Училищен курс по алгебра

Лекция 9.

Аритметична и геометрична прогресия

специалности: МИИТ, ИТМОМ, 3 курс

лектор: Марта Теофилова

Ако на всяко естествено число n съпоставим по определено правило (закон) едно реално число a_n, се казва, че е зададена **безкрайна числова редица** $a_1, a_2, ..., a_n, ...$.

Можем да кажем още, че a_n е функция на номера си n и да запишем $a_n = f(n)$, където $f(n)$ е правилото, чрез което се определя общият член a_n на тази числова редица и се записва $\{a_n\}$.

Числова редица, за която са зададени стойности на първия член или на първите няколко члена и всеки член на редицата от известно място нататък се изразява чрез краен брой членове с по-малки номера, се нарича **рекурентна числова редица**.

Пример. Една от най-известните числови редици – редицата на Фибоначи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... \tag{1}$$

се задава чрез

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3. \tag{2}$$

Числови редици – основни определения

Една числова редица се нарича **растяща (намаляваща),** ако всеки неин член (след първия) е по-голям (съотв. по-малък) от предходния.

Редицата $\{a_n\}$ се нарича **монотонна,** ако е растяща или намаляваща.

Редицата $\{a_n\}$ се нарича **ограничена отдолу,** ако съществува число A такова, че $a_n \geq A$ за всяко n.

Редицата $\{a_n\}$ се нарича **ограничена отгоре,** ако съществува число B такова, че $a_n \leq B$ за всяко n.

Редицата $\{a_n\}$ се нарича **ограничена,** ако съществуват числа A и B такива, че $A \leq a_n \leq B$ за всяко n.

Числови редици – пример

Намерете сумата S_n от първите n члена на редицата с общ член $a_n = n^2$ (Задача на Архимед).

От формулата

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

при $k = 1, 2, 3, ..., n$ получаваме равенствата

$$2^3 = 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1$$

$$3^3 = 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1$$

$$4^3 = 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3.n^2 + 3.n + 1.$$

Събираме почленно горните равенства и получаваме

$$(n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + \frac{3n(n+1)}{2} + n,$$

откъдето достигаме до

$$3S_n = (n+1)\left((n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right).$$

Следователно

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Аритметична прогресия

Една числова редица се нарича **аритметична прогресия,** ако всеки неин член, след първия, се получава от предходния чрез прибавяне на едно и също число. Това число се нарича **разлика** на прогресията и се означава с d $(d \neq 0)$.
С S_n се означава сумата на първите n члена на прогресията.

В сила са формулите:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}n \tag{3}$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}, \quad k = 2, 3, ..., n, ... \tag{4}$$

където a_1 и a_n са съответно първият и n-тият (общият) член на прогресията.

Да се намери една аритметична прогресия означава да се намерят a_1 и d.

Аритметична прогресия – примери

Намерете аритметична прогресия, за която сумата от първите три члена е 27, а сумата на квадратите им е 275.

По условие имаме

$$a_1 + a_2 + a_3 = 27, \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 275.$$

От $2a_2 = a_1 + a_3$ следва, че $3a_2 = 27$, откъдето $a_2 = 9$, $a_1 + a_3 = 18$. Тогава след заместване в горните равенства достигаме до

$$\left| \begin{aligned} & a_1 + a_3 = 18 \\ & a_1^2 + a_3^2 = 194. \end{aligned} \right.$$

Решениятана горната система са $a_1 = 4$, $a_3 = 14$ и $a_1 = 14$, $a_3 = 4$. Следователно получаваме следните две прогресии с разлика 5 (първата е растяща, втората намаляваща):

$$\div\ 4,\ 9,\ 14, \ldots \qquad \div\ 14,\ 9,\ 4, \ldots$$

Аритметична прогресия – примери

Намерете аритметична прогресия с първи член 1 и сума на първите пет члена, равна на $\frac{1}{4}$ от сумата на следващите пет член на прогресията.

