ОБЗОРНИ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКА – ГЕОМЕТРИЯ

за специалност Математика и информатика

1. Линейни действия със свободни вектори

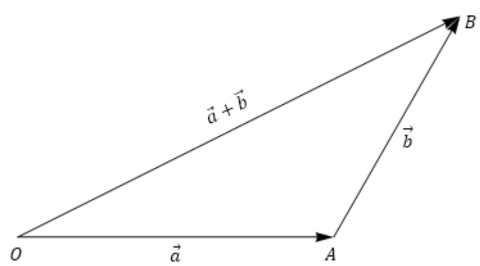
Линейните действия със свободни вектори са *събиране на свободни вектори* и *умножение на свободен вектор с (реално) число*.

Правила за събиране на свободни вектори:
• *правило на триъгълника (релация на Шал)* – събиране на вектори, за които краят на първия съвпада с началото на втория (фиг. 1)

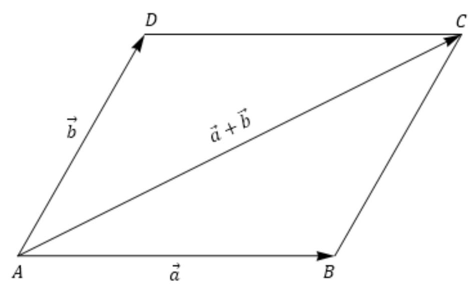
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB};$$

• *правило на успоредника* – събиране на вектори с общо начало (фиг. 2)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad ABCD \text{ е успоредник;}$$



фиг. 1



фиг. 2

Два свободни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са *колинеарни*, точно когато са линейно зависими, т.е. $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. При $\lambda > 0$ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са *еднопосочно колинеарни* (означаваме $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), а при $\lambda < 0$ те са *разнопосочно колинеарни* (означаваме $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).
Три свободни вектора в пространството са *компланарни*, точно когато са линейно зависими, т.е. поне един от тях може да се представи като линейна комбинация на останалите два.
Всеки четири свободни вектора в геометричното векторно пространство са линейно зависими.

2. Координатни системи

Ако относно произволна координатна система в тримерното пространство точките A, B и C са зададени съответно със следните координати $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, то

• насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ има координати

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1); \tag{1}$$

• средата M на отсечката AB има координати

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right); \tag{2}$$

• ако A, B и C са неколинеарни, медицентърът G на $\triangle\, ABC$ има координати

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right). \tag{3}$$

3. Метрични действия със свободни вектори

Скаларното произведение $\vec{a}\vec{b}$ на свободните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се дефинира като реалното число

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}). \tag{4}$$

Следователно за *скаларния квадрат* на вектора $\vec{a}$ е изпълнено $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. *Евклидовата дължина* на вектора $\vec{a}$ се определя от $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Скаларното произведение притежава следните свойства:

• $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (комутативност);

• $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (дистрибутивност);

• $(\lambda\vec{a})\,\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right)$ (хомогенност);

• $\vec{a}^2 > 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$ (неотрицателност).

Ъгъл между два вектора

$$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \tag{5}$$

Векторното произведение на ненулевите свободни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е векторът $\vec{a} \times \vec{b}$, притежаващ свойствата:

(a) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$;

(b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$;

(c) ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ образуват дясно ориентирана база в тримерното пространство.

Свойства на векторното произведение:

• $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикомутативност);

• $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (дистрибутивност);

• $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ (хомогенност);

• $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\vec{c}.\vec{b}-\vec{b}\vec{c}.\vec{a}$ (*двойно векторно произведение*).

Тъждество на Лагранж

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\vec{b})^2. \tag{6}$$

Смесеното произведение на свободните вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се дефинира чрез

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right). \tag{7}$$

Ако относно *ортонормирана* координатна система са дадени векторите $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$ и $\vec{c}(x_3,y_3,z_3)$, то:

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,\qquad \vec{a}^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2,\qquad |\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right),\\ \vec{a}\vec{b}\vec{c}&=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{8}$$

Формули за пресмятане на:

• *лицето на успоредника* и *лицето на триъгълника*, определени от неколинеарните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$S_{\text{усп}}=|\vec{a}\times\vec{b}|,\qquad S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|; \tag{9}$$

• *обема на паралелепипеда* и *обема на триъгълната пирамида* (тетраедъра), определени от некомпланарните вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$V_{\text{пар}}=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,\qquad V_{\text{тет}}=\frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \tag{10}$$

4. Уравнение на права в равнина

Уравнения на права в равнина:

• *скаларно параметрично уравнение* на правата l през точката $M(x_0,y_0)$ с направляващ вектор $\vec{v}(a,b)\neq(0,0)$

$$l:\left|\begin{array}{l} x=x_0+\lambda a\\ y=y_0+\lambda b\end{array}\right.; \tag{11}$$

