Системи уравнения - примери

1. Системи уравнения от втора степен с две неизвестни.
Системи уравнения от трета и по-висока степен

Решаване чрез заместване

1) $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{x-1} - \dfrac{x-y}{2y} = 2 \\ x-y=4 \Rightarrow x=y+4 \end{cases}$ Д.О. $x \neq 1,\ y \neq 0$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2y(3x+y)-(x-1)(x-y)=4y(x-1) \\ x=y+4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 6xy+2y^2-x^2+xy+x-y=4xy-4y \\ x=y+4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2y^2-x^2+3xy+x+3y=0 \\ x=y+4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2y^2-(y+4)^2+3y(y+4)+y+4+3y=0 \\ x=y+4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2y^2-y^2-8y-16+3y^2+12y+4y+4=0 \\ x=y+4 \end{cases}$

$\begin{cases} 4y^2+8y-12=0 \Leftrightarrow y^2+2y-3=0 \Leftrightarrow (y+3)(y-1)=0 \\ x=y+4 \end{cases}$

$y=-3 \Rightarrow x=1 \notin$ Д.О. или $\underline{y=1 \Rightarrow x=5}$

Отг. $(5,1)$

2) $\begin{cases} x + y^2 = 2 \\ 2y^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2 - x \\ 2y^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2 - x \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1.$

Отг. $(1,1)$ и $(1,-1)$

3) $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1} - \dfrac{5}{y+1} = 1 \\ \dfrac{4}{x+5} = \dfrac{2}{y} \end{cases}$ Д.О. $x \neq -5, 1$; $y \neq -1, 0$

$\begin{cases} 4(y+1) - 5(x-1) = (x-1)(y+1) \\ 4y = 2(x+5) \Leftrightarrow 2y = x + 5 \Leftrightarrow x = 2y - 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 4y + 4 - 5x + 5 = xy + x - y - 1 \\ x = 2y - 5 \end{cases}$

$\begin{cases} xy + 6x - 5y - 10 = 0 \\ x = 2y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(2y-5) + 6(2y-5) - 5y - 10 = 0 \\ x = 2y - 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 2y^2 - 5y + 12y - 30 - 5y - 10 = 0 \\ x = 2y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 2y - 40 = 0 \\ x = 2y - 5 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + y - 20 = 0 \\ x = 2y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+5)(y-4) = 0 \\ x = 2y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$y = -5 \Rightarrow x = -15$, $y = 4 \Rightarrow x = 3$

Отг. $(-15, -5)$ и $(3, 4)$.

4) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^3 y^3 = -8 \Leftrightarrow y^3 = -\dfrac{8}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - \dfrac{8}{x^3} = 7 \\ y^3 = -\dfrac{8}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow$

Очевидно $x = 0$ не е реш.

$\begin{cases} x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \\ y^3 = -\dfrac{8}{x^3} \end{cases}$ В първото уравнение полагаме $t = x^3 \Rightarrow t^2 - 7t - 8 = 0$

$(t-8)(t+1)=0 \Rightarrow t=8$ или $t=-1 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2$

$x^3=-1 \Rightarrow x=-1$

$\Rightarrow y^3=-\frac{8}{x^3}=-\frac{8}{8}=-1 \Rightarrow y=-1$ или $y^3=+\frac{8}{1}=8 \Rightarrow y=2$

$\Rightarrow$ Отг. $(2,-1)$ и $(-1,2)$.

5) $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=9 \\ y=\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+\frac{8}{x^3}=9 \\ y=\frac{2}{x} \end{cases}$

Първото уравнение е $x^6-9x^3+8=0$, полагаме $t=x^3$

$\Rightarrow t^2-9t+8=0 \Leftrightarrow (t-8)(t-1)=0 \Leftrightarrow t=8,\ t=1$

$\Rightarrow$ От $t=8 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=1$. Отг. $(2,1)$ и $(1,2)$

От $t=1 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=2$

6) $\begin{cases} x^4+y^4=82 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+y^4=82 \\ y=\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+\frac{81}{x^4}=82 \\ y=\frac{3}{x} \end{cases}$

Първото уравнение е $x^8-82x^4+81=0$. Полагаме $t=x^4\geq 0 \Rightarrow t^2-82t+81=0 \Leftrightarrow (t-81)(t-1)=0 \Leftrightarrow$ $t=81$ и $t=1$. От $t=81 \Rightarrow x^4=81 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$, откъдето $y=\pm 1$. От $t=1 \Rightarrow x^4=1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$, откъдето $y=\pm 3$.

