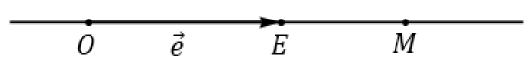
8. Вектори в координатни системи

> Навсякъде, както и в математиката, за даден проблем има много и различни решения.
>
> *Джон Наш*

8.1. Координатни системи.

Определение 8.1 (Едноосна КС). *КС върху права* се задава чрез точка O от правата и ненулев вектор $\vec{e}$, колинеарен с правата, и се означава с $K = O\vec{e}$. Точката O се нарича *координатно начало*. Векторът $\vec{e}$ е база на правата и се нарича *координатен вектор*. По този начин правата може да се разглежда като *координатна ос*, като положителната посока и единицата за дължина върху нея се определят съответно от посоката и дължината на вектора $\vec{e}$ (Фиг. 8.1).



Фигура 8.1. Едноосна координатна система

Определение 8.2. Ако $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$, то за произволна точка M от правата, определена от O и $\vec{e}$, е в сила

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OE} = x\vec{e}. \tag{8.1}$$

Числото $x \in \mathbb{R}$ се нарича *координата* на точката M относно $K = O\vec{e}$ и се записва $M(x)$.

Забележка 8.1. От Определение 8.2 се вижда, че $x > 0$, когато $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OE}$ са еднопосочно колинеарни и $x < 0$, когато $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OE}$ са разнопосочно колинеарни.

Съгласно (8.1), имаме $O(0)$ и $E(1)$ относно $K = O\vec{e}$.

Теорема 8.1. *Нека $M(x)$ и $N(y)$ относно K. Тогава единствената координата на насочената отсечка $\overrightarrow{MN}$ относно K е $y-x$, т.е.*

$$\overrightarrow{MN} = (y-x).$$

Определение 8.3 (Просто отношение на три точки върху права). Нека A, B и C са три различни точки от една права. Тогава коефициентът на колинеарност $\lambda \in \mathbb{R}$ между насочените отсечки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$, определен от равенството

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{BC}, \tag{8.2}$$

се нарича *просто отношение на точките* A, B и C, взети в този ред, и се означава с (ABC).

Забележка 8.2. От (8.2) следва, че $\lambda > 0$, ако $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ са еднопосочно колинеарни (точката C е външна за отсечката AB) и $\lambda < 0$, ако $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ са разнопосочно колинеарни (точката C е вътрешна за отсечката AB).

Теорема 8.2. *Нека $A(x)$, $B(y)$ и $C(z)$ лежат на една права. Тогава е в сила равенството*

$$(ABC) = \frac{z-x}{z-y} \qquad (y \neq z). \tag{8.3}$$

Забележка 8.3. Точката C е среда на отсечката AB, точно когато

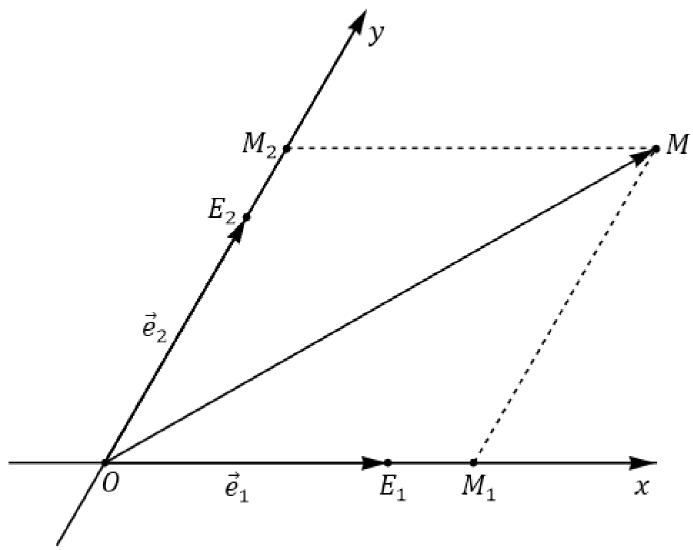
$$(ABC) = -1.$$

Определение 8.4 (Равнинна КС). *КС в равнина* се задача чрез точка O от равнината и база $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ на същата равнина и се означава с $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Точката O се нарича *координатно начало*, а векторите $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ се наричат *координатни вектори*. Точката O и векторът $\vec{e}_1$ определят първата координатна ос, наречена *абсцисна ос*, а O и $\vec{e}_2$ определят втората координатна ос, наречена *ординатна ос* (Фиг. 8.2).

