Училищен курс по алгебра

Лекция 4.

Квадратен корен и n-ти корен. Преобразуване на ирационални изрази. Ирационални уравнения и неравенства

специалности: МИИТ, ИТМОМ, 3 курс

лектор: Марта Теофилова

Корен n-ти

Ако $a \geq 0$ е реално число и $n \geq 2$ е естествено число, то неотрицателното число b, за което $b^n = a$, се нарича корен n-ти от a и се записва $b = \sqrt[n]{a}$. Числото a се нарича подкоренна величина, а n – коренен показател.

За всяко неотрицателно число a и всяко естествено число $n \geq 2$ съществува единствено неотрицателно число b, за което $b^n = a$.

Свойства. Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $n, m \geq 2$ – естествени числа.

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ при $a \geq 0$;
- $\sqrt[n]{a^n} = a$ при $a \geq 0$;
- Ако $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$;
- Ако $a \geq 0$, $b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ при $a > 0$;

Корен n-ти

- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ при $a > 0$;
- Ако $0 \leq a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Ако n е нечетно число, то дефинираме $\sqrt[n]{a}$ и за отрицателни реални числа a чрез $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$.

Преобразуване на ирационални изрази – примери

1) Чрез отделяне на точен квадрат извлечете корен от $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$:

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}} = \sqrt{9+2.3\sqrt{5}+5} = \sqrt{(3+\sqrt{5})^2} = 3+\sqrt{5}.$$

2) Сравнете числата $A = \sqrt{5}+\sqrt{6}$ и $B = \sqrt{3}+\sqrt{8}$.

Тъй като $A, B > 0$, то можем да сравним A^2 и B^2. Пресмятаме

$$A^2 = (\sqrt{5}+\sqrt{6})^2 = 11+2\sqrt{30}, \quad B^2 = (\sqrt{3}+\sqrt{8})^2 = 11+2\sqrt{24}.$$

Тъй като $\sqrt{30} > \sqrt{24}$, то $A^2 > B^2$ и следователно $A > B$.

Докажете, че
$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$$
Рационализираме знаменателите в лявата и дясната страна на горното равенство.
Имаме предвид, че ако $a, b > 0$, $a \neq b$, то
$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b},$$
$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}.$$

Преобразуване на ирационални изрази – примери

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6} = \sqrt{7}+\sqrt{6}$$

$$\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})} + \frac{4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{3} + \frac{4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4} = \sqrt{6}+\sqrt{7}.$$

Тъй като лявата и дясната страна са равни на един и същи израз, то тъждеството е вярно.

Преобразувайте израза

$$A = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

От формулата за двойния радикал

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \tag{1}$$

имаме

$$\sqrt{2 \pm \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}} \pm \sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}}.$$

Тогава знаменателите на двата израза се преобразуват по следния начин

$$\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Тогава

$$A=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{6})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}+\frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}=\sqrt{2}.$$

Ирационални уравнения с един радикал

Уравнение, в което неизвестното участва в подкоренна величина, се нарича ирационално.
При решаването на ирационални уравнения се стремим да ги сведем до рационални чрез повдигане на двете страни на уравнението на подходяща степен (естествено число ≥ 2).

Най-простият тип ирационални уравнения с квадратен корен са от вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x). \tag{2}$$

Ще разгледаме два метода за решаване на уравнения от вида (2) – с метода на еквивалентността и с метода на следствието.

При метода на еквивалетността използваме, че уравнението (2) е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x)^2. \end{array} \right. \tag{3}$$

Условието $g(x) \geq 0$ играе ролята на Д.О. на уравнението. Поради второто равенство в системата е изпълнено $f(x) \geq 0$.

Ирационални уравнения с един радикал

В случай, че в уравнението $\sqrt{f(x)} = g(x)$ имаме $g(x) = c = \mathrm{const.}$, т.е. уравнението е от вида $\sqrt{f(x)} = c$, то при $c < 0$ уравнението няма реални корени, а при $c \geq 0$ уравнението е еквивалентно на $f(x) = c^2$.

Ирационални уравнения с един радикал

При метода на следствието, от ирационалното уравнение (2) с директно повдигане на втора степен получаваме следствието

$$f(x) = g(x)^2 \tag{4}$$

без да отчитаме Д.О.
Всички корени на (2) са корени и на (4), но обратното не винаги е вярно, тъй като при повдигане на четна степен могат да се вкарат "чужди корени" , понеже $g(x)^2 = (-g(x))^2$.
Затова след намиране на корените на (4), те задължително се подлагат на проверка дали са корени и на даденото ирационално уравнение (2).

