АЛГЕБРА

§1. Тъждествени преобразувания на рационални изрази

(1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
(2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$.
(3) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$.
(4) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 +$
$+2(a_1a_2 + \cdots + a_1a_n + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)$.
(5) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
(6) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
(7) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), n = 2, 3, 4, \ldots$.
(8) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
(9) $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + (-1)^k a^{n-k-1}b^k +$
$+ \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ при нечетно n.

При $n = 4$ и $n = 6$ съответно имаме:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (\sqrt{2}ab)^2 \\ &= (a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^6 + b^6 &= (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^2) \\ &= (a^2 + b^2)(a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 3a^2b^2) \\ &= (a^2 + b^2)[(a^2 + b^2)^2 - (\sqrt{3}ab)^2] \\ &= (a^2 + b^2)(a^2 + \sqrt{3}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{3}ab + b^2). \end{aligned}$$

1. Да се разложи на множители многочленът

$$A = ab^2 - ac^2 + bc^2 - ba^2 + ca^2 - cb^2.$$

2. (ВВУЗ – 1965) Ако a, b, c са произволни реални числа, да се докаже тъждеството

$$\begin{aligned} &(b - c)(1 + ab)(1 + ac) + (c - a)(1 + bc)(1 + ba) \\ &+(a - b)(1 + ca)(1 + cb) + (a - b)(a - c)(b - c) = 0. \end{aligned}$$

3. (ВВУЗ – 1954) Да се докаже тъждеството

$$\begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 \\ &= (bx - ay)^2 + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2. \end{aligned}$$

4. Да се докаже тъждеството

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x).$$

5. Да се докаже тъждеството

$$\frac{a-1}{a+1} + \frac{a^2-1}{a^2+1} - \frac{a^3-1}{a^3+1} = \frac{a-1}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a^2+1} \cdot \frac{a^3-1}{a^3+1}.$$

6. Да се докаже тъждеството

$$16p(p - a)(p - b)(p - c) = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4),$$

където $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

7. Да се опрости изразът

$$F = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

8. Да се представят симетричните изрази a^2+b^2, a^3+b^3, a^4+b^4 чрез основните симетрични изрази $a+b$ и ab.

9. Да се представят симетричните изрази $a^2+b^2+c^2$, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$, $a^4+b^4+c^4$ чрез основните симетрични изрази $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc.

10. Да се представи изразът $a^3+b^3+c^3$ чрез основните симетрични изрази $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc.

11. Да се намери начин за последователно изразяване на степенните сборове $S_n = a^n + b^n$ $(n = 2, 3, 4, \dots)$ чрез основните симетрични изрази $a+b$ и ab.

12. Да се намери начин за последователно изразяване на степенните сборове $S_n = a^n + b^n + c^n$ $(n = 2, 3, 4, \dots)$ чрез основните симетрични изрази $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc.

13. Да се докаже, че ако $a+b=1$, то

$$a^2b^2 + 3 = (a^2+a+1)(b^2+b+1).$$

14. Да се намери x^3+y^3, ако е известно, че $x+y=a$, $x^2+y^2=b$.

15. Да се докаже тъждеството

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} = 1,$$

ако $abc = 1$.

16. Да се докаже, че ако $a+b+c=0$, то

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

17. Да се докаже, че ако

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \quad a+b+c=1, \quad a^2+b^2+c^2=1,$$

то $xy+yz+zx=0$.

18. Да се докаже, че ако

$$x+y+z=a, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a},$$

то поне едно от числата x, y, z е равно на a.

19. Да се докаже тъждеството $\dfrac{bc}{a^2}+\dfrac{ca}{b^2}+\dfrac{ab}{c^2}=3$ при условие, че $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$.

20. Да се докаже, че ако $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$ и

$$A = \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0,$$

то и

$$B = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$$

РЕШЕНИЯ

1. Подреждаме израза A по степените на c:

$$A = (b-a)c^2 + (a^2-b^2)c + ab(b-a).$$

Като използваме (5), получаваме

$$A = (a-b)[-c^2 + (a+b)c - ab].$$

Подреждаме израза в средните скоби по степените на b:

$$A = (a-b)[(c-a)b + c(a-c)].$$

Окончателно получаваме

$$A = (a-b)(b-c)(c-a).$$

2. Имаме

$$\begin{aligned}
(b-c)(1+ab)(1+ac) &= (b-c)(1+ab+ac+a^2bc) \\
&= b-c+a(b^2-c^2)+a^2bc(b-c), (c-a)(1+bc)(1+ba) \\
&= c-a+b(c^2-a^2)+ab^2c(c-a), \\
(a-b)(1+ca)(1+cb) &= a-b+c(a^2-b^2)+abc^2(a-b).
\end{aligned}$$

Като съберем тези равенства, получаваме

$$\begin{aligned}
&(b-c)(1+ab)(1+ac)+(c-a)(1+bc)(1+ba)+(a-b)(1+ca)(1+cb) \\
&= a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)+abc(ab-ac+bc-ba+ca-cb) \\
&= a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2) = ab^2-ac^2+bc^2-ba^2+ca^2-cb^2.
\end{aligned}$$

От предишната задача знаем, че на същия израз е равно и произведението $(b-a)(b-c)(a-c)$, откъдето следва исканото тъждество.

3. Намираме последователно

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 \\
&= a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2 \\
&\quad -(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz) \\
&= (a^2y^2+b^2x^2-2abxy)+(a^2z^2+c^2x^2-2acxz) \\
&\quad +(b^2z^2+c^2y^2-2bcyz) = (bx-ay)^2+(az-cx)^2+(cy-bz)^2,
\end{aligned}$$

като използвахме (3) и (1).