Отговор: $(1,3)$, $(-1,-3)$, $(3,1)$, $(-3,-1)$.

Решаване чрез преобразуване, разлагане, събиране

7) $\begin{cases} 4x^2+y^2-2xy=7 \\ (2x-y)y=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+y^2-4xy+2xy=7 \\ (2x-y)y=y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (2x-y)^2=7-2xy \\ (2x-y)y=y \end{cases} \Rightarrow y=0$ удовлетворява второто уравнение $\Rightarrow$ от първото намираме $4x^2=7 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$. Трябва остава да решим

$\begin{cases} (2x-y)^2=7-2xy \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy=6 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=3 \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(2x-1)x=3\\ y=2x-1\end{cases} \Leftrightarrow 2x^2-x-3=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)=0 \Rightarrow$$

$x=\frac{3}{2} \Rightarrow y=2$, $x=-1 \Rightarrow y=-3$

Отг. $\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 2\right), (-1,-3)$

8) $$\begin{cases}x^2+y^2=2(xy+2)\\ x+y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2xy=4\\ x+y=6\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-y)^2=4\\ x+y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=\pm 2\\ x+y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=2\\ x+y=6\end{cases} \cup \begin{cases}x-y=-2\\ x+y=6\end{cases}$$

$(4,2)$ и $(2,4)$

9) $$\begin{cases}x^3-y^3=19(x-y)\\ x^3+y^3=7(x+y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2)=19(x-y)\\ (x+y)(x^2-xy+y^2)=7(x+y)\end{cases}$$

$x-y=0 \Leftrightarrow x=y$ е решение на първото уравнение $\Rightarrow$ заместваме във второто и получаваме $2x \cdot x^2=7.2x \Rightarrow$
$x^3-7x=0 \Leftrightarrow x(x^2-7)=0 \Rightarrow x=0$, $x=\pm\sqrt{7} \Rightarrow$
решения са $(0,0)$, $(\sqrt{7},\sqrt{7})$ и $(-\sqrt{7},-\sqrt{7})$.

$x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$ е решение на второто уравнение $\Rightarrow$ заместване в първото уравнение $\Rightarrow 2x.x^2=19.2x \Leftrightarrow$
$x^3-19x=0 \Leftrightarrow x(x^2-19)=0 \Rightarrow x=0$, $x=\pm\sqrt{19} \Rightarrow$
решения са $(0,0)$, $(\sqrt{19},-\sqrt{19})$ и $(-\sqrt{19},\sqrt{19})$.

Остава да решим

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=19\\ x^2-xy+y^2=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+2y^2=26\\ 2xy=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=13\\ xy=6\end{cases}$$

от второто уравнение $y=\frac{6}{x} \Rightarrow$ в първото получаваме и

$x^2+\frac{36}{x^2}=13 \Leftrightarrow x^4-13x^2+36=0 \Leftrightarrow (x^2-9)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2=9\\ \text{или}\\ x^2=4\end{array}\right.$

$x=\pm 3 \Rightarrow y=\pm 2$ и $x=\pm 2 \Rightarrow y=\pm 3$.

Отговори: $(0,0)$, $(\sqrt{7},\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7},-\sqrt{7})$, $(\sqrt{19},-\sqrt{19})$, $(-\sqrt{19},\sqrt{19})$
$(3,2)$, $(-3,-2)$, $(2,3)$, $(-2,-3)$.

10) $\begin{cases} x^2+xy=15 \\ y^2+xy=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2xy+y^2=25 \\ x^2-y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=25 \\ (x-y)(x+y)=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\pm 5 \\ (x-y)(x+y)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ (x-y)(x+y)=5 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y=-5 \\ (x-y)(x+y)=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{(3,2) \text{ и } (-3,-2)}$

11) $\left.\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ 2x^2-y^2+2x-y=4 \end{cases}\right]+ \Rightarrow 3x^2+3x=6 \Rightarrow x^2+x-2=0$
$(x+2)(x-1)=0 \Rightarrow$