Примери

Намерете корените на уравнението

$$\sqrt{5x+4} = -x - 2.$$

I начин. По метода на еквивалентността уравнението е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} -x - 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq -2 \\ 5x + 4 = (-x-2)^2 \;\Leftrightarrow\; 5x + 4 = x^2 + 4x + 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x = 0. \end{array} \right.$$

Корените на уравнението от горната система са $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Никой от двата корена обаче не удовлетворява първото условие от системата и затова не е корен на даденото уравенние. Следователно уравнението няма реални корени.

Намерете корените на уравнението

$$\sqrt{5x+4} = -x-2.$$

II начин. С директно повдигане в квадрат на двете страни на уравнението получаваме следното следствие

$$5x+4 = (-x-2)^2 \ \Leftrightarrow\ 5x+4 = x^2+4x+4 \ \Leftrightarrow\ x^2-x=0.$$

След като намерим корените на горното уравнение, $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, за всеки от тях следва да се направи проверка дали е корен и на даденото уравнение:

$$x_1 = 0: \ \sqrt{5.0+4} \neq 0-2 \ \Rightarrow\ x_1 = 0 \text{ не е корен на даденото уравнение}$$
$$x_2 = 1: \ \sqrt{5.1+4} \neq -1-2 \ \Rightarrow\ x_2 = 1 \text{ не е корен на даденото уравнение.}$$

Следователно даденото уравнение няма реални корени.

Примери

Намерете корените на уравнението

$$\sqrt{2x^2 - 9x + 4} = x + 2.$$

Уравнението е еквивалентно на

$$\left|\begin{array}{l} x + 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq -2 \\ 2x^2 - 9x + 4 = x^2 + 4x + 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 13x = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 13. \end{array}\right.$$

Тъй като и двете намерени стойности за неизвестното $x_1 = 0$ и $x_2 = 13$ удовлетворяват условието $x \geq -2$, то и двете са решения на даденото уравнение.

Примери

Намерете корените на уравнението

$$(x^2 - 16)\sqrt{3-x} = 0.$$

Д.О. на уравнението е $3 - x \geq 0$, т.е. $x \leq 3$.
Решаваме уравнението $x^2 - 16 = 0$ с корени $x_1 = -4$, $x_2 = 4$ и уравнението $\sqrt{3-x} = 0$ с корен $x_3 = 3$. Тъй като $x_1 = -4 \in$ Д.О., $x_3 = 3 \in$ Д.О., а $x_2 = 4 \notin$ Д.О., то само $x = -4$ и $x = 3$ са корени на даденото уравнение.

Аналогично, разгледайте самостоятелно уравнение

$$(3x^2 - 7x + 2)\sqrt{3 + 5x - 2x^2} = 0.$$

Уравнението се разпада на

$$3x^2 - 7x + 2 = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{3 + 5x - 2x^2} = 0,$$

а Д.О. се определя от условието $3 + 5x - 2x^2 \geq 0$.

Примери

Намерете корените на уравнението

$$(x-9)\sqrt{x-7} = x-9.$$

Д.О. на уравнението е $x-7 \geq 0$, т.е. $x \geq 7$. Преобразуваме

$$(x-9)\left(\sqrt{x-7}-1\right) = 0.$$

Уравнението се разпада на $x-9=0$ с корен $x=9 \in$ Д.О. и $\sqrt{x-7}=1$ с корен $x=8 \in$ Д.О. Решенията на даденото уравнение са $x=9$ и $x=8$.

Уравнение от вида

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \tag{5}$$

по метода на еквивалентността е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \quad (\text{или } g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x). \end{array} \right. \tag{6}$$

Пример. Намерете корените на

$$\sqrt{2x^2 - x - 8} = \sqrt{x^2 + 2x - 8}.$$

Горното уравнение е еквивалентно на

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + 2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \ (x-2)(x+4) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \leq -4 \ \cup \ x \geq 2 \\ 2x^2 - x - 8 = x^2 + 2x - 8 \ \Leftrightarrow \ x^2 - 3x = 0 \ \Leftrightarrow \ x_1 = 0, \ x_2 = 3. \end{array} \right.$$

Тъй като само $x_2 = 3$ е решение на системата, то само $x = 3$ е корен на даденото уравнение. Същия факт, разбира се, можете да установите и с проверка в даденото уравнение на двете възможности за решения $(x_1 = 0, \ x_2 = 3)$, вместо със системата от двете условия.

Основни ирационални уравнения

Уравнение от вида

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = h(x) \tag{7}$$

по метода на еквивалентността е еквивалентно на системата

$$\left|\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \quad (\text{или } g(x) \geq 0) \\ h(x) \geq 0 \\ f(x)g(x) = h(x)^2. \end{array}\right. \tag{8}$$

Пример. Уравнението

$$\sqrt{x+2}\sqrt{2x-3} = 3$$

е еквивалентно на

$$\left|\begin{array}{l} 2x-3 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{3}{2} \\ (x+2)(2x-3) = 9 \;\Leftrightarrow\; 2x^2+x-15=0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -3,\; x_2 = \frac{5}{2}, \end{array}\right.$$

като виждаме, че само $x_2 = \frac{5}{2}$ е решение на системата и следователно и на даденото уравнение.

