3. Детерминанти

> Във всяка наука истината е точно толкова, колкото е в нея математиката.
>
> *Имануел Кант*

Определение 3.1. Нека $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ е произволна *пермутация* (подредба) на числата $1, 2, \ldots, n$. Тогава числата α_i и α_j образуват *инверсия*, ако $\alpha_i > \alpha_j$ и α_i стои пред α_j. Броят на инверсиите в пермутацията $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ще означаваме с $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$.

Пример 3.1. $[1, 2, 3, 4] = 0$, $[2, 3, 1, 4] = 2$, $[4, 2, 3, 1] = 5$, $[3, 2, 1] = 3$, $[3, 1, 2] = 2$.

Определение 3.2. Алгебричната сума

$$\Delta_n = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \tag{3.1}$$

се нарича *детерминанта* от n-ти ред и ще означаваме с квадратната таблица

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение 3.3. Елементите $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуват *главния диагонал* на Δ_n, а елементите $a_{1n}, \ldots, a_{n1}$ образуват *втория диагонал* на Δ_n.

Пример 3.2. От Определение 3.2 получаваме:

а) детерминанта от втори ред

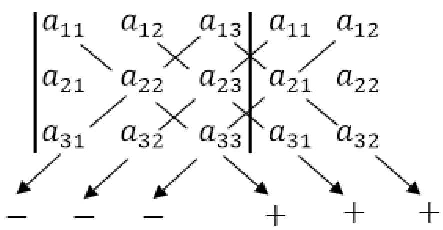
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \tag{3.2}$$

б) детерминанта от трети ред

$$\begin{aligned} \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

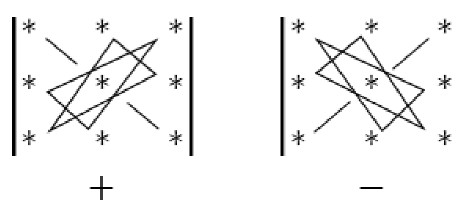
Правила за пресмятане на детерминанти от трети ред:

1) *Правило на Сарус.*[1] След детерминантата се преписват последователно първият и вторият ѝ стълб. Тогава събираемите, които участват със знак плюс в (3.3), са произведенията на елементите от главния диагонал и от двата диагонала, успоредни на него. Събираемите, които участват със знак минус в (3.3), са произведенията на елементите от втория диагонал и от двата диагонала, успоредни на него (Фигура 3.1).



Фигура 3.1. Правило на Сарус

2) *Правило на триъгълниците.* Съгласно това правило, събираемите, които участват със знак плюс в (3.3), са произведенията на елементите от главния диагонал и още две произведения, които се получават от елементите във върховете на двата триъгълника с основи, успоредни на главния диагонал. Събираемите, участващи със знак минус в (3.3), се получават по аналогичен начин от втория диагонал (Фигура 3.2).



Фигура 3.2. Правило на триъгълниците

[1]Пиер Фредерик Сарус (1798–1861) – френски математик.

Определение 3.4. Детерминантата Δ_{ij} от $(n-1)$-ви ред, получена от Δ_n чрез премахване на i-тия ред и j-тия стълб, се нарича *поддетерминанта* (*адюнгиран минор*) на елемента a_{ij}.

Определение 3.5. Детерминантата $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ се нарича *адюнгирано количество* на елемента a_{ij}.

Основни свойства на детерминантите:

(1) *Транспониране* на детерминанта се нарича преобразуване на детерминанта, при което се разменят местата на съответни редове и стълбове. Детерминантата, получена от Δ_n чрез транспониране, ще означаваме с Δ_n^T. Изпълнено е равенството $\Delta_n = \Delta_n^T$, което показва, че редовете и стълбовете на детерминантите са равноправни.

(2) Ако се разменят местата на два реда (стълба), то се получава детерминанта с противоположна стойност.

(3) Ако елементите на един ред (стълб) имат общ множител, той може да се изнесе като множител на детерминантата.

(4) Ако всички елементи на един ред (стълб) са равни на нула, то детерминантата е равна на нула.

(5) Ако съответните елементи на два реда (стълба) са пропорционални, то детерминантата е равна на нула.

(6) Ако към елементите на един ред (стълб) се прибавят съответните елементи на друг ред (стълб), умножени с произволно число, то детерминантата не променя стойността си.

(7) Ако всички елементи под (над) главния диагонал на една детерминанта са равни на нула, т.е. детерминантата е в *триъгълен вид*, то стойността ѝ е равна на произведението на елементите по главния диагонал.

(8) Сумата от произведенията на елементите на един ред (стълб) на дадена детерминанта със съответните адюнгирани количества на елементите на друг ред (стълб) е равна на нула.

(9) Пресмятането на детерминанта от n-ти ред може да се сведе до пресмятането на детерминанти от $(n-1)$-ви ред чрез формулата (*правило на Лаплас*[1])

$$\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \tag{3.4}$$

където A_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij}. Това представяне се нарича *развитие на детерминантата по i-тия ред*. Аналогично развитие може да се направи по всеки ред или стълб.

[1] Пиер-Симон Лаплас (1749–1827) – френски математик и астроном.

Задача 3.1 (Детерминанти от втори и трети ред). *Да се пресметнат детерминантите:*

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$; *в)* $\begin{vmatrix} a & 2 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$; *г)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; *е)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; *ж)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; *з)* $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -5 & 15 \end{vmatrix}$.

Решение. а) Като използваме Пример 3.2 а), получаваме

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 2(-1) = 5.$$

з) За пресмятането на детерминантата ще приложим свойство (3) към трети ред и след това правилото на Сарус:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -5 & 15 \end{vmatrix} &= 5.\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{matrix} \\ &= 5[1.4.3 + (-2)(-2)1 + 0 \\ &- (-2)3.3 - 1(-2)(-1) - 0] = 160. \end{aligned}$$

Отговори. б) 10; в) $9a + 6$; г) 16; д) 1; е) 9; ж) 0.

Задача 3.2 (Детерминанти от четвърти и по-висок ред). *Да се пресметнат детерминантите:*

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; *в)* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; *д)* $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -4 & -15 \end{vmatrix}$; *ж)* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. а) Ще решим задачата по три начина, в които ще използваме различни свойства на детерминантите.

Начин 1. При това решение ще използваме само свойство (9). Развивайки детерминантата по първи ред, от (3.4) получаваме

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} &= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 10 \\ 1 & 10 & 20 \end{vmatrix} \\
&+ 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 20 \end{vmatrix} - 1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \\
&= 4 - 6 + 4 + 1 = 3.
\end{aligned}$$

Начин 2. При това решение ще използваме последователно свойства (6), (9) и (3):

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 3 & 9 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 9 & 21 \end{vmatrix} \\
&= 3(35 + 22 + 30 - 25 - 28 - 33) \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Начин 3. При това решение ще използваме последователно свойства (6) и (7):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 3 & 9 & 21 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1.1.1.3 = 3.$$

Отговори. б) 21; в) 20; г) -86; д) -5; е) -120; ж) 84; з) 6.