Определение 8.5. Ако $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$ и $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$, то за произволна точка M от равнината, определена от O, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, е в сила

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OE_1} + y\overrightarrow{OE_2} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \tag{8.4}$$

където $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ са координатите на $\overrightarrow{OM}$ в базата $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Насочената отсечка $\overrightarrow{OM}$ се нарича *радиус-вектор* на точката M, а числата от наредената двойка (x,y) се наричат *координати* на точката M относно координатната система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и се означава $M(x,y)$. Числото x се нарича *абсциса* на M, а y – *ордината* на M.



Фигура 8.2. Равнинна координатна система

Забележка 8.4. Координатната система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ по традиция се означава с Oxy.

Определение 8.6. Точките M_1 и M_2 съответно от абсцисната и ординатната ос, определени от равенствата $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OE_2}$, се наричат *проекции* на точката M върху координатните оси.

Съгласно (8.4), $O(0,0)$, $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$, $M_1(x,0)$, $M_2(0,y)$.

Теорема 8.3. *Ако $M(x_1,y_1)$ и $N(x_2,y_2)$ относно $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$, то координатите на насочената отсечка $\overrightarrow{MN}$ се определят по правилото*

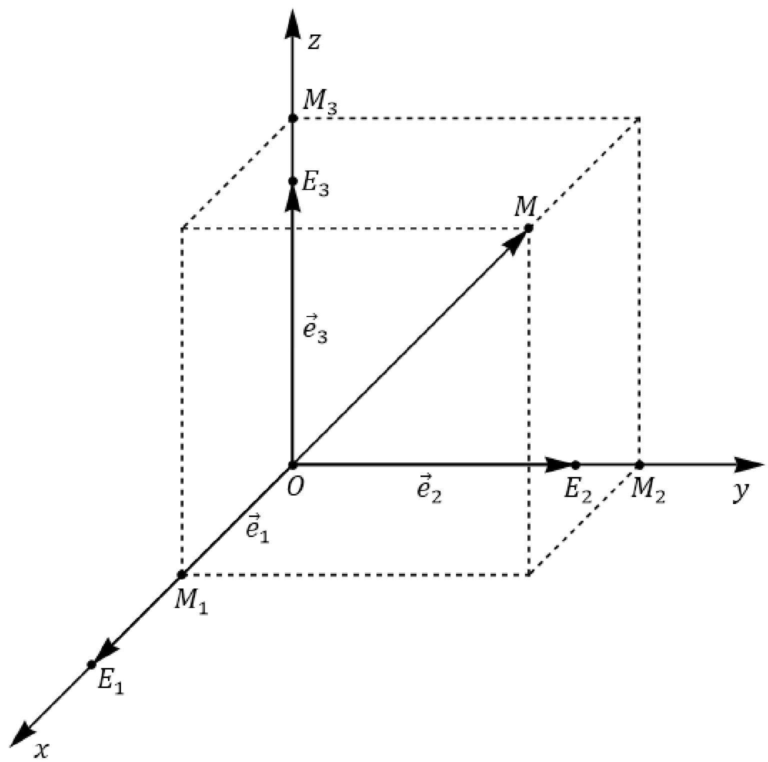
$$\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1). \tag{8.5}$$

Определение 8.7 (Пространствена КС). *КС в пространството* се задава чрез точка O и база $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ на пространството и се означава с $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Точката O и векторът $\vec{e}_1$ определят *абсцисната ос*, O и $\vec{e}_2$ определят *ординатнана ос*, а O и $\vec{e}_3$ определят *апликатната ос* (Фиг. 8.3).

Определение 8.8. Ако $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$ и $\overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3$, то за произволна точка M от пространството е изпълнено

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OE_1} + y\overrightarrow{OE_2} + z\overrightarrow{OE_3} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \tag{8.6}$$

където (x, y, z) са координатите на радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на M в базата $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Числата от наредената тройка (x, y, z) се наричат *координати* на точката M относно $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и се означава с $M(x, y, z)$. Числото x се нарича *абсциса* на M, y – *ордината* на M, а z – *апликата* на M.



Фигура 8.3. Пространствена координатна система

Забележка 8.5. Координатната система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ по традиция се означава с $Oxyz$.