• *канонично уравнение* на правата l през точката $M(x_0,y_0)$ с направляващ вектор $\vec{v}(a,b)$

$$l:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}; \tag{12}$$

• *канонично уравнение* на правата l през точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$

$$l : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_2}; \tag{13}$$

• уравнение на правата l през точката $M(x_0, y_0)$ с нормален вектор $\overrightarrow{N}(A, B) \neq (0, 0)$ (относно ортонормирана координатна система)

$$l : A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0; \tag{14}$$

• *общо уравнение* на правата l с нормален вектор $\overrightarrow{N}(A, B)$ (относно ортонормирана координатна система)

$$l : Ax + By + C = 0; \tag{15}$$

• *отрезово уравнение* на правата l през точките $A(a, 0)$, $B(0, b)$

$$l : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \tag{16}$$

• *декартово уравнение* на правата l с ъглов коефициент $k = \operatorname{tg}\alpha$ (α е ъгълът, който l сключва с положителната посока на оста Ox) и с отрез n от оста Oy (относно ортонормирана координатна система)

$$l : y = kx + n. \tag{17}$$

Ако относно ортонормирана координатна система правата l има направляващ вектор $\vec{v}(a, b)$, то векторът $(b, -a)$ е неин нормален вектор. Обратно, ако $\overrightarrow{N}(A, B)$ е нормален вектор за l, то векторът $(B, -A)$ е колинеарен на l.

Разстоянието $d(M, l)$ от точката $M(x_0, y_0)$ до правата $l : Ax + By + C = 0$ (относно ортонормирана координатна система)

$$d(M, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{18}$$

5. Уравнение на окръжност в равнина

Общото уравнение на окръжност с център точката $C(a, b)$ и радиус $r > 0$ има вида

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \tag{19}$$

След разписване, това уравнение добива вида

$$x^2 + y^2 + mx + ny + l = 0. \tag{20}$$

6. Уравнение на права и равнина в тримерното пространство

Уравнения на равнина в тримерното пространство:

• *скаларно параметрично уравнение* на равнината α през точката $M(x_0, y_0, z_0)$, с компланарни вектори $v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$

$$\left| \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu a_2 \\ y = y_0 + \lambda b_1 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda c_1 + \mu c_2 \end{array} \right. ; \tag{21}$$

• уравнение на равнината α през точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, с компланарни вектори $v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0; \tag{22}$$

• уравнение на равнината α през точката $M(x_0, y_0, z_0)$, с нормален вектор $\overrightarrow{N}(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ (относно ортонормирана координатна система)

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0; \tag{23}$$

• *общо уравнение* на равнината α с нормален вектор $\overrightarrow{N}(A, B, C)$ (относно ортонормирана координатна система)

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{24}$$

Разстоянието $d(M, \alpha)$ от точката $M(x_0, y_0, z_0)$ до равнината $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ (относно ортонормирана координатна система)

$$d(M, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{25}$$

Уравнения на права в тримерното пространство:

• *скаларно параметрично уравнение* на правата l през точката $M(x_0, y_0, z_0)$ с направляващ вектор $\vec{v}(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

$$l : \left| \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{array} \right. ; \tag{26}$$

• *канонично уравнение* на правата l през точката $M(x_0, y_0, z_0)$ с направляващ вектор $\vec{v}(a, b, c)$

$$l : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}; \tag{27}$$

• правата l, зададена като пресечница на две равнини

$$l : \left| \begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{array} \right. \tag{28}$$

Примерни задачи

Задача 1. Относно ортонормирана координатна система в равнината е даден триъгълникът $\triangle\, ABC$ с върхове $A(2, 5)$, $B(-1, 2)$ и $C(0, 4)$. Намерете:

а) уравнението на правата през точките A и B;

б) уравнението на медианата m през върха C;

в) уравнението на височината h през върха A;

г) уравнението на описаната около $\triangle\, ABC$ окръжност;

д) лицето на $\triangle\, ABC$;

е) косинуса на $\measuredangle ACB$.

Решение.

а) Построяваме каноничното уравнение на правата AB, съгласно (12), като права през точката A (или през B) с направляващ вектор $\overrightarrow{AB}(-3,-3) \parallel (1,1)$, както следва

$$AB : \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{1}.$$

От горното следва, че общото уравнение на тази права е $AB : x - y + 3 = 0$.

б) Първо намираме координатите на средата M на отсечката AB, съгласно (2), $M(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$. Тогава за направляващия вектор $\overrightarrow{CM}$ на медианата m пресмятаме $\overrightarrow{CM}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \parallel (1,-1)$. Аналогично на подточка а), получаваме каноничното уравнение на търсената права $m : \frac{x-0}{1} = \frac{y-4}{-1}$, откъдето за общото ѝ уравнение имаме $m : x + y - 4 = 0$.