Примери

Нека решим същото уравнение по метода на следствието:

$$\sqrt{x+2}\sqrt{2x-3} = 3.$$

Нека директно повдигнем двете страни в квадрат и да достигнем до

$$(x+2)(2x-3) = 9 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + x - 15 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -3,\; x_2 = \frac{5}{2}.$$

Извършваме проверка на двете намерени стойности

$$x_1 = -3: \;\sqrt{-3+2}\sqrt{-6-3} \neq 3,$$

тъй като подкоренна величина приема отрицателна стойност. Следователно $x = -3$ не е решение.

$$x_2 = \frac{5}{2}: \;\sqrt{\frac{5}{2}+2.}\;\sqrt{5-3} = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 3,$$

следователно $x = \frac{5}{2}$ е корен на даденото уравнение.

Ирационални уравнение с два или повече радикала

В този вид уравнение по-удобен е методът на следствието с необходимия брой последователни повдигания на двете страни на уравнението в квадрат (и евентуално преобразуване) до получаване на рационално уравнение и последваща проверка на намерените решения в даденото уравнение.

При наличие на повтарящи се по-сложни изрази се използва подходящо полагане.

Примери

Намерете корените на уравнението

$$\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2.$$

Преобразуваме

$$\sqrt{3x+7} = 2 + \sqrt{x+1}.$$

Повдигаме в квадрат двете страни на уравнението

$$3x+7 = 4 + x + 1 + 4\sqrt{x+1} \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{x+1} = x+1.$$

Отново повдигаме в квадрат двете страни на последното уравнение

$$4(x+1) = (x+1)^2 \;\Leftrightarrow\; (x+1)(x-3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = 3.$$

Извършваме проверка

$$x_1 = -1 :\; \sqrt{-3+7} - \sqrt{-1+1} = 2, \quad x_2 = 3 :\; \sqrt{9+7} - \sqrt{3+1} = 2.$$

Следователно и двете намерени стойности са корени на даденото уравненние.

Примери

Намерете корените на уравнението

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{5x+4}.$$

Повдигаме в квадрат двете страни на уравнението до получаване на следствието

$$3x+1+4x-3+2\sqrt{(3x+1)(4x-3)}=5x+4 \;\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{12x^2-5x-3}=3-x \;\Rightarrow\; 12x^2-5x-3=9-6x+x^2.$$

Последното уравнение е $11x^2+x-12=0$ с корени $x_1=1$ и $x_2=-\frac{12}{11}$. Извършваме проверка на двете стойности на неизвестното в даденото уравнение, при което установяваме, че $x=1$ го удовлетворява, а $x=-\frac{12}{11}$ превръща подкоренни величини в отрицателин числа, което е противоречие. Следователно само $x=1$ е решение.

Намерете корените на уравнението

$$\sqrt{2x^2 - 4x} = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Уравнението е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(x+1) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq -1 \;\cup\; x \geq 1 \\ 2x^2 - 4x = x^2 + 1 + x^2 - 1 + 2\sqrt{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}. \end{array} \right.$$

Следваща еквивалентна система е

$$\left| \begin{array}{l} x \leq -1 \;\cup\; x \geq 1 \\ \sqrt{x^4 - 1} = -2x, \end{array} \right.$$

от която получаваме

Примери

$$\left| \begin{array}{l} x \leq -1 \ \cup \ x \geq 1 \\ x \leq 0 \\ x^4 - 1 = 4x^2, \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x \leq -1 \\ x^4 - 4x^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

В последното уравнение полагаме $x^2 = t \geq 0$ и получаваме $t^2 - 4t - 1 = 0$ с корени $t_1 = 2 + \sqrt{5} \in$ Д.О. и $t_2 = 2 - \sqrt{5} \notin$ Д.О. Тогава имаме $x^2 = 2 + \sqrt{5}$, откъдето $x_{1,2} = \pm\sqrt{2 + \sqrt{5}}$. Тъй като $x \leq -1$, то само $x = -\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ е решение на даденото уравнение.

Примери – с полагане

Намерете корените на уравнението

$$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7.$$

Преобразуваме

$$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x+5=12.$$

Полагаме $\sqrt{x^2-3x+5}=t\geq 0$ и достигаме до $t^2+t-12=0$ с корени $t_1=-4\notin$ Д.О. и $t_2=3\in$ Д.О. Връщаме се в полагането $\sqrt{x^2-3x+5}=3$, откъдето $x^2-3x-4=0$ с корени $x_1=-1$ и $x_2=4$, които са корени на даденото уравнение.