Определение 8.9. Точките M_1, M_2 и M_3, определени от равенствата $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OE_2}$ и $\overrightarrow{OM_3} = z\overrightarrow{OE_3}$, се наричат *проекции* на точката M върху координатните оси.

Съгласно (8.6), $O(0, 0, 0)$, $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$, $E_3(0, 0, 1)$.

Теорема 8.4. *Ако $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$ относно $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, то координатите на насочената отсечка $\overrightarrow{MN}$ се определят по правилото*

$$\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{8.7}$$

Определение 8.10. В зависимост от дължините на координатните вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ и ъгъла, който те сключват, се разглеждат следните специални КС:

1) *ортогонална*, ако $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ са взаимно перпендикулярни;
2) *нормирана*, ако $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$.

Забележка 8.6. Ако една КС е едновременно ортогонална и нормирана, тя се нарича *ортонормирана* или *декартова.*

Определение 8.11. Пространствена координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ се нарича:

а) *дясно ориентирана* (*положително ориентирана*), ако за наблюдател, изправен по посоката на вектора $\vec{e}_3$, завъртането на вектора $\vec{e}_1$, докато стане еднопосочно колинеарен на $\vec{e}_2$, се извършва по посока, обратна на посоката на въртене на часовниковата стрелка, при ъгъл на въртене $\alpha \in (0, 180^\circ)$.

б) *ляво ориентирана* (*отрицателно ориентирана*), ако за наблюдател в същата позиция завъртането на $\vec{e}_1$ до еднопосочна колинеарност с $\vec{e}_2$ е по посока на часовниковата стрелка.

Забележка 8.7. Определянето на ориентацията на координатна система в равнината се извършва, като се определи посоката, в която трябва да бъде завъртян първият координатен вектор $\vec{e}_1$, докато стане еднопосочно колинеарен на втория вектор $\vec{e}_2$, при ъгъл на въртене $\alpha \in (0, 180^\circ)$. Ако тази посока е обратна на посоката на въртене на часовниковата стрелка, координатната система се нарича *дясно ориентирана.* Ако тази посока съвпада с посоката на въртене на часовниковата стрелка, координатната система се нарича *ляво ориентирана.*

Забележка 8.8. Най-удобна за използване е дясно ориентирана ортонормирана КС.

В следващите твърдения даваме някои често използвани формули в координатен вид.

Теорема 8.5. *Ако $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и точката M дели отсечката AB в отношение $AM : MB = m : n$, то*

$$M\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}, \frac{nz_1 + mz_2}{m+n}\right). \tag{8.8}$$

Следствие 8.1. *Ако $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и точката M е среда на отсечката AB, то*

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right). \tag{8.9}$$

Теорема 8.6. *Ако $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$ са върхове на триъгълник, то координатите на медицентъра G на $\triangle ABC$ се определят по правилото*

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right). \tag{8.10}$$

Задача 8.1. *Намерете координатите на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, ако:*

а) $A(1,2)$, $B(3,1)$;
б) $A(1,1,-1)$, $B(3,0,-1)$;
в) $A(2,-3,3)$, $B(0,-2,-2)$;
г) $A(-2,4,5)$, $B(3,-4,-8)$.

Решение. а) Съгласно (8.5) намираме $\overrightarrow{AB} = (3,1) - (1,2) = (2,-1)$.
б) Съгласно (8.7) пресмятаме

$$\overrightarrow{AB} = (3,0,-1) - (1,1,-1) = (2,-1,0).$$

Отговори. в) $\overrightarrow{AB} = (-2,1,-5)$; г) $\overrightarrow{AB} = (5,-8,-13)$.

Задача 8.2. *Намерете координатите на точката B, ако:*

а) $\overrightarrow{AB} = (3,5)$, $A(-3,7)$;
б) $\overrightarrow{AB} = (1,-3,5)$, $A(-5,6,2)$;
в) $\overrightarrow{AB} = (10,-5,0)$, $A(-3,6,7)$.

Решение. б) Нека $B(x,y,z)$. Тогава от (8.7) получаваме

$$\overrightarrow{AB} = (x+5, y-6, z-2).$$

Това означава, че

$$x+5=1, \quad y-6=-3 \quad \text{и} \quad z-2=5,$$

откъдето следва, че $B(-4,3,7)$.

Отговори. а) $B(0,12)$; в) $B(7,1,7)$.

