# Приложение на линейната алгебра в икономиката
# Модел на Леонтиев

През тридесетте години на двадесети век руският икономист *Василий Василевич Леонтиев* (1905–1999, http://en.wikipedia.org/wiki/Wassily_Leontief) започва изследването на междуотрасловата структура на американската икономика. Той създава математическа теория за междуотраслов баланс, като описва връзките между икономическите отрасли чрез система линейни уравнения. Леонтиев изследва икономическия ръст и взаимоотношенията между развитите и развиващите се страни, създавайки модел на световната икономика. За теорията си е отличен с Нобеловата награда за икономика през 1973г. Моделът на Леонтиев продължава да се използва за моделиране на национални икономики по целия свят, а също и за моделиране на световната икономика като цяло.

*Балансовият модел на Леонтиев* се нарича модел "разходи-приходи" (на англ. input-output model) и се разглежда в два варианта – затворен и отворен в зависимост от това дали разглежданата икономика произвежда продукция за само за задоволяване на производствените си нужди или и за крайни потребители. Освен това моделът може да бъде статичен или динамичен.

Ще разгледаме статичния отворен и затворен модел.

## 1. Отворен модел на Леонтиев

Националната икономика, която разглежда Леонтиев, е разделена на $n$ независими сектора (отрасли) $S_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$, всеки от които произвежда по един вид продукция $P_i$. Нека $x_i$ е общото (брутното) количество продукция $P_i$ (в натуралния модел, който ще разгледаме), произведено от отрасъла $S_i$ за единица време, например една година. Тогава векторът-стълб $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ задава общата продукция на разглежданата икономика за единица време. В стойностния модел $x_i$ е стойността на продукцията, произведена от сектора $S_i$.

Част от продукцията $x_i$ се изразходва в процеса на производство (за производствени нужди на отрасъла $P_i$ или на други отрасли), а останалата част остава като краен продукт, който трябва да задоволи нуждите на крайните потребители. Следователно можем да запишем

$$x_i = v_i + d_i, \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{1.1}$$

където $v_i$ е количеството продукция, която се изразходва в производствения процес, а $d_i$ е количеството крайна продукция (количеството необходимо за крайните потребители).

Ако означим $v = (v_1, v_2, ..., v_n)^T$, $d = (d_1, d_2, ..., d_n)^T$, равенството (1.1) има следния матричен запис

$$x = v + d.$$

Нека $w_{ij}$ е количеството продукция $P_i$, изразходвано за производството на единица количество от продукцията $P_j$ на отрасъла $S_j$. Тогава производствените разходи $v_i$ са сума на количествата от продукцията $P_i$, необходими за производство на единица количество от продукциите на останалите отрасли на икономиката, т. е.

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} = w_{i1} + w_{i2} + ... + w_{in}. \qquad (1.2)$$

Счита се, че за всяко $j = 1, 2, ..., n$ количествата $w_{ij}$ са пропорционални на количеството на общата продукция $x_j$ на отрасъла $S_j$. Следователно можем да запишем

$$w_{ij} = c_{ij} x_j. \qquad (1.3)$$

Константите $c_{ij}$ се наричат *коефициенти на преките разходи* от продукцията $P_i$ за производството на единица количество от продукцията $P_j$.

След заместване на (1.3) в (1.2) имаме

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j. \qquad (1.4)$$

А след заместване на (1.4) в (1.1) окончателно намираме

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + d_i, \qquad i = 1, 2, ...n. \qquad (1.5)$$

Последната съвкупност от $n$ на брой линейни уравнения за $n$ на брой неизвестни $x_i$ представлява математическо описание на отворения междуотраслов баланс на национална икономика и се нарича *математически модел на междуотрасловия баланс.*

Коефициентите $c_{ij}$ образуват матрица, която означаваме с $C$, т. е. $C = (c_{ij})$. Матрицата $C$ е квадратна матрица от $n$-ти ред и се нарича *матрица на преките разходи.* Уравненията (1.5) имат следния матричен запис

$$x = Cx + d \qquad (1.6)$$

или още

$$(E - C)x = d, \qquad (1.7)$$

където $E$ е единичната матрица от $n$-ти ред.