Примери – с полагане

Намерете корените на уравнението

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}.$$

Полагаме $\sqrt{2x-1}=t\geq 0$. Тогава $2x-1=t^2$, откъдето $x=\frac{t^2+1}{2}$. Заместваме в даденото уравнение и получаваме

$$\sqrt{\frac{t^2+1}{2}+t}\ +\ \sqrt{\frac{t^2+1}{2}-t}\ =\ \sqrt{2}.$$

Преобразуваме и освобождаваме от знаменател

$$\sqrt{t^2+2t+1}\ +\ \sqrt{t^2-2t+1}\ =\ 2,$$

откъдето

$$\sqrt{(t+1)^2}\ +\ \sqrt{(t-1)^2}=2\quad\Leftrightarrow\quad |t+1|+|t-1|=2.$$

Примери – с полагане

За решаване на модулното уравнение използваме метода на интервалите. По-дари условието $t \geq 0$, имаме $|t+1| = t+1$ за всяко $t \geq 0$ и затова разглеждаме уравнението само в следните два интервала относно корена на уравнението $t - 1 = 0$, т.е.:

1) $t \in [0; 1]$, където $|t + 1| = t + 1$ и $|t - 1| = 1 - t$, откъдето

$$t + 1 + 1 - t = 2 \;\Leftrightarrow 2 = 2, \text{което е изпълнено за всяко } t \in [0; 1].$$

2) $t \in (1; +\infty)$, където $|t + 1| = t + 1$ и $|t - 1| = t - 1$, откъдето

$$t + 1 + t - 1 = 2 \;\Leftrightarrow\; t = 1 \notin (1; +\infty).$$

Следователно решенията са $-1 \leq t \leq 1$, откъдето поради $t \geq 0$ имаме $0 \leq \sqrt{2x - 1} \leq 1$, което е еквивалентно на $\sqrt{2x - 1} \leq 1$ и $2x - 1 \geq 0$, откъдето след повдигане на втора степен в ирационалното неравество получаваме $x \leq 1$ и $x \geq \frac{1}{2}$, т.е. $x \in [\frac{1}{2}; 1]$

Примери

Намерете корените на уравнението

$$\frac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}} = \frac{21}{x}, \quad x \neq 0.$$

Рационализираме знаменателя на израза в лявата страна на уравнението

$$\frac{\left(\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}\right)^2}{21+x-21+x} = \frac{21}{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{21+x+21-x+2\sqrt{21^2-x^2}}{2x} = \frac{21}{x}.$$

Освобождаваме от знаменател горното уравнение ($x \neq 0$), преобразуваме и достигаме до

$$\sqrt{21^2-x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -21,\; x_2 = 21.$$

С проверка в даденото уравнение установяваме, че и двете намерени стойности за x са корени.

Примери

Намерете корените на уравнението

$$\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+3}=\frac{7}{\sqrt{x-3}}.$$

При $x>3$ освобождаваме от знаменател в уравнението

$$\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-9}=7 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2-16}=7-\sqrt{x^2-9}$$

Повдигаме в квадрат двете страни на последното уравнение и получаваме

$$x^2-16=49-14\sqrt{x^2-9}+x^2-9 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2-9}=4 \;\Leftrightarrow\; x=\pm 5.$$

Чрез проверка в даденото уравнение установяваме, че $x=5$ е негово решение, а $x=-5$ не е (тъй като дори не удовлетворява първоначалното поставено от нас условие $x>3$).

Примери

Намерете корените на уравнението

$$\frac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5.$$

Даденото уравнение е еквивалентно на

$$\left|\begin{array}{l} x^2+x+6\geq 0 \\ x^2-x-4\geq 0 \\ \sqrt{x^2+x+6}\neq\sqrt{x^2-x-4} \\ 2\sqrt{x^2+x+6}=3\sqrt{x^2-x-4}, \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x^2-x-4\geq 0 \\ x\neq -5 \\ 4(x^2+x+6)=9(x^2-x-4)\ \Leftrightarrow\ 5x^2-13x-60=0, \end{array}\right.$$

откъдето $x_1=5$, $x_2=-\frac{12}{5}$. И двете намерени стойности за x удовлетворяват останалите условия от системата, затова са решения на даденото уравнение.