$\begin{cases} x=-2 \\ x^2+y^2+x+y=2 \end{cases} \cup \begin{cases} x=1 \\ x^2+y^2+x+y=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-2 \\ y(y+1)=0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow y=0 \\ \searrow y=-1 \end{matrix} \cup \begin{cases} x=1 \\ y(y+1)=0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow y=0 \\ \searrow y=-1 \end{matrix} \Leftrightarrow$

$\underline{(-2,0),\ (-2,-1) \text{ и } (1,0),\ (1,-1).}$

12) $\begin{cases} x^2-x+1=y \\ y^2-y+1=x \quad \mid .(-1) \end{cases} \Rightarrow x^2-y^2-x+y=y-x \Leftrightarrow$

$(x-y)(x+y)=0 \begin{matrix} \nearrow x=y \\ \searrow y=-x \end{matrix}$

Връщаме се в първото уравнение. От $x=y \Rightarrow x^2-2x+1=0$ $\Rightarrow (x-1)^2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1$. От $y=-x \Rightarrow x^2+1=0$, което няма реални корени $\Rightarrow$ $\underline{\text{Отг. } (1,1)}$.

13) $\left.\begin{cases} x^3+2x^2y+xy^2-x-y=2 \\ y^3+2xy^2+x^2y+x+y=6 \end{cases}\right]+ \Rightarrow x^3+y^3+3x^2y+3xy^2=8$
$\Rightarrow (x+y)^3=8 \Leftrightarrow x+y=2$

$\Rightarrow \begin{cases} x^3+2x^2y+xy^2-x-y=2 \\ y=2-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^3+2x^2(2-x)+x(2-x)^2-x-2+x=2 \\ y=2-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \cancel{x^3} + \cancel{4x^2} - \cancel{2x^3} + 4x - \cancel{4x^2} + \cancel{x^3} - \cancel{x} - 2 + \cancel{x} = 2 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 4 \\ y = 2 - x \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{(1, 1)}$..

14) $\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12 \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^3 = 8 \\ x^3y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2y^3}{x^3y^2} = \frac{8}{4} \Rightarrow \frac{y}{x} = 2$

$\Rightarrow y = 2x \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^3y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{(1, 2)}$

15) $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 11x - 7y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 3y + 5 = 0 \quad |\cdot(-3) \end{cases} \Rightarrow x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ (5-2y)^2 + y^2 - 4(5-2y) - 3y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ 25 - 20y + 4y^2 + y^2 - 20 + 8y - 3y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ 5y^2 - 15y + 10 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y-1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1, \quad y = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \underline{(1, 2) \text{ и } (3, 1)}$.

Решаване чрез полагане – симетрични изрази относно x и y – полагане на $x+y$ и xy

16) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + xy + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 17 \\ x + y + xy = 9 \end{cases}$

Полагане $\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 - 2v = 17 \\ u + v = 9 \Rightarrow v = 9 - u \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} v = 9 - u \\ u^2 + 2u - 35 = 0 \Leftrightarrow (u+7)(u-5) = 0 \end{cases}$ $u = -7 \Rightarrow v = 16$; $u = 5 \Rightarrow v = 4$ $\Rightarrow$

$\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 16 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 - x \\ xy = 16 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = 5 - x \\ xy = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = -7-x \\ x(-7-x) = 16 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 5-x \\ x(5-x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -7-x \\ x^2 + 7x + 16 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 5-x \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -7-x \\ \text{н.р.к.} \end{cases} \cup \begin{cases} y = 5-x \\ (x-4)(x-1) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow x = 4 \Rightarrow y = 1 \\ \searrow x = 1 \Rightarrow y = 4 \end{matrix}$$

Отг. $(1,4)$ и $(4,1)$

17) $$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 20 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 20 \\ x+y = \frac{5}{4}xy \end{cases}$$ ($x=0$, $y=0$ не са решения)

Можем да положим, а можем и директно да заместим $x+y = \frac{5}{4}xy$ от второто уравнение в първото $\Rightarrow$

$\frac{5}{4}(xy)^2 = 20 \Leftrightarrow (xy)^2 = 16 \Rightarrow xy = \pm 4$, откъдето

$x+y = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x+y = 5 \\ xy = 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y = -5 \\ xy = -4 \end{cases}$ и т.н.

