Училищен курс по алгебра

Лекция 7.

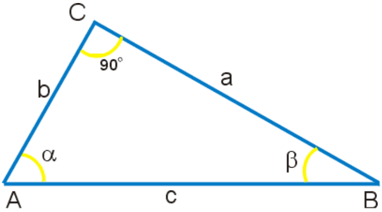
Тригонометрични функции. Преобразуване на тригонометрични изрази. Тригонометрични уравнения и неравенства

специалности: МИИТ, ИТМОМ, 3 курс

лектор: Марта Теофилова

Тригонометрични функции

Основните тригонометрични функции в интервала $(0^\circ; 90^\circ)$ се въвеждат в 9. клас чрез отношения на дължините на страните на правоъгълен триъгълник.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$$

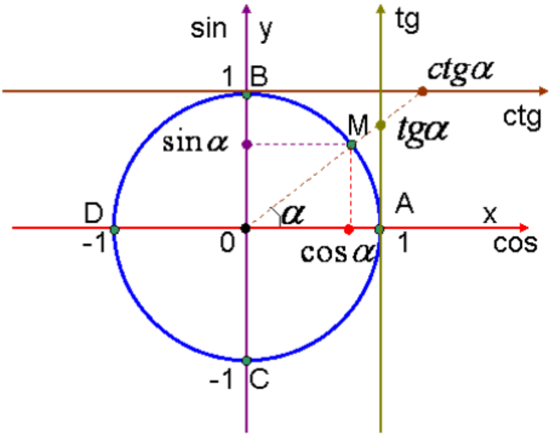
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

Тригонометрични функции

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

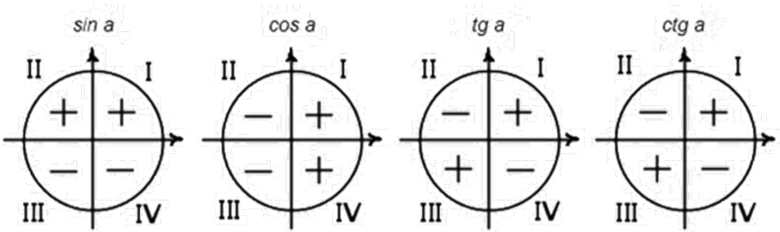
Тригонометрични функции – обобщен ъгъл



Тригонометрични функции – обобщен ъгъл

Разглеждаме единичната окръжност (окръжност с радиус 1 и център, съвпадащ с центъра на декартовата координатна система в равнината Oxy). Разглеждаме ъгли с връх т. O, на които едното рамо съвпада с абсцисната ос Ox, а второто се определя от лъча $OM^{\rightarrow}$ (чертежът на предния слайд).

Ако завъртим второто рамо в положителна или отрицателна посока около т. O, докато т. M опише една, две и т.н. пълни окръжности, то това рамо ще се окаже на същото място, както при ъгъла α. Получават се ъгли с големина $\alpha + 360°$, $\alpha + 2.360°$ и т.н., които се наричат обобщени ъгли.



Тригонометрични функции – обобщен ъгъл

рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
град	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o	270^o	360^o
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0
ctg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

Тригонометрични функции – обобщен ъгъл

$90° - x$ $\frac{\pi}{2} - x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$
$90° + x$ $\frac{\pi}{2} - x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x$
$180° - x$ $\pi - x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$
$180° + x$ $\pi + x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x$
$270° - x$ $\frac{3}{2}\pi - x$	$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\cos x$	$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\sin x$	$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = \operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = \operatorname{tg} x$
$270° + x$ $\frac{3}{2}\pi + x$	$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = -\cos x$	$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = -\sin x$	$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = -\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = -\operatorname{tg} x$
$360° - x$ $2\pi - x$	$\sin(2\pi - x) = -\sin x$	$\cos(2\pi - x) = \cos x$	$\operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}(2\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$

Основни свойства:

Функциите $y = \sin x$ и $y = \cos x$ са дефинирани за всяка реална стойност на x и фунционалните им стойности са ограничени в интервала $[-1; 1]$, т.е.

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ за всяко } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Функциите $y = \sin x$ и $y = \cos x$ са периодични с период цяло кратно на 2π, т.е.

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = x, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Основен интервал на аргумента, за който се дефинират двете функции, е $x \in [0; 2\pi)$ за $y = \sin x$ и съответно $x \in [-\pi; \pi]$ за $y = \cos x$.

Функцията $y = \sin x$ е нечетна, а $y = \cos x$ е четна, т.е.

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x. \tag{3}$$

Тригонометрични функции – свойства

Функцията $y = \operatorname{tg} x$ се дефинира в основен интервал за аргумента $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, като за тези стойности на x функцията $y = \operatorname{tg} x$ приема стойности в $(-\infty; +\infty)$.