Примери – полагане

Намерете корените на уравнението

$$\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6.$$

Тъй като $\left(\sqrt[4]{x}\right)^2=\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$, то можем да положим $\sqrt[4]{x^3+8}=t\geq 0$. Тогава уравнението добива вида

$$t^2+t-6=0,\ \Leftrightarrow\ t_1=-3,\ t_2=2.$$

Само $t=2$ удовлетворява условието на Д.О. за t и затова

$$\sqrt[4]{x^3+8}=2\ \Leftrightarrow\ x^3+8=16\ \Leftrightarrow x=2.$$

Намерете корените на уравнението

$$x\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\ \sqrt[4]{x^2+15}=2.$$

Аналогично на предната задача и тази може да бъде решена с полагане. Нека $t=\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}\geq 0$. Тогава даденото уравнение е еквивалентно на квадратното уравнение $t^2-t-2=0$ с корени $t_1=-1$ и $t_2=2$. Само втората стойност на t е от Д.О. Следователно

$$\sqrt{x}\ \sqrt[4]{x^2+15}=2 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\geq 0 \\ x^2(x^2+15)=16 \end{array}\right.$$

еквивалентно на $x^4+15x^2-16=0$ и $x\geq 0$. Корените на уравнението са $x=\pm 1$, откъдето поради условието $x\geq 0$ следва, че само $x=1$ е решение.

Решете аналогично $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$. Отговор $x=81$.

Примери – полагане

Намерете корените на уравнението

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}}=\frac{13}{6}.$$

Полагаме

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}=y.$$

Тогава уравнението е еквивалентно на

$$y+\frac{1}{y}=\frac{13}{6} \;\Leftrightarrow\; 6y^2-13y+6=0,\; y\neq 0 \;\Leftrightarrow\; y_1=\frac{3}{2},\; y_2=\frac{2}{3}.$$

Връщайки се в полагането, решаваме уравненията

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}=\frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{x+3}{5x+2}=\frac{27}{8} \;\Leftrightarrow\; 8(x+3)=27(5x+2),\; x\neq -\frac{2}{5}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}=\frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; \frac{x+3}{5x+2}=\frac{8}{27} \;\Leftrightarrow\; 27(x+3)=8(5x+2),\; x\neq -\frac{2}{5},$$

откъдето съответно получаваме $x=-\frac{30}{127}$ и $x=5$.

Примери – полагане

Намерете корените на уравнението

$$\sqrt[3]{x+16} = 1 + \sqrt[3]{x+9}.$$

Нека положим $\sqrt[3]{x+16} = y$ и $\sqrt[3]{x+9} = z$. Тогава

$$y^3 = x+16,\ z^3 = x+9 \ \Rightarrow\ y^3 - z^3 = 7.$$

Така с последното равенство и даденото уравнение съставяме системата

$$\left| \begin{array}{l} y = 1+z \\ y^3 - z^3 = 7 \end{array} \right. \ \Leftrightarrow\ (1+z)^3 - z^3 = 7 \ \Leftrightarrow\ z^2 + z - 2 = 0$$

с корени $z_1 = -2$ и $z_2 = 1$. Тогава

$$\sqrt[3]{x+9} = -2 \ \Leftrightarrow\ x+9 = -8 \ \Leftrightarrow\ x = -17,$$

$$\sqrt[3]{x+9} = 1 \ \Leftrightarrow\ x = -8.$$

Примери – полагане

Намерете корените на уравнението

$$\sqrt[4]{1-x} \ + \ \sqrt[4]{x+15} \ = \ 2.$$

Полагаме $y = \sqrt[4]{1-x} \geq 0$, $z = \sqrt[4]{x+15} \geq 0$. Тогава $y^4 = 1-x$, $z^4 = x+15$. Уравнението е еквивалетно на

$$\left| \begin{array}{l} y+z=2 \\ y^4+z^4=16, \end{array} \right.$$

откъдето решаваме уравнението $y^4 + (2-y)^4 = 16$. Получаваме

$$y^4 + 16 - 4.8y + 6.4y^2 - 4.2y^3 + y^4 = 16,$$

т.е. $y^4 - 4y^3 + 12y^2 - 16y = 0$. Разлагаме лявата страна на уравнението

$$y(y^3 - 4y^2 + 12y - 16) = 0 \ \Leftrightarrow \ y(y-2)(y^2 - 2y + 8) = 0$$

с корени $y_1 = 0$ и $y_2 = 2$, откъдето $x_1 = 1$ и $x_2 = -15$.

Ирационални неравенства решаваме по метода на еквивалентността.

Ирационалното неравенство $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x). \end{array} \right. \tag{9}$$

Пример. Намерете решенията на $\sqrt{x^2 - x - 1} > \sqrt{x + 7}$.

Неравенството е еквивалентно на

$$\left| \begin{array}{l} x + 7 \geq 0 \\ x^2 - x - 1 > x + 7 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x - 8 > 0 \;\Leftrightarrow\; (x-4)(x+2) > 0, \end{array} \right.$$

откъдето получаваме

$$\left| \begin{array}{l} x \geq -7 \\ x < -2 \quad \cup \quad x > 4. \end{array} \right.$$

Следователно решенията са $x \in [-7; -2) \cup (4; +\infty)$.