Задача 8.3. *Намерете координатите на векторите $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, ако:*

а) $\vec{a} = (1,2)$, $\vec{b} = (-1,3)$;
б) $\vec{a} = (2,1,-1)$, $\vec{b} = (-1,0,2)$.

Решение. Съгласно правилата за извършване на линейни действия с наредени n-торки, пресмятаме: а) $\vec{m} = (1-1, 2+3) = (0,5)$, $\vec{n} = (1+1, 2-3) = (2,-1)$, $\vec{p} = (2-3, 4+9) = (-1,13)$.

Отговори. б) $\vec{m} = (1,1,1)$, $\vec{n} = (3,1,-3)$, $\vec{p} = (1,2,4)$.

Задача 8.4. *Намерете стойностите на реалния параметър λ, за които векторите $\vec{a} = (\lambda, 1 - \lambda)$ и $\vec{b} = (\lambda^2 - 2\lambda, \lambda^2 - 2\lambda + 1)$ са еднопосочно колинеарни.*

Решение. Ще намерим стойностите на λ, за които векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, и за всяка от тези стойност ще установим дали имаме еднопосочна или разнопосочна колинеарност. Търсените стойности на λ са онези, за които координатите на двата вектора са пропорционални, т.е. за които $\frac{\lambda^2-2\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda^2-2\lambda+1}{1-\lambda}$. Последното условие е еквивалентно на уравнението $\lambda(\lambda - 1)(2\lambda - 3) = 0$, чиито корени са $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = \frac{3}{2}$. За $\lambda = 0$ е изпълнено $\vec{a} = \vec{b} = (0, 1)$. Следователно за тази стойност на λ векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни. За $\lambda = 1$ и $\lambda = \frac{3}{2}$ получаваме съответно $\vec{a} = -\vec{b} = (1, 0)$ и $\vec{a} = -2\vec{b} = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, което показва, че в тези два случая векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са разнопосочно колинеарни. Следователно отговорът на задачата е $\lambda = 0$.

Задача 8.5. *Намерете стойностите на реалния параметър λ, за които векторите $\vec{a} = (\lambda, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, \lambda, 1)$ и $\vec{c} = (\lambda^2, 1, 1)$ са компланарни.*

Решение. Дадените вектори са компланарни, точно когато между координатите им има линейна зависимост. Съгласно свойствата на детерминантите, последното условие е изпълнено, точно когато

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Горното условие е еквивалентно на уравнението $\lambda(2\lambda - 1) = 0$, чиито решения са $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. За тези стойности на λ трите вектора са компланарни, като удовлетворяват съответно следните линейни комбинации $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} = 2(\vec{c} - \vec{b})$.

Задача 8.6. *Докажете, че точките A, B и C са колинеарни и намерете простото отношение (ABC), ако:*

а) $A(1, 2, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, 1, 0)$;
б) $A(3, 4, 2)$, $B(2, 6, -1)$, $C(1, 8, -4)$;
в) $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 3)$, $C(5, -2, 0)$.

Решение. а) Намираме координатите на насочените отсечки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$, както следва $\overrightarrow{AC} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, -1)$. Следователно $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$, откъдето следва, че точките A, B и C са колинеарни. Съгласно (8.2), имаме $(ABC) = -1$, т.е. C е средата на AB.

Отговори. б) $\overrightarrow{AC} = (-2, 4, -6)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, 2, -3)$, $(ABC) = 2$;
в) $\overrightarrow{AC} = (6, -2, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (9, -3, -3)$, $(ABC) = \frac{2}{3}$.

Задача 8.7. *Докажете, че точките A, B и C са върхове на триъгълник и намерете координатите на средата M на страната AB и медицентъра G на $\triangle\ ABC$, ако:*

а) $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, $C(0, 5)$;
б) $A(1, 2, 3)$, $B(3, 0, -1)$, $C(-4, 1, 4)$.

Решение. а) Намираме координатите на две насочени отсечки, съставени от точките A, B и C, например $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$ и $\overrightarrow{AC} = (-2, 4)$. По този начин установяваме, че координатите на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не са пропорционални и следователно трите точки не лежат върху една права, т.е. са върхове на триъгълник. Като използваме (8.9) и (8.10), пресмятаме съответно координатите на средата M на AB и медицентъра G на $\triangle\ ABC$, както следва:

$$M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (3, 2), \quad G\left(\frac{2+4}{3}, \frac{1+3+5}{3}\right) = (2, 3).$$

Отговори. б) $M(2, 1, 1)$, $G(0, 1, 2)$.