в) Височината през A е перпендикулярна на страната BC, следователно $\overrightarrow{BC}(1,2)$ е нормален вектор за тази права. Тогава общото ѝ уравнение, съгласно (15), има вида

$$h : x + 2y + a = 0, \tag{29}$$

където a е неизвестна константа. Нейната стойност определяме от условието, че точката A е от правата h. Заместваме координатите на A в уравнението (29) и получаваме $2 + 2.5 + a = 0$. Следователно $a = -12$ и уравнението на височината е $h : x + 2y - 12 = 0$.

г) За да намерим уравнението на описаната около триъгълника окръжност, можем да намерим координатите на центъра и радиуса ѝ и да ги заместим в уравнението (19). Намираме уравненията на две прави, съдържащи диаметри на окръжността, т.е. прави през средите на две от хордите AB, AC или BC, перпендикулярни на съответните хорди. Построяваме правата d_1 през средата $M(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ на AB с нормален вектор $\overrightarrow{AB}(-3,-3)$. Тази права има уравнението $d_1 : x + y - 4 = 0$. Аналогично, построяваме правата d_2 през средата $N(-\frac{1}{2}, 3)$ на BC с нормален вектор $\overrightarrow{BC}(1,2)$. Така получаваме $d_2 : 2x + 4y - 11 = 0$. Тогава пресечната точка P на d_1 и d_2 е центърът на окръжността. Решавайки системата от уравненията на двете прави, намираме координатите на тази точка $P(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$. Дължината на всеки от векторите $\overrightarrow{AP}(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$, $\overrightarrow{BP}(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$ или $\overrightarrow{CP}(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$ е равна на радиуса на окръжността. Пресмятаме $r = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

Като заместим получените данни в уравнението (19), намираме уравнението на описаната около $\triangle\, ABC$ окръжност, както следва

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

След разписване, горното уравнение приема вида

$$x^2 + y^2 - 5x - 3y - 4 = 0.$$

Горното уравнение може да бъде получено и по алгебричен път чрез (20), като неизвестните коефициенти m, n и l се намерят от условията, че точките A, B и C лежат върху търсената окръжност, т.е. удовлетворяват уравнението (20). След заместване на координатите на трите точки в (20), получаваме определената система

$$\left| \begin{aligned} 2m + 5n + l &= -29 \\ -m + 2n + l &= -5 \\ 4n + l &= -16, \end{aligned} \right.$$

чието решение е $m = -5$, $n = -3$, $l = -4$.

д) Намираме координатите на две насочени отсечки по две от страните на триъгълника, например $\overrightarrow{AB}(-3, -3)$ и $\overrightarrow{AC}(-2, -1)$. Съгласно (8), пресмятаме векторното произведение $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}(0, 0, -3)$. Тогава, като вземем предвид втората формула от (9), получаваме, че $S_{ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{3}{2}$.

е) Насочените отсечки $\overrightarrow{CA}(2, 1)$ и $\overrightarrow{CB}(-1, -2)$ определят ъгъла $\measuredangle ACB$. Съгласно (8), пресмятаме

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 2.(-1) + 1.(-2) = -4, \\ &|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Тогава, съгласно (5), имаме

$$\cos \measuredangle ACB = \cos \measuredangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|} = \frac{-4}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = -\frac{4}{5}.$$

Задача 2. Относно ортонормирана координатна система в равнината са дадени точките $A(2, -1)$, $B(3, 2)$, $C(-2, -3)$. Докажете, че трите точки са върхове на триъгълник и намерете:

а) уравнението на правата AB;

б) координатите на точката C' – ортогонално симетрична на C относно правата AB;

в) $\measuredangle BAC$;

г) лицето на $\triangle\ ABC$.

Решение. За да бъдат точките A, B и C върхове на триъгълник, те не трябва да бъдат колинеарни. Следователно никои две насочени отсечки, образувани от тези точки, също не бива да бъдат колинеарни. Намираме $\overrightarrow{AB}(1, 3)$ и $\overrightarrow{AC}(-4, -2)$, откъдето се вижда, че не съществува $\lambda \in \mathbb{R}$ така, че $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$. Следователно точките A, B и C са неколинеарни. Друг начин да достигнем до същия резултат, е да установим, че векторното им произведение е ненулев вектор. Пресмятаме $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}(0, 0, 10) \neq \vec{o}$.

а) Решава се аналогично на зад. 1 а). Отг. $AB : 3x - y - 7 = 0$.