Основни ирационални неравенства

Ирационалното неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x)^2. \end{array} \right. \tag{10}$$

Ирационалното неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ е еквивалентно на обединението на системите

$$\left| \begin{array}{l} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{array} \right. \quad \cup \quad \left| \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x)^2. \end{array} \right. \tag{11}$$

Основни ирационални неравенства

Ирационалното неравенство $\sqrt{f(x)} \le g(x)$ е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \le g(x)^2. \end{array} \right. \tag{12}$$

Ирационалното неравенство $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ е еквивалентно на обединението на системите

$$\left| \begin{array}{l} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{array} \right. \quad \cup \quad \left| \begin{array}{l} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge g(x)^2. \end{array} \right. \tag{13}$$

Основни ирационални неравенства – примери

Намерете решенията на неравенството

$$\sqrt{x^2 - 3x - 5} < x - 1.$$

Неравенството е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - 3x - 5 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 - 3x - 5 < (x-1)^2, \end{array} \right.$$

еквивалентна на

$$\left| \begin{array}{l} \left(x - \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq \frac{3-\sqrt{29}}{2} \;\cup\; x \geq \frac{3+\sqrt{29}}{2} \\ x > 1 \\ x > -6. \end{array} \right.$$

Решенията на последната система са $x \in \left[\frac{3+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$.

Основни ирационални неравенства – примери

Намерете решенията на неравенството

$$\sqrt{2x^2 - 6x + 1} > x - 2.$$

Неравенството е еквивалентно на

$$\left|\begin{array}{l} x - 2 < 0 \\ 2x^2 - 6x + 1 \geq 0 \end{array}\right. \quad \cup \quad \left|\begin{array}{l} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 6x + 1 > (x-2)^2, \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x < 2 \\ 2\left(x - \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{7}}{2}\right) \geq 0 \end{array}\right. \quad \cup \quad \left|\begin{array}{l} x \geq 2 \\ (x+1)(x-3) > 0, \end{array}\right.$$

$$x \leq \frac{3-\sqrt{7}}{2} \quad \cup \quad x > 3.$$

Основни ирационални неравенства

Неравенство от вида $f(x)\sqrt{g(x)} > 0$ е еквивалентно на

$$\left|\begin{array}{l} g(x) > 0 \\ f(x) > 0. \end{array}\right. \tag{14}$$

Неравенство от вида $f(x)\sqrt{g(x)} < 0$ е еквивалентно на

$$\left|\begin{array}{l} g(x) > 0 \\ f(x) < 0. \end{array}\right. \tag{15}$$

Неравенство от вида $f(x)\sqrt{g(x)} \geq 0$ е еквивалентно на

$$f(x)\sqrt{g(x)} = 0 \quad \cup \quad \left|\begin{array}{l} g(x) > 0 \\ f(x) > 0. \end{array}\right. \tag{16}$$

Аналогично за $f(x)\sqrt{g(x)} \leq 0$.

Основни ирационални неравенства – примери

Намерете решенията на неравенството

$$(x-3)\sqrt{x^2+x-2} > 0.$$

Неравенството е еквивалентно на

$$\left| \begin{array}{l} x^2+x-2>0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(x+2)>0 \;\Leftrightarrow\; x<-2 \,\cup\, x>1 \\ x-3>0 \;\Leftrightarrow\; x>3. \end{array} \right.$$

Решенията са $x \in (3;+\infty)$.

Основни ирационални неравенства – примери

Намерете решенията на неравенството

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0.$$

Неравенството е еквивалентно на

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} = 0 \quad \cup \quad (x-1)\sqrt{x^2-x-2} > 0.$$

Д.О. на уравнението е $x^2-x-2 = (x+1)(x-2) \geq 0$, т.е. $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.
Следователно корените му са $x = -1$ и $x = 2$ ($x = 1 \notin$ Д.О.).
Неравенството е еквивалентно на

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - x - 2 > 0 \;\Leftrightarrow\; x < -1 \;\cup\; x > 2 \\ x - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 1. \end{array} \right.$$

Решенията на неравенството са $x \in (2; +\infty)$.
Обединянайки решенията на уравнението и неравенството, получаваме $x \in \{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Основни ирационални неравенства

Ирационалното неравенство $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} < h(x)$ е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) > 0 \\ f(x)g(x) < h(x)^2. \end{array} \right. \tag{17}$$

Ирационалното неравенство $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} > h(x)$ е еквивалентно на обединението на системите

$$\left| \begin{array}{l} h(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{array} \right. \quad \cup \quad \left| \begin{array}{l} h(x) \geq 0 \\ f(x) > 0 \text{ (или } g(x) > 0) \\ f(x)g(x) > h(x)^2. \end{array} \right. \tag{18}$$

Изразът $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}$ не бива механично да се заменя с $\sqrt{f(x)g(x)}$, тъй като имат различни Д.О.

