. Намерете координатите на $\vec{a}\times\vec{b}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ и пресметнете $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Отг.: $\vec{a}\times\vec{b}=(5,1,7)$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(-8,12,4)$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-1$.

Задача 2. За кои стойности на параметъра $\lambda\in\mathbb{R}$ векторът $\vec{c}(\lambda-1,2\lambda+1,-\lambda)$ е ортогонален на $\vec{a}\times\vec{b}$, където $\vec{a}(1,2,0)$ и $\vec{b}(1,-1,1)$.

Отг. Пресмятаме $\vec{a}\times\vec{b}=(2,-1,-3)$. Тогава $\vec{a}\times\vec{b}=(2,-1,-3)\perp\vec{c}$, точно когато $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=0$, откъдето получаваме $\lambda=1$.

Задача 3. Намерете разстоянието от точка $A(1,1)$ до правата, определена от точките $B(-3,4)$ и $C(13,-4)$.

Отг. Нека разстоянието от A до правата BC е h. Разглеждаме $\triangle ABC$. От една страна $S_{\triangle ABC}=\frac{|\overrightarrow{BC}|.h}{2}=4\sqrt{5}h$. От друга страна имаме $S_{\triangle ABC}=\frac{|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}|}{2}$. Пресмятаме $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}=(0,0,-16)$ и следователно $S_{\triangle ABC}=8$. Тогава от първия израз за лицето намираме $h=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Задача 4. Дадени са точките $A(-1,2,3)$, $B(0,4,4)$, $C(2,0,2)$, $D(-1,3,2)$. Намерете разстоянието от D до равнината ABC.

Отг. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,4,-8)$, $S_{ABC}=2\sqrt{5}$, $V_{ABCD}=2$. Следователно разстоянието от D до ABC е равно на $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

2. Уравнение на права в равнина

Задача 5. Намерете общото уравнение на права:
а) през т. $M(2,1)$, сключваща ъгъл $135°$ с положителната посока на оста Ox;
б) през т. $A(-2,0)$ и $B(0,3)$;
в) през т. $N(1,-4)$, успоредна на правата $p: 2x-5y+2=0$;
г) през т. $P(-3,1)$, перпендикулярна на правата $q: 4x-y+3=0$.

Отг.: а) $x+y-3=0$; б) $3x-2y+6=0$; в) $2x-5y-22=0$; г) $x+4y-1=0$.

Задача 6. Относно ортонормирана координатна система в равнината Oxy са дадени точките: $A(2,-2)$ и $B(4,2)$.
а) Намерете т. C от правата $x-y=0$ такава, че $\triangle ABC$ да бъде правоъгълен с прав ъгъл при върха C.
б) Намерете уравненията на страните на $\triangle ABC$ за получената т. C в подточка а). Кои от страните са успоредни на координатните оси?

Отг. а) От C лежи на правата $x-y=0$ следва, че $C(x,x)$. Пресмятаме $\overrightarrow{AC}(x-2,x+2)$ и $\overrightarrow{BC}(x-4,x-2)$. Тогава $\sphericalangle ACB=90°$, точно когато $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=0$, откъдето намираме $x=2$ и $C(2,2)$ или $x=1$ и $C(1,1)$.
б) $AB: 2x-y-6=0$; $AC: x-2=0$; $BC: y-2=0$. Страната AC е успоредна на Oy,
а страната BC – на Ox.

Задача 7. Даден е успоредник $ABCD$ с върхове $A(2,1)$, $B(-1,0)$ и пресечна точка на диагоналите $Q(1,1)$. Намерете координатите на върховете C, D и медицентъра G на $\triangle ABQ$, уравненията на страните на успоредника, както и лицето на $ABCD$.

Отг.: Q е среда на диагоналите AC и BD и следователно $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$. Тогава $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB}$. Така получаваме $C(0,1)$, $D(3,2)$. Имаме още $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OQ})$, следователно $G(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. $AB : x - 3y + 1 = 0$, $CD : x - 3y + 3 = 0$, $AD : x - y - 1 = 0$, $BC : x - y + 1 = 0$, $S_{ABCD} = 1$.

Задача 8. Нека $A(1,7)$ е връх на $\triangle ABC$. Ако правите $p : 2x + 3y - 10 = 0$, $q : x = -3 + 2s, y = s$ са симетрали съответно на страните AB и AC, намерете координатите на върховете B и C и лицето на триъгълника.

Отг. Първо построяваме уравненията на страните AB и AC, използвайки условията, че минават през т. A и че за всяка от тях знаем по една перпендикулярна на нея права – нейната симетрала. Така получаваме $AB : 3x - 2y + 11 = 0$ и $AC : 2x + y - 9 = 0$. Нека означим съответно с M и N средите на AB и BC. Координатите на тези точки намираме като решение на системата от уравнението на страната, на която лежи и уравнението на съответната ѝ симетрала. Имаме $M(-1,4)$ и $N(3,3)$. Сега можем да намерим $B(-3,1)$ и $C(-5,-1)$. Накрая пресмятаме $S = 2$.

3. Уравнение на права и равнина в тримерно пространство

Задача 9. Дадени са т. $A(1,-4,3)$, $B(3,-3,2)$, права $a : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{2}$
и равнина $\alpha : 2x - 3y + z - 3 = 0$. Намерете:
а) равнина β през т. A и B и успоредна на правата a;
б) равнина γ, успоредна на α и на разстояние $\sqrt{14}$ от нея;
в) т. B' - ортогонално симетрична на B относно равнината α.
г) т. P от правата a, която е на разстояние $\frac{7}{\sqrt{14}}$ от равнината α.

Отг. а) $\beta : x - 5y - 3z - 12 = 0$; б) $\gamma_1 : 2x - 3y + z + 11 = 0$, $\gamma_2 : 2x - 3y + z - 17 = 0$; в) $B'(-1,3,0)$; г) $P_1(-1,2,4)$, $P_2(1,0,8)$.

Задача 10. Дадени са точките $M(1,2,1)$, $N(1,0,1)$, правите $a : \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$,
$b : x = -1 + 2s, y = 3 + 4s, z = 3s$ и равнината $\alpha : 2x + y - 2z - 1 = 0$. Намерете:
а) права l, минаваща през т. M и N;
б) права m, минаваща през т. M и перпендикулярна на равнината α;
в) равнина β, съдържаща т. M и успоредна на правите a и b;
г) равнина γ, минаваща през т. N и успоредна на α;
д) равнина δ, съдържаща т. N, успоредна на b и перпендикулярна на α;
е) разстоянието $\mathrm{d}(M,\alpha)$ от M до α;
ж) т. M' - ортогонално симетрична на M относно правата a.

Отг. а) $l : \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}$; б) $m : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-2}$; в) $\beta : x - 2y + 2z + 1 = 0$; г) $\gamma : 2x + y - 2z = 0$; д) $\delta : 11x - 10y + 6z - 17 = 0$; е) $\mathrm{d}(M,\alpha) = \frac{1}{3}$; ж) $M'(5,-3,0)$.