Функцията $y = \operatorname{ctg} x$ се дефинира в основен интервал за аргумента $x \in (0; \pi)$, като за тези стойности на x функцията $y = \operatorname{ctg} x$ приема стойности в $(-\infty; +\infty)$.

Функциите $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ са периодични с период цяло кратно на π, т.е.

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Функциите $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ са нечетни, т.е.

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x. \tag{5}$$

Основни тригонометрични формули:
`https://doza.pro/art/math/geometry/bg/trig-formulas`

Основни тригонометрични уравнения

Уравнение, в което неизвестното участва в аргумент на една или повече тригонометрични функции, се нарича тригонометрично уравнение. При решаване на такива уравнения първо се намират основните решения и след това с използване на периодичността на тригонометричните функции се намират всички решения.

Уравнението

$$\sin x = a, \quad -1 \leq a \leq 1,$$

в интервала $[0; 2\pi)$ има 2 решения $x = \alpha$ и $x = \pi - \alpha$ и всички негови решения са $x = \alpha + 2k\pi$ и $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Уравнението

$$\cos x = a, \quad -1 \leq a \leq 1,$$

в интервала $[-\pi; \pi]$ има 2 решения $x = \pm\alpha$ и всички негови решения са $x = \pm\alpha + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Основни тригонометрични уравнения

Уравнението

$$\operatorname{tg} x = a$$

в интервала $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ има 1 решение $x = \alpha$ и всички негови решения са $x = \alpha + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Уравнението

$$\operatorname{ctg} x = a$$

в интервала $(0; \pi)$ има 1 решение $x = \alpha$ и всички негови решения са $x = \alpha + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Основни тригонометрични уравнения

В частните случаи $a = 0$, $a = \pm 1$ се получават следните решения:

$$\sin x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = k\pi,\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\sin x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\sin x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\cos x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 2k\pi,\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\cos x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi,\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = k\pi,\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\operatorname{ctg} x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Решаване чрез разлагане – чрез формули за сбор и разлика на ъгли или формулите за преобразуване на произведение в сбор или разлика.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ \mp \alpha)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha \neq 90^\circ + 180^\circ k,\ \beta \neq 90^\circ + 180^\circ n$$

Основни тригонометрични уравнения

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

Основни тригонометрични уравнения

Намерете корените на уравнението

$$\sin(15^\circ + x) + \cos(45^\circ + x) = \frac{1}{2}.$$

Нека преобразуваме по следния начин

$$\sin(15^\circ + x) + \cos(30^\circ + (15^\circ + x)) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(15^\circ + x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(15^\circ + x) - \frac{1}{2}\sin(15^\circ + x) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(15^\circ + x) + \frac{1}{2}\sin(15^\circ + x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(30^\circ - (15^\circ + x)) = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \cos(x - 15^\circ) = \frac{1}{2}$$

с корени $x - 15^\circ = \pm 60^\circ + 360^\circ k$, откъдето $x_1 = 75^\circ + 360^\circ k$ и $x_2 = -45^\circ + 360^\circ k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Може да се реши и като синусът или косинусът се представят чрез другата функция $(\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha))$ и се използват формулите за сбор на два косинуса или два синуса.

Основни тригонометрични уравнения

Намерете корените на уравнението

$$\sin 7x + \sin 3x = 3\cos 2x.$$

Преобразуваме лявата страна чрез формулата за сбор на два синуса

$$2\sin 5x \cos 2x - 3\cos 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos 2x(2\sin 5x - 3) = 0,$$

еквивалентно на

$$\cos 2x = 0 \quad \text{или} \quad 2\sin 5x - 3 = 0.$$

От първото уравнение намираме $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, откъдето $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Второто уравнение е еквивалентно на $\sin 5x = \frac{3}{2} > 1$, което няма решения.

Намерете корените на уравнението

$$\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0.$$

Групираме четните и нечетните кратни на x

$$2\sin 3x \cos x + 2\sin 4x \cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; (\sin 3x + \sin 4x)\cos x = 0,$$

еквивалентно на

$$\sin 3x + \sin 4x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = 0.$$

От второто уравнение намираме $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а първото уравнение преобразуваме

$$2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0,$$

откъдето $\frac{7x}{2} = l\pi$, т.е. $x = \frac{2l\pi}{7}$ и $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$, т.е. $x = \pi + 2n\pi$, където $l, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Основни тригонометрични уравнения