Основни ирационални неравенства – примери

Намерете решенията на неравенството

$$\sqrt{8+x}\,\sqrt{8-x} < x.$$

Неравенството е еквивалентно на

$$\left|\begin{array}{l} x+8 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq -8 \\ 8-x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq 8 \\ x > 0 \\ (8+x)(8-x) < x^2, \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} 0 < x \leq 8 \\ x^2 - 32 > 0 \;\Leftrightarrow\; x < -4\sqrt{2} \;\cup\; x > 4\sqrt{2}, \end{array}\right.$$

откъдето окончателно намираме $x \in (4\sqrt{2}; 8]$.

Основни ирационални неравенства – примери

Намерете решенията на неравенството

$$\frac{x-1}{x+4} + 13\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} > -40.$$

Полагаме

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} = t \geq 0$$

и получаваме $t^2 + 13t + 40 > 0$, което е еквивалентно на $(t+5)(t+8) > 0$. Решенията на неравенството са $t \in (-\infty; -8) \cup (-5; +\infty)$, от които след засичане с Д.О. $t \geq 0$ получаваме $t \in [0; +\infty)$. Тогава, връщайки се в полагането, трябва да решим неравенството

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+4} \geq 0,$$

чиито решения са $x \in (-\infty; -4) \cup [1; +\infty)$.

Основни ирационални неравенства – примери

Намерете решенията на неравенството

$$\frac{6x}{x-2} - \sqrt{\frac{12x}{x-2}} - 2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 0.$$

Полагаме

$$\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} = t \geq 0$$

и неравенството приема вида $\frac{t^4}{2} - t^2 - 2t > 0$, т.е. $t^4 - 2t^2 - 4t > 0$, което е еквивалентно на

$$t(t^3 - 2t - 4) > 0 \;\Leftrightarrow\; t(t-2)(t^2+2t+2) > 0 \;\Leftrightarrow\; t(t-2) > 0.$$

Решенията на последното неравенство са $t \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, които засечени с $t \geq 0$, дават $t > 2$. Връщайки се в полагането, решаваме

$$\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{12x}{x-2} > 16 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-8}{x-2} < 0,$$

чиито решения са $x \in (2; 8)$.

Основни ирационални неравенства – примери

Намерете решенията на неравенството

$$\sqrt{4x^2+x+9}+\sqrt{4x^2+x}>3.$$

Нека положим $4x^2+x=t$. Неравенството приема вида

$$\sqrt{t+9}+\sqrt{t}>3,$$

което е еквивалентно на

$$\left|\begin{array}{l} t+9\geq 0 \\ t\geq 0 \\ t+9+t+2\sqrt{t(t+9)}>9 \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{t(t+9)}>-2t \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} t\geq 0 \\ \sqrt{t(t+9)}>-t. \end{array}\right.$$

Последната система е еквивалентна на $t>0$. Връщаме се в полагането и решаваме $4x^2+x>0$, откъдето намираме $x\in(-\infty;-\frac{1}{4})\cup(0;+\infty)$.

Основни ирационални неравенства – примери

Намерете решенията на неравенството

$$\sqrt{x^2-2x-2}+\sqrt{x^2-2x+6}<4.$$

Нека положим $x^2-2x=t$. Неравенството приема вида

$$\sqrt{t-2}+\sqrt{t+6}<4,$$

което е еквивалентно на

$$\left|\begin{array}{l} t-2\geq 0 \\ t+6\geq 0 \\ t-2+t+6+2\sqrt{(t-2)(t+6)}<16 \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{t^2+4t-12}<12-2t \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} t\geq 2 \\ \sqrt{t^2+4t-12}<6-t. \end{array}\right.$$

Решавайки ирационалното неравенство, последната система е еквивалентна на

$$\left|\begin{array}{l} t \geq 2 \\ 6 - t > 0 \;\Leftrightarrow\; t < 6 \\ t^2 + 4t - 12 < (6-t)^2 \;\Leftrightarrow\; 16t < 48 \;\Leftrightarrow t < 3. \end{array}\right.$$

Така намерихме $2 \leq t < 3$. Връщаме се в полагането и решаваме

$$\left|\begin{array}{l} x^2 - 2x \geq 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x < 3 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x - 3 < 0 \;\Leftrightarrow\; (x-3)(x+1) < 0. \end{array}\right.$$

Решенията на тази система, т.е. на даденото неравенство, са $x \in (-1; 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}; 3)$.