18) $$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 12xy \\ 3x + 3y = xy \Rightarrow xy = 3(x+y) \end{cases}$$ при Д.О. $x \neq 0, y \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2+y^2-xy) = 12xy \\ xy = 3(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) = 12xy \\ xy = 3(x+y) \end{cases}$$

Можем да заместим $xy = 3(x+y)$ в първото уравнение $\Rightarrow$

$(x+y)\left((x+y)^2 - 9(x+y)\right) = 36(x+y)$

$x+y = 0$ е решение $\Rightarrow y = -x \xrightarrow{\text{от второто уравн.}} -x^2 = 0 \Rightarrow \underline{x = y = 0}$ $\notin$ Д.О.

Остава да решим $(x+y)^2 - 9(x+y) = 36 \Leftrightarrow$

$(x+y)^2 - 9(x+y) - 36 = 0$ с корени $x+y = 12$ и $x+y = -3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 12 \\ xy = 36 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y = -3 \\ xy = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12-x \\ x^2 - 12x + 36 = 0 \end{cases} \cup$$

$$\begin{cases} y = -3-x \\ x^2 + 3x - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 12 - x \\ (x-6)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = y = 6} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -3 - x \\ x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ и т.н.}$$

19) $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1) = 10 \\ (x+y)(xy-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 + x^2 + y^2 = 9 \\ (x+y)(xy-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (xy)^2 + (x+y)^2 - 2xy = 9 \\ (x+y)(xy-1) = 3 \end{cases}$ Полагаме $\begin{cases} x+y = u \\ xy = v \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u^2 + v^2 - 2v = 9 \\ u(v-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 - 2v + 1 = 10 \\ u(v-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} u^2 + (v-1)^2 = 10 \\ u(v-1) = 3 \end{cases} \Rightarrow v - 1 = \dfrac{3}{u},\ u \neq 0 \Rightarrow$ от първото уравн.

получаваме $u^2 + \dfrac{9}{u^2} = 10 \Leftrightarrow u^4 - 10u^2 + 9 = 0$

$(u^2-9)(u^2-1) = 0 \Rightarrow u = \pm 3,\ u = \pm 1.$

Тъй като $v = 1 + \dfrac{3}{u}$, то:

от $u = 3 \Rightarrow v = 2$, от $u = -3 \Rightarrow v = 0$, от $u = 1 \Rightarrow v = 4$

от $u = -1 \Rightarrow v = -2 \Rightarrow$

$\begin{cases} x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow x(3-x) = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$ и $x = 2 \Rightarrow y = 1.$

$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = -3$ и $y = 0,\ x = -3$

$\begin{cases} x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow x(1-x) = 4 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 0$ н.р.к.

$\begin{cases} x + y = -1 \Rightarrow y = -1 - x \\ xy = -2 \end{cases} \Rightarrow x(-1-x) = -2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -2,\ y = 1;\ x = 1,\ y = -2.$

Отговори: $\underline{(1,2), (2,1), (0,-3), (-3,0), (1,-2), (-2,1)}.$

20) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$ отг. $(3,-1), (-1,3)$ $(2,1), (1,2).$

Хомогенни от втора степен и свеждащи се до тях

21) $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + 3xy - 5y^2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ от $y=0 \Rightarrow x=0$, които са решение и на второто уравнение $\Rightarrow$ при $y \neq 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{x}{y} - 2 = 0$

$\Rightarrow \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} - 2 = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{y} = +2$, $\dfrac{x}{y} = -1$

$\Rightarrow$ от $\dfrac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y$, което заместено във второто уравн. дава $8y^2 + 6y^2 - 5y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$

От $\dfrac{x}{y} = -1 \Rightarrow x = -y \Rightarrow 2y^2 - 3y^2 - 5y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$

Отг. $(0,0)$

22) $\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 28 \\ x^2 + 3xy - 3y^2 = 28 \;|.(-1) \end{cases}$ $\Rightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2y$

$\Rightarrow$ заместване в едно от уравненията, напр. второто $\Rightarrow$
$4y^2 + 6y^2 - 3y^2 = 28 \Leftrightarrow 7y^2 = 28 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$

$\Rightarrow$ Отг. $(4,2)$, $(-4,-2)$

23) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \;|.(5) \\ y^2 - 2xy = -15 \;|.(7) \end{cases}$ $\Big]+ \Rightarrow 5x^2 - 19xy + 12y^2 = 0$

Тъй като от $y = 0$ в уравнението $5x^2 - 19xy + 12y^2 = 0$ следва $x = 0$, а $(0,0)$ не е решение на системата, то $5\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 19\left(\dfrac{x}{y}\right) + 12 = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{y} = 3$, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = 3y \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ -5y^2 = -15 \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

$\begin{cases} x = \frac{4}{5}y \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5}y \\ y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm 5 \Rightarrow x = \pm 4$

$(3\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(-3\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $(4,5)$, $(-4,-5)$.