Нека разгледаме първите 10 члена на прогресията. Тогава съгласно условието на задачата

$$S_5 = a_1 + \ldots + a_5 = \frac{1}{4}(a_6 + \ldots + a_{10}).$$

Тъй като

$$a_6 + \ldots + a_{10} = a_1 + \ldots + a_{10} - (a_1 + \ldots + a_5) = S_{10} - S_5,$$

то получаваме

$$S_5 = \frac{1}{4}(S_{10} - S_5) \quad \Leftrightarrow \quad S_{10} = 5S_5.$$

Имаме

$$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2}5 = \frac{2 + 4d}{2}5 = 5(2d + 1), \qquad S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2}10 = 5(9d + 2).$$

Замествайки горните равенства в $S_{10} = 5S_5$, получаваме $d = -3$.

Аритметична прогресия – примери

Дадена е аритметична прогресия с 20 члена. Сумата на членовете, стоящи на четни места, е 250, а сумата на членовете, стоящи на нечетни места, е 220. Намерете прогресията.

Нека означим членовете на дадената прогресия с $a_1, a_2, ..., a_{20}$ и нейната разликата с d.
Да разгледаме членовете на дадената прогресия, стоящи на нечетни позиции (10 на брой)

$$a_1,\ a_3,\ ...,\ a_{19}.$$

Те образуват аритметична прогресия с първи член a_1 и разлика $d' = 2d$. Следователно за сумата S'_{10} на първите 10 члена на тази прогресия имаме

$$S'_{10} = \frac{2a_1 + 9.2d}{2}10 = 10(a_1 + 9d) = 220 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 + 9d = 22.$$

Аритметична прогресия – примери

Да сега разгледаме членовете на дадената прогресия, стоящи на четни позиции (също 10 на брой)

$$a_2,\ a_4,\ \ldots,\ a_{20}.$$

Те образуват аритметична прогресия с първи член a_2 и разлика $d' = 2d$. Следователно за сумата S'_{10} на първите 10 члена на тази прогресия имаме

$$S'_{10} = \frac{2a_2 + 9.2d}{2}10 = 10(a_2 + 9d) = 250 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 + 9d = 25.$$

Така получихме

$$\left| \begin{array}{l} a_1 + 9d = 22 \\ a_2 + 9d = 25, \end{array} \right.$$

откъдето след отчитане на $a_2 = a_1 + d$ следва, че $d = 3$ и $a_1 = -5$.

Аритметична прогресия – примери

Намерете броя на равните членове в следните две аритметични прогресии:

$$\div\, 5,\ 8,\ 11,\ \ldots,\ a_{100}, \qquad \div\, 3,\ 7,\ 11,\ \ldots,\ b_{100}.$$

Първата прогресия има първи член $a_1 = 5$, разлика $d = 3$ и 100 члена ($n = 100$), а втората има първи член $b_1 = 3$, разлика $d' = 4$ и също 100 члена ($m = 100$). Тогава общите членове съответно a_n и b_m на двете прогресии се пресмятат съгласно формулите

$$a_n = 5 + 3(n-1), \qquad b_m = 3 + 4(m-1).$$

Търсим всички естествени стойности на n, m, по-малки или равни на 100, за които $a_n = b_m$. След заместване в последното условие и преобразуване достигаме до линейното диофантово уравнение

$$4m - 3n = 3,$$

откъдето получаваме

$$n = \frac{4m-3}{3} = m - 1 + \frac{m}{3}.$$

Аритметична прогресия – примери

Полагаме

$$t = \frac{m}{3}, \qquad t \in \mathbb{N},$$

откъдето

$$m = 3t, \qquad n = 4t - 1.$$

С горните формули (при t цяло число) се представят всички целочислени решения на полученото диофантово уравнение. Търсим най-голямата естествена стойност на t, за която

$$\left| \begin{array}{l} m = 3t \leq 100 \\ n = 4t - 1 \leq 100. \end{array} \right.$$

От второто уравнение се вижда, че тази стойност е $t = 25$.

Намерете стойностите на реалния параметър m, за които четирите различни корена на уравнението

$$(2m-1)x^4 - 2mx^2 + 1 = 0$$

образуват аритметична прогресия. Определете корените на това уравнение за намерените стойности на m.