б) Задачата може да се реши чрез алгоритъм от три стъпки. Първо построяваме правата p през C, която е перпендикулярна на правата AB, т. е. с нормален вектор $\overrightarrow{AB}(1, 3)$. Аналогично на зад. 1 в) тази права ще има уравнението $p : x + 3y + 11 = 0$. След това намираме координатите на пресечната точка M на правите AB и p, решавайки системата

$$\left|\begin{array}{l} 3x - y - 7 = 0 \\ x + 3y + 11 = 0. \end{array}\right.$$

Единственото решение на горната система е $M(1, -4)$. Накрая, като отчетем, че M е среда на отсечката CC', т. е. че $M = \frac{C+C'}{2}$, намираме координатите на C' съгласно формулата $C' = 2M - C = 2(1, -4) - (-2, -3) = (4, -5)$.

в) Решава се като зад. 1 д): $\overrightarrow{AB}(1, 3)$, $\overrightarrow{AC}(-4, -2)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -10$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$, $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{5}$. Тогава

$$\cos \measuredangle BAC = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{-10}{2\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следователно $\measuredangle BAC = 135°$.

г) Решава се като зад. 1 г): $\overrightarrow{AB} \times \ \overrightarrow{AC}(0, 0, 10)$, откъдето $S_{ABC} = 5$.

Задача 3. Относно ортонормирана координатна система в тримерното пространство са дадени точките $A(1, -1, 2)$, $B(2, 3, -1)$, $C(4, 3, -1)$, $D(2, 5, 5)$.

а) Докажете, че точките A, B, C и D не лежат в една равнина;

б) Намерете обема на тетраедъра $ABCD$;

в) Намерете уравнението на равнината β, съдържаща точките A, B и C;

г) Намерете разстоянието от точката D до равнината β.

Решение.
а) За да установим, че четирите точки не лежат в една равнина (не са компланарни), е достатъчно да покажем, че смесеното произведение на три насочени отсечки, образувани от тези точки, е различно от нула. Нека това са например насочените отсечки $\overrightarrow{AB}(1, 4, -3)$, $\overrightarrow{AC}(3, 4, -3)$ и $\overrightarrow{AD}(1, 6, 3)$. Взимайки предвид последната формула от (8), пресмятаме

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -60 \neq 0.$$

б) Съгласно втората формула от (10), обемът на тетраедъра $ABCD$ пресмятаме, както следва $V_{ABCD} = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}| = 10$.

в) За намирането на уравнението на равнината β използваме (22). Избираме една от трите дадени точки за фиксираната точка, която ще използваме за уравнението на равнината, например точката A. Освен това за съставянето на уравнението на β са ни необходими и два вектора, компланарни с равнината, например $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Тогава имаме

$$\beta : \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето след развиване на детерминантата следва общото уравнение на търсената равнина $\beta : 3y + 4z - 5 = 0$.

г) Можем да приложим формулата (25), съгласно която търсеното разстояние $d(D, \beta)$ се получава по следния начин

$$d(D, \beta) = \frac{|3.5 + 4.5 - 5|}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{30}{5} = 6.$$

Задача 4. Относно ортонормирана координатна система в тримерното пространство са дадени точката $A(1, 1, -2)$, равнината $\alpha : x - 2y + z - 9 = 0$ и правата $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$. Намерете:

а) ортогонално симетричната точка B на A относно равнината α;

б) ортогонално симетричната точка C на A относно правата l;

в) уравнението на сферата с център точката A, допираща се до равнината α.

Решение.

а) Построяваме правата p през точката A, перпендикулярна на α. Следователно направляващият вектор на тази права е колинеарен с нормалния вектор на равнината $\vec{N}_\alpha(1, -2, 1)$. Така получаваме

$$p : \left| \begin{array}{l} x = 1 + s \\ y = 1 - 2s \\ z = -2 + s. \end{array} \right.$$

Намираме координатите на пресечната точка (пробода) M на правата p и равнината α, решавайки системата от уравненията им

$$1 + s - 2(1 - 2s) - 2 + s - 9 = 0,$$

откъдето $s = 2$ и следователно $M(3, -3, 0)$.

Отчитаме, че точката M е средата на отсечката AB. Тогава $M = \frac{1}{2}(A + B)$, откъдето $B = 2M - A$. Окончателно намираме $B(5, -7, 2)$.

б) Построяваме равнината β през точката A, перпендикулярна на правата l, както следва $\beta : 2x + 3y + z - 3 = 0$. Намираме координатите на пресечната точка $N(2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ на l и β (за целта е удобно да използваме скаларно параметрично уравнение на правата, както в предната подточка). Отчитаме, че N е средата на отсечката AC и следователно $C = 2N - A$, т.е. $C(3, -2, 3)$.

в) Тъй като търсената сфера се допира до равнината α, за нейния радиус R е изпълнено $R = d(A, \alpha) = |\overrightarrow{AM}| = 2\sqrt{6}$. Тогава уравнението на тази сфера е

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24.$$