24) $\left|\begin{array}{l} x^2-y^2=3 \\ x^3-y^3=7(x-y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (x-y)(x+y)=3 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2)=7(x-y) \end{array}\right.$

$x-y=0$, т.е. $x=y$ е решение на второто уравнение, но не и на първото $\Rightarrow$ системата е еквивалентна на

$\left|\begin{array}{l} (x-y)(x+y)=3 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ll} x^2-y^2=3 & |.(7) \\ x^2+xy+y^2=7 & |.(-3) \end{array}\right]+ \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2-3xy-10y^2=0 \;|.\, y^2\neq 0$ ($y=0$ не е решение на системата – проверете!)

$4\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}\right)-10=0 \Rightarrow \frac{x}{y}=2, \quad \frac{x}{y}=-\frac{5}{4}$

$\Rightarrow$ от $\frac{x}{y}=2 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=2y \\ x^2-y^2=3 \end{array}\right. \Rightarrow 3y^2=3 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow x=\pm 2$

от $\frac{x}{y}=-\frac{5}{4} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=-\frac{5}{4}y \\ x^2-y^2=3 \end{array}\right. \Rightarrow y^2=\frac{16}{3} \Rightarrow y=\pm\frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\mp\frac{5}{\sqrt{3}}$

Отг. $\underline{(2,1),\ (-2,-1),\ \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)}$.

25) $\left|\begin{array}{ll} x^3-y^3=7 & |.(6) \\ x^2y+xy^2=6 & |.(-7) \end{array}\right]+ \Rightarrow 6x^3-6y^3-7x^2y-7xy^2=0$

В последното уравнение $y=0$ води до $x=0$, но $(0,0)$ не е решение на системата $\Rightarrow 6x^3-6y^3-7x^2y-7xy^2=0 \;|:y^3\neq 0$

$6\left(\frac{x}{y}\right)^3-7\left(\frac{x}{y}\right)^2-7\left(\frac{x}{y}\right)-6=0.$

Нека $\frac{x}{y}=t \Rightarrow 6t^3-7t^2-7t-6=0 \Leftrightarrow$

$(t-2)(6t^2+5t+3)=0$

	6	−7	−7	−6
2	6	5	3	0

$t=2$; $6t^2+5t+3$ – н.р.к.

$\Rightarrow \frac{x}{y}=2 \Rightarrow x=2y \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=2y \\ x^3-y^3=7 \end{array}\right. \Rightarrow 7y^3=7 \Rightarrow y=1$

Отг. $\underline{(2,1)}$.

Още задачи

26) $\begin{cases} xy + 24 = \dfrac{x^3}{y} \\ xy - 6 = \dfrac{y^3}{x} \end{cases}$ Д.О. $x \neq 0,\ y \neq 0$

$\Rightarrow (xy+24)(xy-6) = \dfrac{x^3}{y} \cdot \dfrac{y^3}{x} \Leftrightarrow x^2y^2 + 18xy - 6 \cdot 24 = x^2y^2$

$\Rightarrow \underline{xy = 8}$ $\Rightarrow$ заместваме в двете уравнения от системата и получаваме

$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} = 32 \\ \dfrac{y^3}{x} = 2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\frac{x^3}{y}}{\frac{y^3}{x}} = \dfrac{32}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x^4}{y^4} = 16 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y}\right)^4 = 16$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = \pm 2$. Тогава $\begin{cases} x = 2y \\ xy = 8 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$, $x = \pm 4$

$\begin{cases} x = -2y \\ xy = 8 \end{cases} \Rightarrow y^2 = -4$ н. р. к.