Намерете корените на уравнението

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

Групираме първото и третото събираемо в лявата страна на уравнението и също правим и за първото и третото събираемо в дясната страна, прилагайки формулата за сбор на синуса и косинуса

$$2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} + \sin 2x = 2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} + \cos 2x$$

$$2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos 2x\cos x + \cos 2x$$

$$\sin 2x(2\cos x + 1) - \cos 2x(2\cos x + 1) = 0$$

$$(2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0,$$

еквивалентно на

$$2\cos x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad \sin 2x - \cos 2x = 0$$

Основни тригонометрични уравнения

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} 2x = 1.$$

Корените на първото уравнение са $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, а за второто получаваме $2x = \frac{\pi}{4} + l\pi$, откъдето $x = \frac{\pi}{8} + l\frac{\pi}{2}$, където $k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Намерете корените на уравнението

$$\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0.$$

От формулата за разлика на два косинуса получаваме

$$-2\sin 8x \sin x - 2\sin 2x \sin x = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin x(\sin 8x + \sin 2x) = 0$$

$$2\sin x \sin 5x \cos 3x = 0,$$

откъдето $x = k\pi$, $x = l\frac{\pi}{5}$, $x = (2n+1)\frac{\pi}{6}$.

Основни тригонометрични уравнения

Намерете корените на уравнението

$$\sin 4x \sin 2x + \cos 2x \cos 4x = \cos 2x \sin 2x.$$

Преобразуваме лявата страна съгласно формулата за косинус от разлика на два ъгла

$$\cos 2x - \cos 2x \sin 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; \big(\sin 2x - 1\big) \cos 2x = 0,$$

еквивалентно на

$$\cos 2x = 0 \quad \text{или} \quad \sin 2x = 1.$$

Корените на първото уравнение са $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, т.е. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, а на второто уравнение $2x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$, т.е. $x = \frac{\pi}{4} + l\pi$. Втората група решения се съдържат в първата (за четни стойности на k), затова окончателно можем да запишем, че корените са $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Основни тригонометрични уравнения

Намерете корените на уравнението

$$\sin(x+1)\cos(2x+2) = \sin(3x+3)\cos(4x+4).$$

Представяме двете страни на уравнението като сбор от синуси

$$\frac{1}{2}\left[\sin(3x+3)+\sin(-x-1)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(7x+7)+\sin(-x-1)\right]$$

$$\sin(7x+7)-\sin(3x+3)=0 \Leftrightarrow\ 2\sin(2x+2)\cos(5x+5)=0,$$

еквивалентно на

$$\sin(2x+2)=0 \quad \text{или} \quad \cos(5x+5)=0$$

$$2x+2=k\pi \ \Leftrightarrow\ x=k\frac{\pi}{2}-1 \ \text{ или } \ 5x+5=\frac{\pi}{2}+l\pi \ \Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{10}+l\frac{\pi}{5}-1,$$

където $k,l=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Намерете корените на уравнението

$$4\sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1.$$

Преобразуваме лявата страна

$$2\left[\cos\left(x-x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=1$$

$$2\left[\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=1 \;\Leftrightarrow\; 2\left[\frac{1}{2}-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=1$$

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \;\Leftrightarrow\; 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi \;\Leftrightarrow\; 2x=\frac{\pi}{6}+k\pi,$$

откъдето $x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}$.

Основни тригонометрични уравнения

Намерете корените на уравнението

$$\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$$

Д.О. е $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (за които $\operatorname{tg} x$ не е дефинирана). Нека преобразуваме по следния начин

$$\frac{\sin x}{\cos x} - 1 + 2\sin x \cos x - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} - (\sin x - \cos x)^2 = 0$$

$$(\sin x - \cos x)(1 - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 0,$$

което е еквивалентно на

$$\sin x - \cos x = 0 \quad \text{или} \quad 1 - \sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$$

От първото уравнение получаваме

$$\sin x = \cos x \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg} x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Второто уравнение записваме във вида

$$1 + \cos^2 x = \sin x \cos x \;\Leftrightarrow\; 1 + \cos^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Лявата му страна е израз, чиито стойности са ≥ 1, а дясната му страна може да приема стойности $\leq \frac{1}{2}$. Следователно това уравнение няма корени.

Основни тригонометрични уравнения

Намерете корените на уравнението

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1.$$

Преобразуваме

$$4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; 4\sin^2 x\cos^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x(4\sin^2 - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos x = 0 \;\text{ или }\; 4\sin^2 x - 1 = 0.$$

Корените на първото уравнение са $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Второто уравнение е

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; \sin x = \pm\frac{1}{2}.$$

Корените на $\sin x = \frac{1}{2}$ са $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2l\pi$ и $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$, а на $\sin x = -\frac{1}{2}$ са $x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ и $x_4 = -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$.

