10. Собствени стойности и собствени вектори

Ако искаш да бъдеш физик, трябва да направиш три неща – първо, учи математика, второ, учи още математика, и трето, прави същото.

Арнолд Зомерфелд

Определение 10.1. Нека A е квадратна матрица от n-ти ред, X е ненулев вектор от $\mathbb{K}^n$ и $\lambda \in \mathbb{K}$, за които е изпълнено равенството

$$AX = \lambda X. \tag{10.1}$$

Тогава λ се нарича *собствена стойност* на A, а X се нарича *собствен вектор* на A, съответстващ на собствената стойност λ.

Теорема 10.1. *Нека $A, E \in M_n(\mathbb{K})$. Тогава собствените стойности $\lambda_i \in \mathbb{K}$ на матрицата A са корени на уравнението*

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{10.2}$$

Забележка 10.1. Уравнение (10.2) се нарича *характеристично уравнение* на матрицата A, полиномът $\varphi(\lambda) = |A - \lambda E|$ – *характеристичен полином*, а собствените стойности – *характеристични корени.*

Определение 10.2. Множеството от всички собствени стойности (характеристични корени) на матрица A се нарича *спектър* на A.

Забележка 10.2. Ако всички характеристични корени на матрица A са прости, то казваме, че A има *прост спектър.*

Теорема 10.2. *Нека $A, E \in M_n(\mathbb{K})$. Тогава собствените вектори $X \in \mathbb{K}^n$ на A, съответстващи на собствената стойност λ, са ненулевите решения на системата хомогенни линейни уравнения*

$$(A - \lambda E)X = \mathbf{0}. \tag{10.3}$$

Забележка 10.3. Множеството от всички собствени вектори, съответстващи на дадена собствена стойност на $A \in M_n(\mathbb{K})$, заедно с нулевия вектор $\mathbf{0}$ образуват линейно пространство.

Определение 10.3. Матриците A и B от $M_n(\mathbb{K})$ се наричат *подобни*, ако съществува матрица $T \in M_n(\mathbb{K})$ такава, че $B = T^{-1}AT$.

Забележка 10.4. Множеството на подобните матрици е подмножество на множеството на еквивалентните матрици в $M_n(\mathbb{K})$, т.е. ако две матрици са подобни, то те са еквивалентни, но обратното невинаги е вярно.

Теорема 10.3. *Ако матриците A и B са подобни, то те притежават еднакви характеристични полиноми.*

Определение 10.4. Матрицата $A \in M_n(\mathbb{K})$ се нарича *диагонализируема*, ако е подобна на диагонална матрица.

Забележка 10.5. Ако $A \in M_n(\mathbb{K})$ е диагонализируема, то тя е подобна на диагонална матрица, чийто главен диагонал е образуван от собствените стойности на A.

Теорема 10.4. *Матрицата $A \in M_n(\mathbb{K})$ е диагонализируема, точно когато на всяка нейна собствена стойност λ_i с кратност k_i съответстват k_i на брой линейно независими собствени вектора.*

Забележка 10.6. Тъй като собствените вектори, съответстващи на различни собствени стойности, са линейно независими помежду си, то горното твърдение означава, че $A \in M_n(\mathbb{K})$ е диагонализируема, точно когато притежава n на брой линейно независими собствени вектора.

Теорема 10.5. *Ако матрицата $A \in M_n(\mathbb{R})$ има прост спектър от реални числа, то тя е диагонализируема.*

Определение 10.5. Матрицата $A \in M_n(\mathbb{R})$ се нарича *симетрична*, ако съвпада с транспонираната си матрица A^T.

Теорема 10.6. *Собствените стойности на симетрична матрица са реални числа.*

Теорема 10.7. *Всяка симетрична матрица може да се приведе в диагонален вид.*

Забележка 10.7. Ако $A \in M_n(\mathbb{R})$ е симетрична матрица, то собствените вектори, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални помежду си.

Задача 10.1. *Да се намерят собствените стойности и собствените вектори на матриците:*

а) $A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; *б)* $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

$$\textit{в)}\ \ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ \textit{г)}\ \ A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\textit{д)}\ \ A_5 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix};\ \textit{е)}\ \ A_6 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 2 \\ -8 & -3 & 4 \\ -9 & -3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\textit{ж)}\ \ A_7 = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix};\ \textit{з)}\ \ A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\textit{и)}\ \ A_9 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix};\ \textit{к)}\ \ A_{10} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\textit{л)}\ \ A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix};\ \textit{м)}\ \ A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. а) Съгласно Теорема 10.1, характеристичното уравнение на A_1 е

$$|A_1 - \lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

което е еквивалентно на $\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$. Следователно собствените стойности на A_1 са $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 5$.