Задача 8.8. *Дадени са точките $A(-1, 3)$ и $B(2, 1)$. Намерете координатите на точките C и D от равнината такива, че фигурата $ABCD$ да бъде успоредник с диагонали AC и BD, успоредни съответно на координатните оси Ox и Oy.*

Решение. Нека $C(x, y)$ и $D(z, t)$. Съгласно условието, имаме

$$\overrightarrow{AC} = (x+1, y-3) \parallel Ox \parallel \vec{e}_1(1, 0) \text{ и } \overrightarrow{BD} = (z-2, t-1) \parallel Oy \parallel \vec{e}_2(0, 1).$$

Следователно координатите на $\overrightarrow{AC}$ и $\vec{e}_1$, както и на $\overrightarrow{BD}$ и $\vec{e}_2$ са пропорционални. Използвайки свойствата на пропорциите, получаваме $0(x+1) = 1(y-3)$ и $1(z-2) = 0(t-1)$, откъдето намираме $y = 3$, $z = 2$. Тъй като $ABCD$ е успоредник, то е изпълнено $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. От последното условие получаваме равенството $(3, -2) = (x-2, 3-t)$. Следователно $x = t = 5$. Така намерихме $C(5, 3)$ и $D(2, 5)$.

Задача 8.9. *Дадени са точките $A(1, -3, 2)$, $B(8, 0, 4)$, $C(4, 8, 3)$. Намерете точка D такава, че фигурата $ABCD$ да бъде успоредник и пресметнете координатите на пресечната точка на диагоналите му.*

Решение. Нека означим $D(x, y, z)$. За да бъде фигурата $ABCD$ успоредник, е необходимо и достатъчно $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (или $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$), като при това четирите точки не бива да бъдат колинеарни. Пресмятаме $\overrightarrow{AB} = (7, 3, 2)$ и $\overrightarrow{DC} = (4 - x, 8 - y, 3 - z)$. След приравняване на съответните координати на двете насочени отсечки намираме $D(-3, 5, 1)$. Тъй като $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC} = (3, 11, 1)$ не са колинеарни, то $ABCD$ е успоредник. Пресечната точка на диагоналите му P разполовява и двата диагонала. Координатите на $P(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ получаваме чрез (8.9).

Задача 8.10. *Определете взаимното положение на правите AB и CD в равнината и в случай че се пресичат, намерете координатите на пресечната им точка, ако:*

а) $A(3, -3)$, $B(-1, -1)$, $C(4, 0)$, $D(7, 2)$;
б) $A(1, 4)$, $B(3, 2)$, $C(3, -2)$, $D(5, -4)$;
в) $A(2, -1)$, $B(5, 0)$, $C(8, 1)$, $D(-1, -2)$.

Решение. Взаимното положение на правите AB и CD, лежащи в една равнина, определяме в зависимост от това дали насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са колинеарни или не. Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са неколинеарни, то правите се пресичат. Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са колинеарни, правите са успоредни или съвпадат. За да разграничим последните два случая, проверяваме дали точките A, B, C и D лежат върху една права.

а) Пресмятаме $\overrightarrow{AB} = (-4, 2)$ и $\overrightarrow{CD} = (3, 2)$. Тъй като двете насочени отсечки са неколинеарни, правите AB и CD се пресичат. Нека означим пресечната им точка с P. Понеже P лежи на AB, имаме $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава за радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$ на точка P е изпълнено

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} \\ &= (3, -3) + \lambda(-4, 2) = (3 - 4\lambda, 2\lambda - 3). \end{aligned} \tag{8.11}$$

Аналогично, тъй като P лежи на CD и следователно $\overrightarrow{CP} = \mu\overrightarrow{CD}$, $\mu \in \mathbb{R}$, имаме

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{CD} = (3\mu + 4, 2\mu). \tag{8.12}$$

Чрез приравняване на съответните координати в представянията (8.11) и (8.12) достигаме до системата уравнения

$$\left| \begin{aligned} 4\lambda + 3\mu &= -1 \\ 2\lambda - 2\mu &= 3, \end{aligned} \right.$$

чието решение е $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = -1$. Заместваме тези стойности съответно в (8.11) или (8.12) и окончателно получаваме $P(1, -2)$.