Основни тригонометрични уравнения

Намерете корените на уравнението

$$\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x.$$

Д.О. е $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (за които $\operatorname{tg} x$ не е дефинирана). Нека преобразуваме по следния начин (освобождаваме от знаменател)

$$1 - \sin x = \sin x \cos x + \cos^2 x \;\Leftrightarrow\; \sin x + \sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = 0$$

$$\sin x + \sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin x(1 + \cos x - \sin x) = 0,$$

еквивалентно на

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x - \sin x = -1.$$

От първото уравнение намираме $x = k\pi$.

Основни тригонометрични уравнения

Второто уравнение преобразуваме по следния начин

$$\cos x - \sin x = -1 \;|.\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow\; x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2l\pi$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + 2l\pi = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \notin \text{Д.О.},$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + 2l\pi = -\pi + 2l\pi = (2l-1)\pi.$$

Основни тригонометрични уравнения

Намерете корените на уравнението

$$\sin 2x - \cos 2x + 4\sin x + 4\cos x + 1 = 0.$$

Преобразуваме с формулите за синус и косинус удвоен ъгъл

$$2\sin x\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x + 4(\sin x + \cos x) + \cos^2 x + \sin^2 x = 0$$

$$\sin x(\cos x + \sin x) + 2(\sin x + \cos x) = 0$$

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + 2) = 0,$$

еквивалентно на

$$\sin x + \cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg} x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,$$

а второто уравнение няма решения.

Уравнения, които се решават с въвеждане на помощен ъгъл.
Това са тригонометрични уравнения от вида

$$A\sin x + B\cos x = C, \quad A, B, C \neq 0. \tag{6}$$

Двете страни на уравнението са разделят на $\sqrt{A^2+B^2}$ и се получава

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{7}$$

Тъй като за коефициентите пред $\sin x$ и $\cos x$ в лявата страна е изпълнено, че стойностите им са в интервала $[-1; 1]$ и сумата на квадратите им е 1, то съществува ъгъл α, за който

$$\sin\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

или

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Основни тригонометрични уравнения – помощен ъгъл

Тогава, в зависимост от избора на α, лявата страна на уравнението може да се запише като синус или косинус от сбор или разлика на x и α:

$$\cos(x-\alpha)=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{или} \quad \sin(x+\alpha)=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

с което уравнението се свежда до основно тригонометрично уравнение.

Основни тригонометрични уравнения

Намерете корените на уравнението

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$$

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} \ |.\frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тъй като $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то лявата страна можем да представим като синус от сбор

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \Leftrightarrow \ x_1 = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi,$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ \Leftrightarrow \ x_2 = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi.$$

Намерете корените на уравнението

$$\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x).$$

Преобразуваме, прехвърляйки от една страна функциите с еднакъв аргумент

$$\cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x = \sin x + \sqrt{3}\cos x \ |.\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \ \Leftrightarrow \ 3x - \frac{\pi}{3} = \pm\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi,$$

откъдето

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}.$$

Основни тригонометрични уравнения – помощен ъгъл

Намерете корените на уравнението

$$2(\sin^3 x - \cos^3 x) = 1 + (\sin x + \cos x)^2.$$

Разлагаме лявата страна и преобразуваме дясната

$$2(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = 1 + \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = 1 + \sin x \cos x$$

$$(1 + \sin x \cos x)(\sin x - \cos x - 1) = 0,$$

еквивалентно на

$$1 + \sin x \cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x - \cos x - 1 = 0.$$

Първото уравнения няма решения, тъй като е еквивалентно на $\sin 2x = -2$. Второто уравнение записваме във вида $\cos x - \sin x = -1$, откъдето получаваме $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ с решения $x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, т.е. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и $x_2 = -\pi + 2k\pi$.

Намерете корените на уравнението

$$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin x + \sqrt{3}.$$

Нека преобразуваме двете страни на уравнението по следния начин

$$2\sin x\cos x + \sqrt{3}(1 - 2\sin^2 x) = 2\sin x + \sqrt{3}$$

$$\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x - \sin x = 0 \ \Leftrightarrow\ \sin x(\cos x - \sin x - 1) = 0,$$

еквивалентно на

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x - \sin x = 1.$$

От първото уравнение имаме $x = k\pi$, а второто е равносилно на $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ с решения $x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2l\pi$, откъдето $x = 2l\pi$ или $x = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi$.

Основни тригонометрични уравнения

Намерете корените на уравнението

$$\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x.$$

Използваме формулата $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ и получаваме

$$3\sin x - 4\sin^3 x + \sin x = 4\sin^3 x \;\Leftrightarrow\; 2\sin^3 x - \sin x = 0$$

$$\sin x(2\sin^2 x - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin x = 0 \;\text{ или }\; \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

Довършете задачата самостоятелно.