Уравнението е биквадратно. С полагането $y = x^2 \geq 0$ се привежда в квадратното уравнение

$$(2m-1)y^2 - 2my + 1 = 0.$$

За да има даденото биквадратно уравнение 4 различни корена за x, трябва полученото квадратно уравнение да има два различни положителин корена за y. Нека ги означим с y_1 и y_2. Разглеждаме уравнението при $2m-1 \neq 0$, т.е. при $m \neq \frac{1}{2}$.
В тази задача се вижда, че можем да работим директно с корените (без да ползваме формулите на Виет за определяне на знаците на корените), тъй като дискриминантата е точен квадрат $D = m^2 - (2m-1) = (m-1)^2 \geq 0$.

Тогава за корените получаваме

$$y_{1,2} = \frac{m \pm (m-1)}{2m-1} \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{1}{2m-1}.$$

Тогава двата корена за y са различни и положителни, точно когато

$$\left| \begin{array}{lcl} \frac{1}{2m-1} \neq 1 & \Leftrightarrow & m \neq 1 \\ \frac{1}{2m-1} > 0 & \Leftrightarrow & m > \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

В такъв случай решенията за x се получават от $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}$ и $x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$. Следователно корените на даденото биквадратно уравнение образуват аритметична прогресия, точно когато следните числа образуват такава прогресия (за растяща прогресия, в обратен ред за намаляваща)

$$\div \; -\sqrt{y_2}, \quad -\sqrt{y_1}, \quad \sqrt{y_1}, \quad \sqrt{y_2},$$

ако $y_1 < y_2$.

Горните четири числа образуват аритметична прогресия, точно когато

$$\sqrt{y_2} = 3\sqrt{y_1} \quad \Leftrightarrow \quad y_2 = 9y_1.$$

Тогава имаме следните 2 възможности:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{1}{2m-1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2m-1} = 9,$$

откъдето $m = \frac{5}{9}$ и

$$y_1 = \frac{1}{2m-1}, \quad y_2 = 1 \quad \text{и} \quad \frac{9}{2m-1} = 1,$$

откъдето $m = 5$.

При $m = \frac{5}{9}$ корените са $y_1 = 1$, $y_2 = 9$, откъдето $x_{1,2} = \pm 1$ и $x_{3,4} = \pm 3$ и прогресията е

$$\div -3, \ -1, \ 1, \ 3, \quad \text{или} \quad \div \ 3, \ 1, \ -1, \ -3.$$

При $m = 5$ корените са $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{9}$, откъдето $x_{1,2} = \pm 1$ и $x_{3,4} = \pm\frac{1}{3}$ и прогресията е

$$\div -1, \ -\frac{1}{3}, \ \frac{1}{3}, \ 1, \quad \text{или} \quad \div \ 1, \ \frac{1}{3}, \ -\frac{1}{3}, \ -1.$$

Геометрична прогресия

Една числова редица се нарича **геометрична прогресия,** ако всеки неин член, след първия, се получава, като предходният се умножи с едно и също число. Това число се нарича **частно** на прогресията и се означава с q $(q \neq 1)$.

Изпълнени са следните свойства:

$$a_n = a_1.q^{n-1}, \qquad S_n = \frac{a_1 + a_n q}{1-q} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \tag{5}$$

$$a_k = \sqrt{a_{k-1}.a_{k+1}} \quad \Leftrightarrow \quad a_k^2 = a_{k-1}.a_{k+1}, \qquad k = 2, 3, ..., n, ... \tag{6}$$

Ако частното $q > 1$, то геометричната прогресия е растяща. Ако $0 < q < 1$, то прогресията е намаляваща.

Намерете три числа, които образуват геометрична прогресия, ако сумата им е 12, а сумата от реципрочните им стойности е $\frac{7}{12}$.