4. Като вземем предвид (2) имаме последователно

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^3 &= [(x+y)+z]^3 = (x+y)^3+z^3+3(x+y)z(x+y+z) \\
&= x^3+y^3+3xy(x+y)+z^3+3(x+y)(zx+zy+z^2) \\
&= x^3+y^3+z^3+3(x+y)(xy+zx+zy+z^2) \\
&= x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x).
\end{aligned}$$

5. Ще преработим лявата страна, като се стремим да получим дясната. Имаме

$$\frac{a-1}{a+1}+\frac{a^2-1}{a^2+1}-\frac{a^3-1}{a^3+1}=(a-1).\left[\frac{1}{a+1}+\frac{a+1}{a^2+1}-\frac{a^2+a+1}{a^3+1}\right]$$
$$=(a-1).\left[\frac{a^2+1+(a+1)^2}{(a^2+1)(a+1)}-\frac{a^2+a+1}{a^3+1}\right]$$
$$=(a-1).\left[\frac{2(a^2+a+1)}{(a^2+1)(a+1)}-\frac{a^2+a+1}{a^3+1}\right]$$
$$=(a^3-1).\left[\frac{2}{(a+1)(a^2+1)}-\frac{1}{(a+1)(a^2-a+1)}\right]$$
$$=(a^3-1).\frac{2a^2-2a+2-a^2-1}{(a+1)(a^2+1)(a^2-a+1)}$$
$$=(a^3-1).\frac{a^2-2a+1}{(a^2+1)(a^3+1)}=\frac{(a-1)(a-1)(a+1)(a^3-1)}{(a+1)(a^2+1)(a^3+1)}$$
$$=\frac{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)}{(a+1)(a^2+1)(a^3+1)}.$$

6. Имаме
$$p-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{-a+b+c}{2}$$
и аналогично
$$p-b=\frac{a-b+c}{2},\quad p-c=\frac{a+b-c}{2}.$$
Тогава
$$16p(p-a)(p-b)(p-c)=16\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}$$
$$=[(b+c)+a].[(b+c)-a].[a-(b-c)].[a+(b-c)]=\left[(b+c)^2-a^2\right].\left[a^2-(b-c)^2\right]$$
$$=(b^2+c^2-a^2+2bc)(a^2-b^2-c^2+2bc)$$
$$=\left[2bc+(b^2+c^2-a^2)\right].\left[2bc-(b^2+c^2-a^2)\right]$$
$$=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=4b^2c^2-(b^4+c^4+a^4+2b^2c^2-2b^2a^2-2c^2a^2)$$
$$=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2.$$

7. След привеждане към общ знаменател получаваме
$$F=\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$
Числителят
$$A=a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)$$
ще разложим на множители по метода в зад.1. Имаме
$$A=(b-a)c^3+(a^3-b^3)c+ab^3-a^3b$$
$$=-(a-b)c^3+(a-b)(a^2+ab+b^2)c+ab(b^2-a^2)$$
$$=(a-b)\left[-c^3+a^2c+abc+b^2c-ab(a+b)\right]$$

$$= (a-b)\left[b^2(c-a)+b(ac-a^2)+c(a^2-c^2)\right]$$
$$= (a-b)\left[b^2(c-a)+ab(c-a)-c(c-a)(c+a)\right]$$
$$= (a-b)(c-a)(b^2+ab-c^2-ca)$$
$$= (a-b)(c-a)[a(b-c)+(b-c)(b+c)]$$
$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Тогава $F = a+b+c$.

8. Като изходим от (1) получаваме [виж (18)]

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab. \tag{A}$$

От (8), като вземем предвид (A), намираме [виж (19)]

$$a^3+b^3 = (a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right]. \tag{B}$$

За a^4+b^4, като вземем предвид (A), намираме

$$a^4+b^4 = (a^2)^2+(b^2)^2 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = \left[(a+b)^2-2ab\right]^2 - 2a^2b^2,$$

т.е. [виж (20)]

$$a^4+b^4 = (a+b)^4 - 4ab(a+b)^2 + 2(ab)^2. \tag{C}$$

9. От (3) получаваме

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca). \tag{A}$$ Но

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$$
$$= (ab+bc+ca)^2 - 2(ab^2c+bc^2a+bca^2),\quad \text{т.е.}$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c). \tag{B}$$

Като използваме (A) и (B), намираме

$$a^4+b^4+c^4 = (a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2$$
$$= (a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) =$$
$$= \left[(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)\right]^2 - 2(ab+bc+ca)^2 + 4abc(a+b+c),$$

т.е.

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= (a+b+c)^4 - 4(ab+bc+ca)(a+b+c)^2 \\ &\quad +2(ab+bc+ca)^2 + 4abc(a+b+c). \end{aligned} \tag{C}$$

10. От зад.4 имаме $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$. Но

$$(a+b)(b+c)(c+a) = a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc$$
$$= a^2b+b^2a+abc+a^2c+ac^2+abc+b^2c+bc^2+abc-abc$$
$$= ab(a+b+c)+ac(a+b+c)+bc(a+b+c)-abc$$
$$= (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc.$$

Тогава $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc$.

11. От тъждеството $\left(a^{n-1}+b^{n-1}\right)(a+b) = a^n + b^n + ab\left(a^{n-2}+b^{n-2}\right)$