Основни тригонометрични уравнения – полагане

Ако се полага $\sin nx$ или $\cos nx$, то трябва да се има предвид ограничеността на стойностите на функциите в интервала $[-1;1]$, което определя дефиниционната област на новата променлива. Друг често срещан случай за полагане е $\sin^2 nx$ или $\cos^2 nx$, за които трябва да се има предвид, че двата израза приемат стойности в $[0;1]$.

Намерете корените на уравнението

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0.$$

Полагаме $t = \sin x \in [-1;1]$. Решаваме квадратното уравнение $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Корените му са $t_1 = 2$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Само втората стойност принадлежи на Д.О. и затова решаваме само $\sin x = \frac{1}{2}$, откъдето намираме
$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ и $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Намерете корените на уравнението

$$5(1+\cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x.$$

Преобразуваме така

$$3 + 5\cos x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \;\Leftrightarrow\; 3 + 5\cos x = 1 - 2\cos^2 x.$$

В последното уравнение извършваме полагането $t = \cos x \in [-1; 1]$ и получаваме квадратното уравнение $2t^2 + 5t + 2 = 0$ с корени $t_1 = -2$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$. Връщайки се в полагането, решаваме

$$\cos x = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Основни тригонометрични уравнения – полагане

Намерете корените на уравнението

$$\frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{1}{\sin^2 2x} = \frac{8}{3}.$$

Д.О. е $\sin 2x \neq 0$ и $\cos 2x \neq 0$. Преобразуваме лявата страна

$$\frac{\sin^2 2x - \cos^2 2x}{\sin^2 2x \cos^2 2x} = \frac{8}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4\cos 4x}{\sin^2 4x} = \frac{8}{3}$$

$$3\cos 4x + 2(1 - \cos^2 4x) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; 2\cos^2 4x - 3\cos 4x - 2 = 0.$$

Полагаме $t = \cos 4x \in [-1; 1]$ и получаваме $2t^2 - 3t - 2 = 0$ с корени $t_1 = 2$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$. От $\cos 4x = -\frac{1}{2}$ намираме $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.

Основни тригонометрични уравнения – полагане

Намерете корените на уравнението

$$6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5.$$

Преобразуваме

$$6\sin^2 x + 8\sin^2 x\cos^2 x = 5 \;\Leftrightarrow\; 6\sin^2 x + 8\sin^2 x(1-\sin^2 x) = 5$$

$$8\sin^4 x - 14\sin^2 x + 5 = 0.$$

Полагаме $t = \sin^2 x \in [0;1]$ и получаваме $8t^2 - 14t + 5 = 0$ с корени $t_1 = \frac{5}{4}$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Само втората стойносте е от Д.О. Следователно решаваме

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi, \quad x_4 = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi.$$

Основни тригонометрични уравнения – полагане

Намерете корените на уравнението

$$(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x.$$

Нека преобразуваме по следния начин

$$\sin 2x + \cos 4x \sin 2x = 1 - \sin^2 2x$$

$$\sin 2x + (1 - 2\sin^2 2x)\sin 2x = 1 - \sin^2 2x$$

$$2\sin^3 2x - \sin^2 2x - 2\sin 2x + 1 = 0.$$

Нека положим $t = \sin 2x \in [-1; 1]$. Така получаваме $2t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0$, еквивалентно на $2t(t^2 - 1) - (t^2 - 1) = 0$, т.е. $(2t - 1)(t^2 - 1) = 0$ с корени $t = \frac{1}{2}$, $t = \pm 1$. Връщаме се в полагането и решаваме уравненията

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi,\; x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi,$$

$$\sin 2x = \pm 1 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{\pi}{4} + l\pi.$$

Намерете корените на уравнението

$$2\sin^2 x + \sin x + \frac{1}{\sin x} + \frac{2}{\sin^2 x} = 6.$$

Д.О. е $\sin x \neq 0$. Нека положим $t = \sin x \in [-1; 1]$, $t \neq 0$. Тогава получаваме симетричното уравнение

$$2t^2 + t + \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} = 6 \;\Leftrightarrow\; 2\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + t + \frac{1}{t} - 6 = 0$$

$$2\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 + \left(t + \frac{1}{t}\right) - 10 = 0,$$

което е квадратно уравнение относно $y = t + \frac{1}{t}$, като $y \in [-2; 2]$, $y \neq 0$ при $t \in [-1; 1]$, $t \neq 0$. Решаваме $2y^2 + y - 10 = 0$ и намираме $y_1 = -\frac{5}{2}$ и $y_2 = 2$. От $y = 2$ получаваме

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2 \;\Leftrightarrow\; \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin x = 1,$$