*Поставената задачата е следната: при известна матрица на преките разходи $C$ и вектор на крайната продукция $d$ да се намери векторът на общата продукция $x$.*

От равенството (1.7) за $x$ намираме

$$x = (E - C)^{-1} d, \tag{1.8}$$

където $(E - C)^{-1}$ е обратната матрица на матрицата $(E - C)$.

**Пример 1.1.** Нека разгледаме един пример, получен от стойностния модел на американската икономика, съставен от Леонтиев през 1947г. За улеснение 42та сектора, на които Леонтиев разделя тази икономика, са сведени само до 3 - *земеделие*, *промишленост* и *обслужващ сектор*. В Таблица 1 са дадени разходите на всеки сектор (в единица национална валута), необходими за производството на единица от собствената си продукция и за производството на единица от продукцията на всеки от останалите два сектора.

| **Сектор** | *Земеделие* | *Промишленост* | *Обслужващ сектор* |
|---|---|---|---|
| *Земеделие* | 0.245 | 0.102 | 0.051 |
| *Промишленост* | 0.099 | 0.291 | 0.279 |
| *Обслужващ сектор* | 0.433 | 0.372 | 0.011 |

Таблица 1

Нека количествата от продукцията на всеки сектор, необходими за крайния потребител да възлизат съответно на: 2.88 млрд. долара от земеделие, 31.45 млрд. долара от промишленост и 30.91 млрд. долара от обслужващия сектор.

Каква трябва да е стойността на общата продукция на всеки от трите сектора, за да бъде балансиран моделът?

*Решение.* Таблица 1 задава матрицата $C$ на преките разходи, т. е.

$$C = \begin{pmatrix} 0.245 & 0.102 & 0.051 \\ 0.099 & 0.291 & 0.279 \\ 0.433 & 0.372 & 0.011 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

А за вектора $d$ имаме

$$d = \begin{pmatrix} 2.88 \\ 31.45 \\ 30.91 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

За да намерим вектора $x$, съдържащ стойността на общата продукция, необходима за задоволяване на производствените нужди на икономиката $C$ и нуждите на крайния потребител $d$, използваме (1.8). Първо пресмятаме

$$(E - C)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.453 & 0.291 & 0.157 \\ 0.532 & 1.762 & 0.525 \\ 0.836 & 0.790 & 1.277 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Тогава

$$x = (E - C)^{-1} d \approx \begin{pmatrix} 18.21 \\ 73.17 \\ 66.75 \end{pmatrix}. \qquad (1.12)$$

И така за да бъде балансирана икономиката, земеделието трябва да произведе продукция на приблизителна стойност от 18.21 млрд. долара, промишлеността - $\approx 73.17$ млрд. долара и обслужващия сектор - $\approx 66.75$ млрд. долара.

## 2. Затворен модел на Леонтиев

Затвореният модел на Леонтиев, за разлика от отворения, разглежда икономика, чиито сектори произвеждат продукция само за задоволяване на производствените си нужди. В такъв случай не се произвежда продукция за крайни потребители, т. е. векторът $d$ е нулев и от (1.6) получаваме

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j, \qquad i = 1, 2, ..., n. \qquad (2.1)$$

В матричен запис моделът има вида

$$x = Cx, \qquad (2.2)$$

откъдето следва

$$(E - C)x = o. \qquad (2.3)$$

Системата (2.1) представлява система от $n$ на брой хомогенни линейни уравнения. Тъй като сумата от коефициентите $c_{ij}$ във всеки стълб на матрицата $C$ е равна на единица, то сумата от коефициентите във всеки стълб на матрицата $(E - C)$ е равна на нула и следователно рангът ѝ не е максимален ($\mathrm{rang}(E - C) < n$). В такъв случай $\det(E - C) = 0$. Следователно системата (2.1) е неопределена и има безброй много ненулеви решения.

## Литература


[1] Erik Dietzenbacher, Michael L. Lahr, *Wassily Leontief and Input-Output Economics*, Cambridge University Press, 2004, ISBN-10: 0521832381.

[2] Wassily Leontief, *Input-Output Economics*, Second Edition, Oxford University Press, 1986, ISBN: 0195035275.