Нека $X_1 = (x_1, y_1)$ е собствен вектор, съответстващ на $\lambda_1 = 4$. Тогава, съгласно Теорема 10.2, имаме

$$\begin{pmatrix} 6-4 & -1 \\ 2 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Горното матрично уравнение е еквивалентно на $2x_1 - y_1 = 0$, чието общо решение е $(p, 2p)$. Следователно $X_1 = (p, 2p)$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Аналогично, ако $X_2 = (x_2, y_2)$ е собствен вектор, съответстващ на $\lambda_2 = 5$, намираме $X_2 = (p, p)$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

в) Съгласно Теорема 10.1, характеристичното уравнение на A_3 е

$$|A_3 - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

което е еквивалентно на уравнението $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$. Решенията на това уравнение, т.е. собствените стойности на A_3, са $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Нека $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ е собствен вектор, съответстващ на $\lambda_1 = 1$. Тогава, съгласно Теорема 10.2, получаваме

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 1 & -1 \\ 1 & 1+1 & 1 \\ -1 & 1 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Това матрично уравнение е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + y_1 - z_1 = 0 \\ x_1 + 2y_1 + z_1 = 0 \\ -x_1 + y_1 + 2z_1 = 0 \end{array} \right. ,$$

която е неопределена и има общо решение $(p, -p, p)$. Следователно собствените вектори, съответстващи на тази собствена стойност, имат вида $X_1 = (p, -p, p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Аналогично, ако $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ е собствен вектор, съответстващ на собствената стойност $\lambda_{2,3} = 2$, то получаваме матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

от което получаваме $x_2 - y_2 + z_2 = 0$. Следователно $X_2 = (p, q, q-p)$, където $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Отговори. б) $\lambda_1 = 0$, $X_1 = (2p, p)$, $\lambda_2 = 5$, $X_2 = (p, -2p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

г) $\lambda_1 = -3$, $X_1 = (3p, p, -10p)$, $\lambda_2 = 2$, $X_2 = (2p, -p, 0)$, $\lambda_3 = 4$, $X_3 = (2p, 3p, -2p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

д) $\lambda_1 = 1$, $X_1 = (p, 2p, p)$, $\lambda_2 = 2$, $X_2 = (p, p, 0)$, $\lambda_3 = 3$, $X_3 = (p, 2p, 2p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

е) $\lambda_1 = -1$, $X_1 = (p, 2p, 3p)$, $\lambda_2 = -2$, $X_2 = (2p, 4p, 5p)$, $\lambda_3 = -3$, $X_3 = (3p, 5p, 6p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

ж) $\lambda_1 = 1$, $X_1 = (2p, p, p)$, $\lambda_2 = 2$, $X_2 = (p, p, 0)$, $\lambda_3 = 3$, $X_3 = (2p, p, 2p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

з) $\lambda_1 = -1$, $X_1 = (p, 0, -p)$, $\lambda_2 = 1$, $X_2 = (p, 2p, -p)$, $\lambda_3 = 2$, $X_3 = (p, -3p, 2p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

и) $\lambda_1 = 1$, $X_1 = (2p, -p, -p)$, $\lambda_2 = i$, $X_2 = \left(\frac{2i-1}{2}p, \frac{1-i}{2}p, p\right)$, $\lambda_3 = -i$, $X_3 = \left(-\frac{2i+1}{2}p, \frac{1+i}{2}p, p\right)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

к) $\lambda_1 = 3$, $X_1 = (9p, 4p, 3p)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $X_2 = (p, -4p, -p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

л) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$, $X_{1,2,3,4} = (q-p, q-p, p, q)$, където $p, q \in \mathbb{R}$, $(p,q) \neq (0,0)$;

м) $\lambda_1 = 0$, $X_1 = (0, p, 0, 0)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, $X_{2,3,4} = (p, 2q, q, 0)$, където $p, q \in \mathbb{R}$, $(p,q) \neq (0,0)$.

Задача 10.2. *Да се намерят диагонални матрици $B_4 - B_8$, подобни съответно на матриците $A_4 - A_8$ от Задача 10.1, и матрици T_i $(i = 4, \ldots, 8)$ такива, че $B_i = T_i^{-1} A_i T_i$.*

Решение. От Задача 10.1 знаем, че собствените стойности на A_4 са $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 4$, т.е. A_4 притежава прост спектър от реални числа. Тогава от Теорема 10.5 следва, че A_4 може да се диагонализира, а от Забележка 10.5 следва, че матрицата

$$B_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

е подобна на A_4.

От друга страна, тъй като $A_4 \in M_3(\mathbb{R})$ има прост спектър, то съществува база $\hat{e} \in \mathbb{R}^3$, която се състои от собствени вектори на A_4. Една тройка собствени вектори на A_4 са $(3, 1, -10)$, $(2, -1, 0)$ и $(2, 3, -2)$ (вж. Задача 10.1, отг. г) за $p = 1$). Това означава, че матрицата на прехода от стандартната база $e = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ на $\mathbb{R}^3$ към базата $\hat{e}$ е

$$T_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -10 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отговори.

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$