откъдето $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Намерете корените на уравнението

$$2 + 2\cos x = 3\sin x \cos x + 2\sin x.$$

В уравнения, в които участват изразите $\sin x \pm \cos x$ и $\sin x \cos x$, е удобно да се положи $\sin x \pm \cos x$. Преобразуваме даденото уравнение

$$2 + 2(\cos x - \sin x) = 3\sin x \cos x.$$

Нека положим $\cos x - \sin x = t$. Тогава $(\cos x - \sin x)^2 = t^2$, откъдето $1 - 2\sin x \cos x = t^2$. Следователно $\sin 2x = 1 - t^2$ и поради $-1 \le \sin 2x \le 1$, то $-1 \le 1 - t^2 \le 1$, откъдето $0 \le t^2 \le 2$, т.е. $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Също така имаме $\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$.
Замествайки в уравнението след преобразуване достигаме до $3t^2 + 4t + 1 = 0$ с корени $t_1 = -1 \in$ Д.О. и $t_2 = -\frac{1}{3} \in$ Д.О. След връщане в полагането намираме:

$$\cos x - \sin x = -1 \;\Leftrightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\; x_2 = -\pi + 2k\pi,$$

$$\cos x - \sin x = -\frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

С универсалната субституция

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Намерете корените на уравнението

$$3\sin x - 4\cos x = 5.$$

Прилагаме универсалната субституция и получаваме

$$\frac{6t}{1+t^2} - \frac{4(1-t^2)}{1+t^2} = 5 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 6t + 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3.$$

Решете уравнението с въвеждане на помощен ъгъл.

Основни тригонометрични уравнения – хомогенни

Хомогенни уравнения от втора степен относно $\sin x$ и $\cos x$ и свеждащи се до тях – решаваме като квадратно уравнение относно $\operatorname{tg} nx$ или $\operatorname{ctg} nx$.
Намерете корените на уравнението

$$\sin^2 x - \sin 2x = 3\cos^2 x.$$

Преобразуваме

$$\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Тъй като $\cos x = 0$ не е решение на уравнението, можем да разделим двете му страни на $\cos^2 x$ и да получим еквивалентното уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg} x = 3, \quad \operatorname{tg} x = -1.$$

Първото уравнение оставяме в този вид, а за второто намираме $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Намерете корените на уравнението

$$6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2.$$

Преобразуваме

$$6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0 \;\Leftrightarrow\; 4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0,$$

откъдето $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ или $\operatorname{tg} x = -1$.

Основни тригонометрични уравнения

Решаване с използване на формулите (за понижаване на степен)

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Намерете корените на уравнението

$$4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x.$$

Преобразуваме с помощта на горните формули

$$4\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + 2\cos^2 2x - 1 = 1 + 12\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Намерете корените на уравнението

$$\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x.$$

Преобразуваме

$$\frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} = \frac{1-\cos 10x}{2} + \frac{1-\cos 12x}{2}$$

$$\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x \iff 2\cos x \cos 7x = 2\cos x \cos 11x$$

$$\cos x(\cos 11x - \cos 7x) = 0 \iff \cos x \sin 9x \sin 2x = 0.$$

Довършете самостоятелно.

Намерете корените на уравнението

$$\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cos 2x.$$

Преобразуваме

$$\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 = \sin 2x \cos 2x$$

$$1 + \cos^2 4x = \sin 4x \;\Leftrightarrow\; 2 - \sin^2 4x = \sin 4x \;\Leftrightarrow\; \sin^2 4x + \sin 4x - 2 = 0.$$

Полагаме $t = \sin 4x \in [-1; 1]$ и решаваме $t^2 + t - 2 = 0$ с корени $t = -2$ и $t = 1$. От втората стойност намираме $\sin 4x = 1$, откъдето $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$.

Намерете корените на уравнението

$$\cos^2 x + \cos^2 3x = \sin^2 2x.$$

Уравнението е еквивалентно на

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} = \frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$\cos 2x + \cos 6x + \cos 4x + 1 = 0$$

$$2\cos 4x \cos 2x + 2\cos^2 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) = 0$$

$$\cos 2x \cos 3x \cos x = 0.$$

Решете уравнението самостоятелно.