Отг. $(4, 2),\ (-4, -2)$

* * *

27) $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

Полагане $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} = u \geq 0 \\ \sqrt{x+y} = v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1 = u^2 \\ x+y = v^2 \end{cases} \Rightarrow$

$3x + 2y + 1 = u^2 + v^2$, което ще използваме за еквивалентна на второто уравнение $\Rightarrow$ с-мата е

$\begin{cases} u - v = 1 \Rightarrow u = 1 + v \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases}$ $\Rightarrow 2v^2 + 2v - 4 = 0 \Leftrightarrow v^2 + v - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (v+2)(v-1) = 0 \Rightarrow$

$v = -2 \Rightarrow u = -1$; $v = 1 \Rightarrow u = 2$ $\Rightarrow$ Само $u = 2, v = 1 \in$ Д.О.

$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} = 2 \\ \sqrt{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1 = 4 \\ x+y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 3 \\ x+y = 1 \end{cases}$

Отг. $(2, -1)$.

28) $\begin{cases} \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ Полагане $\begin{cases} \sqrt{x^2+5}=u\geq 0 \\ \sqrt{y^2-5}=v\geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+5=u^2 \\ y^2-5=v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=u^2-5 \\ y^2=v^2+5 \end{cases} \Rightarrow$ системата приема вида

$\begin{cases} u+v=5 \Rightarrow v=5-u \\ u^2+v^2=13 \end{cases} \Rightarrow u^2+25-10u+u^2=13 \Leftrightarrow 2u^2-10u+12=0$

$\Rightarrow u^2-5u+6=0 \Leftrightarrow (u-3)(u-2)=0 \Rightarrow u=3,\ v=2$ и
$u=2,\ v=3$ са решения и $\in$ Д.О. $\Rightarrow$

$\begin{cases} \sqrt{x^2+5}=3 \\ \sqrt{y^2-5}=2 \end{cases} \cup \begin{cases} \sqrt{x^2+5}=2 \\ \sqrt{y^2-5}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=9 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2=-1 \\ y^2=14 \end{cases} \lightning$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 3 \end{cases}$ Отг. $(2,3),\ (2,-3),\ (-2,3),\ (-2,-3)$.

29) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8 \end{cases}$ Полагане $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}=u\geq 0 \\ \sqrt[4]{x-y}=v\geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}=u^2 \\ \sqrt{x-y}=v^2 \end{cases} \Rightarrow$ с-мата приема вида

$\begin{cases} u+v=4 \Rightarrow v=4-u \\ u^2-v^2=8 \end{cases} \Rightarrow u^2-16+8u-u^2=8 \Leftrightarrow 8u=24 \Rightarrow \begin{matrix} u=3 \\ v=1 \end{matrix} \in$ Д.О.

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}=9 \\ \sqrt{x-y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=81 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$ Отг. $(41,40)$

30) $\begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{y+\frac{1}{x}}=2\sqrt{2} \\ (x^2+1)y+(y^2+1)x=4xy \end{cases}$ $x\neq 0,\ y\neq 0$

Нека положим

$\begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}=u\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{xy+1}{y}}=u \\ \sqrt{y+\frac{1}{x}}=v\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{xy+1}{x}}=v \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{xy+1}{y}=u^2 \\ \frac{xy+1}{x}=v^2 \end{cases} \Rightarrow u^2+v^2=\frac{x^2y+x+xy^2+y}{xy}$

системата приема вида

$$\begin{cases} u+v=2\sqrt{2} \\ \dfrac{x^2y+y+xy^2+x}{xy}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2\sqrt{2} \Rightarrow v=2\sqrt{2}-u \\ u^2+v^2=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^2+8-4\sqrt{2}u+u^2=4 \Leftrightarrow 2u^2-4\sqrt{2}u+4=0 \Leftrightarrow$$

$$u^2-2\sqrt{2}u+2=0 \Leftrightarrow (u-\sqrt{2})^2=0 \Rightarrow u=\sqrt{2} \Rightarrow v=\sqrt{2} \in Д.О.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}=\sqrt{2} \\ \sqrt{y+\dfrac{1}{x}}=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=2 \\ y+\dfrac{1}{x}=2 \end{cases} \overset{\text{при } x\neq 0,\ y\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} xy+1=2y \\ xy+1=2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$2x=2y \Rightarrow x=y \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=1 \Rightarrow y=1}.$$