Нека неизвестните числа са a_1, a_2, a_3 и образуват геометрична прогресия с частно q. Тогава съгласно условието имаме

$$\left| \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 21 \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{7}{12}. \end{array} \right. \tag{7}$$

В лявата страна на първото е сумата на първите три члена на прогресията, следователно

$$a_1 + a_2 + a_3 = S_3 = a_1 \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 21. \tag{8}$$

Нека да съобразим, че ако ненулевите числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ образуват геометрична прогресия с първи член a_1 и частно q, то редицата от съответните им реципрочни стойности

$$\frac{1}{a_1}, \ \frac{1}{a_2}, \ ..., \ \frac{1}{a_n}, ...$$

поради

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 q^{n-1}} = \frac{1}{a_1}.\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

е също геометрична прогресия с първи член $\frac{1}{a_1}$ и частно $\frac{1}{q}$.

Тогава във второто условие от системата участва сумата S_3' на първите три члена на тази прогресия. Имаме

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = S_3' = \frac{1}{a_1} \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^3 - 1}{\left(\frac{1}{q}\right) - 1} = \frac{1}{a_1} \frac{q^3 - 1}{(q-1)q^2} = \frac{7}{12}. \tag{9}$$

Като комбинираме (8) и (9), получаваме

$$\frac{21}{(a_1 q)^2} = \frac{7}{12} \quad \Leftrightarrow \quad (a_1 q)^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = a_1 q = \pm 6.$$

Геометрична прогресия – примери

При $a_2 = a_1 q = 6$ от (7) получаваме

$$\left| \begin{aligned} a_1 + a_3 &= 15 \\ a_1 a_3 &= 36 \end{aligned} \right.$$

с решения $a_1 = 3$, $a_3 = 12$ и $a_1 = 12$, $a_3 = 3$. Тогава търсените три числа са 3, 6, 12.

При $a_2 = a_1 q = -6$ от (7) получаваме

$$\left| \begin{aligned} a_1 + a_3 &= 27 \\ a_1 a_3 &= 36 \end{aligned} \right.$$

с решения $\frac{27 \pm 3\sqrt{65}}{2}$ и търсените три числа са $\frac{27 \pm 3\sqrt{65}}{2}$ и -6.

Произведението на първите пет члена на растяща геометрична прогресия е равно на 32, а сборът на кубовете на първите три члена е $\frac{73}{8}$. Намерете първите три члена на прогресията.

Нека означим членовете на прогресията с $a_1, a_2, ..., a_5, ...$, а частното с q. От първото условие имаме

$$a_1.a_2.a_3.a_4.a_5 = a_1^2 q^{10} = (a_1 q^2)^5 = 32 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 q^2 = a_3 = 2.$$

Заместваме във второто условие и получаваме

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = \frac{73}{8} \quad \Leftrightarrow \quad a_1^3 + a_2^3 = \frac{9}{8} \quad \Leftrightarrow \quad a_1^3(1+q^3) = \frac{9}{8}.$$

Така достигаме до системата

$$\left| \begin{array}{l} a_1 q^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{2}{q^2} \\ a_1^3(1+q^3) = \frac{9}{8}, \end{array} \right.$$

откъдето

$$\frac{8}{q^6}(1+q^3) = \frac{9}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 9q^6 - 64q^3 - 64 = 0.$$

В последното уравнение полагаме $t = q^3$ и достигаме до квадратното уравнение

$$9t^2 - 64t - 64 = 0$$

с корени $t_1 = 8$ и $t_2 = -\frac{8}{9}$.
От $t_1 = 8$ получаваме $q = 2$, а от $t_2 = -\frac{8}{9}$ получаваме $q = -\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$. Тъй като търсената геометрична прогресия е растяща, то $q = 2$ е единственото решение.
Следователно $a_1 = \frac{1}{2}$, откъдето $a_2 = 1$.
Търсените първи три члена на прогресията са $\frac{1}{2}$, 1 и 2.

Намерете корените на уравнението $x^3 + 7x^2 + 14x + m = 0$, където $m \in \mathbb{R}$, ако корените му са различни и образуват геометрична прогресия.