Основни тригонометрични уравнения

Намерете корените на уравнението

$$\sin^2 x + \sin^2 5x = 1.$$

Прилагаме формулите за понижаване на степен

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 10x}{2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \cos 2x + \cos 10x = 0$$

$$2\cos 6x \cos 4x = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos 4x = 0 \;\text{ или }\; \cos 6x$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, \quad 6x = \frac{\pi}{2} + l\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{12} + l\frac{\pi}{6}.$$

Основни тригонометрични уравнения – свойства на функции

Намерете корените на уравнението

$$\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} = 2.$$

Поради $\cos x \leq 1$ следва, че стойностите, които може да приема лявата страна на урваненението, са ≤ 2 за всяко $x \in \mathbb{R}$. Тогава равенството може да бъде изпълнено, точно когато лявата страна приема стойност 2, т.е. точно когато

$$\left|\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \;\Leftrightarrow\; 2x = 2k\pi \;\Leftrightarrow\; x = k\pi \\ \cos\frac{3x}{4} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{3x}{4} = 2l\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{8l\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Трябва да проверим дала двете групи решения имат общи стойности. Това е изпълнено, точно когато

$$k\pi = \frac{8l\pi}{3} \;\Leftrightarrow\; k = \frac{8l}{3}.$$

Тъй като k е цяло число, то трябва $l = 3n$. Следователно $k = 8n$. Тогава решенията на уравнението са от вида $x = 8n\pi$.

Основни тригонометрични уравнения – свойства на функции

Намерете корените на уравнението

$$\sin\frac{x}{4} + 3\cos x = 4.$$

Уравнението е еквивалентно на

$$\sin\frac{x}{4} + 3\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 4$$

$$\sin\frac{x}{4} - 6\sin^2\frac{x}{2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin\frac{x}{4} = 1 + 6\sin^2\frac{x}{2}.$$

Лявата страна на уравнението приема стойности ≤ 1, а дясната приема стойности ≥ 1 за всяко реално x. Следователно равенството е в сила, точно когато

$$\left|\begin{array}{l} \sin\frac{x}{4} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 2\pi + 8k\pi. \\ 1 + 6\sin^2\frac{x}{2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin\frac{x}{2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2l\pi \end{array}\right.$$

Тъй като $x = 2\pi + 8k\pi = 2(4k+1)\pi$ се съдържат в $x = 2l\pi$ за $l = 4k+1$, то решения на задачата са $x = 2\pi + 8k\pi$.

Основни тригонометрични уравнения – свойства на функции

Намерете корените на уравнението

$$\left(2+\frac{1}{\cos^2 x}\right)(4-2\cos^4 x) = 1+5\sin 3y.$$

Д.О. $\cos x \neq 0$. Тъй като $0 < \cos^2 x \leq 1$, то

$$2+\frac{1}{\cos^2 x} \geq 3, \qquad 4-2\cos^4 x \geq 2.$$

Следователно лявата страна на уравнението ≥ 6. Тъй като $-1 \leq \sin x \leq 1$, то дясната страна $1+5\sin 3y \leq 6$. Следователно равенството е възможно, точно когато лявата и дясната страна приемат едновременно стойност 6, т.е.

$$\left|\begin{array}{l} 2+\frac{1}{\cos^2 x} = 3 \;\Leftrightarrow\; \cos^2 x = 1 \;\Leftrightarrow\; \cos x = \pm 1 \\ 4-2\cos^4 x = 2 \;\Leftrightarrow\; \cos^4 x = 1 \;\Leftrightarrow\; \cos^2 x = 1 \\ 1+5\sin 3y = 6 \;\Leftrightarrow\; \sin 3y = 1. \end{array}\right.$$

Решенията са: $x = k\pi$, $y = \frac{\pi}{6} + \frac{2l\pi}{3}$.

Основни тригонометрични уравнения – свойства на функции

Намерете корените на уравнението

$$\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x.$$

От $-1 \leq \sin x \leq 1$ и $-1 \leq \cos x \leq 1$ следват съответно неравенствата: $\sin^5 x \leq \sin^2 x$ и $\cos^5 x \leq \cos^2 x$.

Тъй като $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то $\sin^5 x + \cos^5 x \leq 1$. Следователно лявата страна на уравнението приема стойности ≤ 1. От $0 \leq \sin^4 x \leq 1$ следва, че дясната страна на уравнението приема стойности ≥ 1. Следователно равенството е възможно, точно когато

$$\left| \begin{array}{l} \sin^5 x + \cos^5 x = 1 \\ 2 - \sin^4 x = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin^4 x = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin x = \pm 1. \end{array} \right.$$

Тъй като при $\sin x = 1$ имаме $\cos x = 0$, то е изпълнено и първото уравнение в системата. При $\sin x = -1$ отново имаме $\cos x = 0$, но първото уравнение не се удовлетворява (заради нечетните степенни показатели). Следователно решенията на уравнението са $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Основни тригонометрични уравнения – свойства на функции

Намерете корените на уравнението

$$\sin^{2021} x + \cos^{2021} x = 1.$$

Преобразуваме по следния начин

$$\sin^{2021} x + \cos^{2021} x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x(1 - \sin^{2019} x) + \cos^2 x(1 - \cos^{2019} x) = 0.$$

Тъй като и двете събираеми в лявата страна са неотрицателни, то те трябва да бъдат едновременно равни на нула, за да бъде изпълнено равенството, т.е.

$$\left| \begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos^{2019} x = 1 \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin^{2019} x = 1. \end{array} \right.$$

Решенията на първата система са $x = 2k\pi$, а на втората са $x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$.

