Примерен изпитен вариант

Задача 1. Дадени са матриците:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Намерете:
а) детерминантата на A;
б) обратната матрица A^{-1} на матрицата A;
в) матричното произведение $A^{-1}B$.

Задача 2. Решете системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = -2 \\ x_1 - x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3. \end{array} \right.$$

Задача 3. Дадени са точките $A(6, 4)$, $B(-2, -4)$, $C(-2, 0)$. Намерете уравнението на правата AB, координатите на точка C' – ортогонално симетрична на C относно AB и лицето на $\triangle\, ABC$.

Задача 4. Дадени са точка $A(1, 1, -3)$, правата $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$ и равнината $\alpha : 2x - 2y + z - 3 = 0$.
Намерете:
а) уравнението на правата p, минаваща през точката A и перпендикулярна на равнината α и разстоянието от A до α;
б) уравнението на равнината β, съдържаща точката A и правата l;
в) координатите на т. A' – ортогонално симетрична на A относно l.

Решение

Задача 1. а) Използвайки правилото на триъгълниците или правилото на Сарус, пресмятаме детерминантата на A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 6 + 1 = -1.$$

Стойността на детерминантата е различна от нула, което е необходимо и достатъчно условие за съществуването на обратната матрица A^{-1}.
б) За намирането на A^{-1} можем да използваме метода на адюнгираните количества или този на Гаус-Жордан. По първия метод трябва да пресметнем адюнгираните количества A_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ на 9-те елемента на A, както следва:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

След това, замествайки във формулата за вида на A^{-1}, а именно

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

получаваме обратната матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нека отбележим, че адюнгираните количества на елементите от даден ред на A, разделени на стойността на детерминантата на A, формират съответния стълб на A^{-1}.
в) Чрез правилото за умножение на матрици ("ред по стълб") пресмятаме матричното произведение

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 10 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Нека отбележим, че матриците A^{-1} и B могат да бъдат умножение в този ред, защото броят на стълбовете на A^{-1} е равен на брой на редовете на B. Тяхното произведение има толкова реда, колкото са редовете на A^{-1} и толкова стълба, колкото стълба има B. Всъщност, две квадратни матрици от един и същи ред винаги могат да бъдат умножени (тук имаме две квадратни матрици от 3-ти ред).

Задача 2. Решаваме системата линейни уравнения по метода на Гаус. Разширената матрица, съответстваща на системата, е

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Чрез елементарни действия над редовете на $\bar{A}$ привеждаме тази матрица в трапецовидна форма, както следва

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{1}$$

Следователно системата е съвместима и неопределена. Рангът на системата е равен на $\mathrm{rg}\bar{A} = 2$. Тогава системата се решава чрез $4 - 2 = 2$ на брой реални параметри.

Последната матрица от (1) е еквивалентна на системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 1. \end{array} \right. \tag{2}$$

Полагайки $x_3 = p$ и $x_4 = q$ $(p, q \in \mathbb{R})$, от второто уравнение на (2) получаваме $x_2 = p + 2q + 1$, а след това от първото уравнение на (2) намираме $x_1 = p + q - 1$. Следователно решенията на системата имат вида $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (p + q - 1, p + 2q + 1, p, q)$.

Задача 3. Намираме уравнението на правата AB (например каноничното уравнение на тази права)

$$AB: \frac{x+2}{-2-6} = \frac{y+4}{-4-4} \quad \Longrightarrow \quad AB: \frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{1}.$$

Следователно $AB: \quad x - y - 2 = 0$.

За да намерим точката C', първо спускаме перпендикуляр от C към AB, т. е. построяваме права l през точката C, перпендикулярна на AB. Следователно нормалният вектор на l е колинеарен на вектора $\overrightarrow{AB}(-8, -8) \parallel (1, 1)$. Така получаваме уравнението на l в следния вид

$$l: \quad 1.(x+2) + 1.(y-0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad l: \quad x + y + 2 = 0.$$

След това намираме пресечната точка M на правите AB и l, като решаваме системата от уравненията на тези две прави

$$\left| \begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ x + y + 2 = 0. \end{array} \right.$$

Получаваме $M(0, -2)$. Сега отчитаме, че M е среда на отсечката CC'. Следователно $C' = 2M - C$, т. е. $C'(2, -4)$.

Лицето на $\triangle\, ABC$ пресмятаме по формулата

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}. \tag{3}$$

Имаме $\overrightarrow{AB}(-8, -8)$, $\overrightarrow{AC}(-8, -4)$. Допълваме тези вектори до наредени тройки, както следва $\overrightarrow{AB}(-8, -8, 0)$, $\overrightarrow{AC}(-8, -4, 0)$ и пресмятаме $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 0, -32)$. Тогава от (3) намираме $S_{\triangle ABC} = 16$.

Задача 4.

а) Тъй като търсената права p е перпендикулярна на равнината α, следва, че p е колинеарна на нормалния вектор на α, който е $\overrightarrow{N}_\alpha(2, -2, 1)$. Следователно каноничното уравнение на тази права е

$$l: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}.$$

Разстоянието $d(A, \alpha)$ от точка A до α пресмятаме по формулата за разстояние от точка до права, както следва

$$d(A, \alpha) = \frac{|2.1 - 2.1 + 1.(-3) - 3|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{3} = 2.$$

б) Равнината β съдържа точката $A(1,1,-3)$, направлението $\vec{l}(2,3,-1)$, колинеарно на правата l и всички точки от правата l, например точката $L(1,0,1)$. Построяваме равнината β, като равнина през точката L (или A) и компланарна на векторите $\vec{l}$ и $\overrightarrow{AL}(0,-1,4)$. Тогава

$$\beta: \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

След развиване на горната детерминанта получаваме общото уравнение на равнината β

$$\beta: \quad 11x - 8y - 2z - 9 = 0.$$

в) Първо построяваме равнина γ през т. A, която е перпендикулярна на правата l, т. е. направляващият вектор $\vec{l}(2,3,-1)$ на l е нормален вектор на γ. Уравнението на тази равнина е следното

$$\gamma: 2x + 3y - z - 8 = 0.$$

Сега търсим прободa M на правата l и равнината γ. За тази цел е по-удобно да използваме скаларно-параметричното уравнение на l, което има вида

$$l: \left| \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 - \lambda. \end{array} \right.$$

Координатите на т. M намираме като решение на системата от уравнението на правата l и равнината γ. Заместваме x, y, z от уравнението на l в уравнението на γ, откъдето за параметъра λ на правата l получаваме уравнението

$$14\lambda - 7 = 0.$$

Следователно $\lambda = \frac{1}{2}$ за точката M. Координатите на т. M пресмятаме от уравнението на правата l – $M\left(2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Тъй като т. M е среда на отсечката AA', то $A' = 2M - A$. Така окончателно намираме $A'(3,2,4)$.