Нека първо изведем формулите на Виет за уравнение от трета степен

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad a \neq 0$$

с корени x_1, x_2, x_3. Тъй като е в сила разлагането

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \tag{10}$$

и след разписване дясната страна на горното равенство приема вида

$$\begin{aligned} &a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3, \end{aligned}$$

то като сравним коефициентите пред еднаквите степен на x от двете страни на (10), достигаме до равенствата

Геометрична прогресия – примери

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}. \end{array} \right. \tag{11}$$

Формулите (11) се наричат формули на Виет за уравнение от трета степен. Прилагайки тези формули за даденото уравнение, имаме

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -7 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 14 \\ x_1x_2x_3 = -m. \end{array} \right. \tag{12}$$

Тъй като корените x_1, x_2, x_3 са последователни членове на геометрична прогресия и ако означим частното на прогресията с q, то имаме: $x_2 = x_1q$ и $x_3 = x_1q^2$. Тогава системата (12) приема вида

Геометрична прогресия – примери

$$\left|\begin{aligned} & x_1(1+q+q^2) = -7 \\ & x_1^2 q(1+q+q^2) = 14 \\ & (x_1 q)^3 = -m. \end{aligned}\right. \qquad (13)$$

От първото и второто уравнение получаваме $x_1 q = -2$. Следователно $m = 8$. Така даденото уравнение приема вида

$$x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$$

и един от корените му е $x_2 = x_1 q = -2$. Следователно чрез схема на Хорнер за $x = -2$ намираме разлагането

$$(x+2)(x^2 + 5x + 4) = 0,$$

откъдето останалите два корена са -1 и -4.
Отговор: -1, -2, -4.

Безкрайна намаляваща геометрична прогресия

Нека $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е безкрайна геометрична прогресия и

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad S_n = a_1 + ... + a_n, \ ...$$

Числата S_1, S_2,..., S_n се наричат съответно първа, втора, n-та **частична сума** на прогресията.

Ако частното на прогресията $|q| < 1$, то редицата $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ от частичните суми е сходяща и има граница

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Безкрайна намаляваща геометрична прогресия – примери

Сумата на първите три члена на една безкрайно намаляваща геометрична прогресия е 21, а сумата от всички нейни членове е 24. Намерете сумата на квадратите на членовете на прогресията.

Съгласно условието на задачата имаме

$$\left| \begin{array}{l} S_3 = a_1 \frac{1-q^3}{1-q} = 21 \\ S = \frac{a_1}{1-q} = 24, \end{array} \right.$$

откъдето получаваме

$$24(1-q^3) = 21 \quad \Leftrightarrow \quad 8q^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 12.$$

Ако членовете на дадената безкрайна намаляваща прогресия са $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, то редицата от квадратите им е също геометрична прогресия

$$a_1^2, \quad a_2^2 = a_1^2 q^2, \quad a_3^2 = a_1^2 q^4, ...,$$

Безкрайна намаляваща геометрична прогресия – примери

с първи член a_1^2 и частно $q' = q^2$, която също е безкрайна намаляваща геометрична прогресия, тъй като от $0 < q < 1$ следва $0 < q^2 < 1$.

Тогава нейната сума е

$$S' = \frac{a_1^2}{1 - q^2} = \frac{144}{1 - \frac{1}{4}} = 192.$$

Литература

- Рангелова, П., Сборник по математика 9. – 12. клас с методични указания, Макрос, Пловдив, 2006.
- Веселаго И.А., Алгебра для школьников и абитуриентов, ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- Золотарева Н.Д., Попов Ю.А., Сазонов В.В., Алгебра – базовый курс с решениями и указаниями, БИНОМ, Москва, 2015.
- Золотарева Н.Д., Попов Ю.А., Семендяева Н.Л., Федотов М.В., Алгебра – углубленный курс с решениями и указаниями, 2011.
- Киселёв, А.П., Алгебра, ч. I, ч. II, Физматлит, 2006.
- Лурье М.В., Алгебра – техника решения задач, 2005.
- Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., Алгебрический тренажер, ИЛЕК-СА, Москва, 2007.
- Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И., Уравнения и неравенства. нестандартные методы решения: справочник.
- Шестаков С.А., Уравнения и системы уравнений, Изд. МЦНМО, Москва, 2018.
- Шестаков С.А., Неравенства и системы неравенств, Изд. МЦНМО, Москва, 2018.