Основни тригонометрични уравнения – свойства на функции

Намерете корените на уравнението

$$\cos^2 x = 1 + \log_2^2 \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Тъй като лявата страна на уравнението е винаги ≤ 1, а дясната страна е винаги ≥ 1, то равенството е възможно, точно когато

$$\left| \begin{array}{l} \cos^2 x = 1 \\ 1 + \log_2^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 1. \end{array} \right.$$

От второто уравнение получаваме $\log_2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 0 = \log_2 1$, откъдето $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1$, т.е. $x^2 + x + 1 = 1$ с корени $x = 0$ и $x = -1$. Проверяваме, че само $x = 0$ удовлетворява и първото уравнение. Следователно решението е $x = 0$.

Основни тригонометрични уравнения – свойства на функции

Намерете корените на уравнението

$$\lg(2-x) + \sin\sqrt{x-5} = 2.$$

Определяме Д.О. Имаме

$$\left| \begin{array}{lcl} 2-x>0 & \Leftrightarrow & x<2 \\ x-5 \geq 0 & \Leftrightarrow & x \geq 5. \end{array} \right.$$

Тъй като горната система няма решения, то и уравнението няма корени.

Намерете корените на уравнението

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3.$$

Уравнението е еквивалентно на

$$2^{\sin^2 x} + 2^{1-\sin^2 x} = 3.$$

Нека положим $t = 2^{\sin^2 x}$. Тъй като $0 \le \sin^2 x \le 1$, то $1 \le t \le 2$. Уравнението приема вида

$$t + \frac{2}{t} = 3 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 3t + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (t-1)(t-2) = 0.$$

Следователно корените са $t = 1$ и $t = 2$, откъдето намираме

$$2^{\sin^2 x} = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin^2 x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = k\pi,$$

$$2^{\sin^2 x} = 2 \;\Leftrightarrow\; \sin^2 x = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin x = \pm 1 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{\pi}{2} + l\pi.$$

Основни тригонометрични уравнения

Дадено е уравнението

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

а) Намерете стойностите на реалния параметър a, за които уравнението има корени.
б) Намерете решенията на уравнението при $a = \frac{7}{16}$.

а) Преобразуваме

$$(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = a \;\Leftrightarrow\; (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 + \cos^4 - \sin^2 x \cos^2 x) = a$$

От $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ намираме

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x \;\Rightarrow$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

и заместваме в уравнението

Основни тригонометрични уравнения

$$1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = a \;\Leftrightarrow\; 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = a$$

$$\sin^2 2x = \frac{4(1-a)}{3}.$$

Тъй като $0 \le \sin^2 2x \le 1$, то горното уравнение има решения, точно когато

$$0 \le \frac{4(1-a)}{3} \le 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \le 4 - 4a \le 3 \;\Leftrightarrow\; -4 \le -4a \le -1,$$

откъдето намираме $\frac{1}{4} \le a \le 1$.

б) При $a = \frac{7}{16}$ уравнението е еквивалентно на

$$\sin^2 2x = \frac{3}{4} \;\Leftrightarrow\; \sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решенията на $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ са: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ и $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.
Решенията на $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ са: $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ и $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Литература

- Рангелова, П., Сборник по математика 9. – 12. клас с методични указания, Макрос, Пловдив, 2006.
- Веселаго И.А., Алгебра для школьников и абитуриентов, ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- Золотарева Н.Д., Попов Ю.А., Сазонов В.В., Алгебра – базовый курс с решениями и указаниями, БИНОМ, Москва, 2015.
- Золотарева Н.Д., Попов Ю.А., Семендяева Н.Л., Федотов М.В., Алгебра – углубленный курс с решениями и указаниями, 2011.
- Киселёв, А.П., Алгебра, ч. I, ч. II, Физматлит, 2006.
- Лурье М.В., Алгебра – техника решения задач, 2005.
- Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., Алгебрический тренажер, ИЛЕКСА, Москва, 2007.
- Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И., Уравнения и неравенства. нестандартные методы решения: справочник.
- Шестаков С.А., Уравнения и системы уравнений, Изд. МЦНМО, Москва, 2018.
- Шестаков С.А., Неравенства и системы неравенств, Изд. МЦНМО, Москва, 2018.