Намерете решенията на неравенството

$$\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}} \;+\; \sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}} \;\geq\; 4.$$

Отделяме точни квадрати в подкоренните величини

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2} \;+\; \sqrt{\left(\sqrt{x+2}-3\right)^2} \;\geq\; 4.$$

Съгласно $\sqrt{f(x)^2} = |f(x)|$, последното неравенство е еквивалентно на

$$\left|\sqrt{x+2}-1\right| \;+\; \left|\sqrt{x+2}-3\right| \;\geq\; 4,$$

откъдето след полагане $\sqrt{x+2} = t \geq 0$ получаваме $|t-1| + |t-3| \geq 4$. Последното неравенство решаваме по метода на интервалите. Разглеждаме следните случаи:

Примери

1) $t \in [0;1]$: $|t-1| = 1-t$, $|t-3| = 3-t$, следователно неравенството е еквивалентно на $-2t \geq 0$, т.е. $t \leq 0$. Следователно само $t = 0$ е решение в този интервал.

2) $t \in (1;3)$: $|t-1| = t-1$, $|t-3| = 3-t$ и неравенството приема вида $2 \geq 4$, което няма решения.

3) $t \in [3;+\infty)$: $|t-1| = t-1$, $|t-3| = t-3$, откъдето неравенството приема вида $t \geq 4$.

Така установихме, че решенията за t са $t \in \{0\} \cup [4;+\infty)$. Връщаме се в полагането и решаваме

$$\sqrt{x+2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2$$

$$\sqrt{x+2} \geq 4 \;\Leftrightarrow\; x+2 \geq 16 \;\Leftrightarrow\; x \geq 14.$$

Окончателно решенията на даденото неравенство са $x \in \{-2\} \cup [14;+\infty)$.

Примери

Намерете решенията на неравенството

$$\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}>2\sqrt[8]{1-x^2}.$$

Тъй като $1-x^2=(1+x)(1-x)$, то Д.О. на неравенството се определя от условията

$$\left|\begin{array}{l} 1+x\geq 0 \\ 1-x\geq 0, \end{array}\right.$$

т.е. $-1\leq x\leq 1$. Нека положим

$$\sqrt[4]{1+x}=u\geq 0,\quad \sqrt[4]{1-x}=v\geq 0.$$

Тогава неравенството приема вида

$$u+v>2\sqrt{uv}\ \Leftrightarrow\ \left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)^2>0\ \Leftrightarrow\ u\neq v.$$

Следователно решенията на даденото неравенство са всички x от Д.О., за които $u\neq v$, т.е. без $x=0$.
Отговор. $x\in[-1;0)\cup(0;1]$.

Намерете решенията на неравенството

$$\sqrt{x^2+8x+7} \; + \; \sqrt{x^2-4x-12} \; \leq \; \sqrt{2x^2+4x-5}.$$

Ако означим

$$x^2+8x+7 = a \geq 0, \qquad x^2-4x-12 = b \geq 0,$$

то неравенството има вида $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{a+b}$. Поради $a, b \geq 0$ можем да повдигнем двете страни в квадрат и получаваме еквивалентното неравенство $\sqrt{ab} \leq 0$. Последното има следните възможности за решения:

$$\left| \begin{array}{l} a = 0 \\ b \geq 0 \end{array} \right. \quad \cup \quad \left| \begin{array}{l} b = 0 \\ a \geq 0, \end{array} \right.$$

откъдето достигаме до

$$\left| \begin{array}{l} x^2+8x+7 = (x+1)(x+7) = 0 \\ x^2-4x-12 = (x-6)(x+2) \geq 0 \end{array} \right. \quad \cup \quad \left| \begin{array}{l} x^2-4x-12 = (x-6)(x+2) = 0 \\ x^2+8x+7 = (x+1)(x+7) \geq 0, \end{array} \right.$$

Решението на първата система е $x = -7$, а на втората $x = 6$.

Примери – нечетни и четни коренни показатели

Намерете решенията на неравенството

$$\sqrt[3]{x+2} \leq -5.$$

Чрез директно подвигане на двете страни на неравенството на трета степен то е еквивалентно на

$$x + 2 \leq (-5)^3 \;\Leftrightarrow\; x + 2 \leq -125 \;\Leftrightarrow\; x < -127.$$

Намерете решенията на неравенството

$$\sqrt[4]{x-5} < 3.$$

Неравенството е еквивалетно на

$$\left| \begin{array}{l} x - 5 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 5 \\ x - 5 < 3^4 \;\Leftrightarrow\; x < 86, \end{array} \right.$$

откъдето получаваме $x \in [5; 86)$.

Примери – нечетни коренни показатели

Намерете решенията на неравенството

$$\sqrt[3]{x+4} > \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{2}.$$

Повдигаме двете страни на неравенството на трета степен и получаваме еквивалентното неравенство

$$x+4 > x+2+3\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{4}+2,$$

което е равносилно на

$$\sqrt[3]{2(x+2)^2}+\sqrt[3]{4(x+2)} < 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt[3]{(x+2)^2} < -\sqrt[3]{2(x+2)}.$$

Отново повдигаме в трета степен и последното неравенство е еквивалентно на

$$(x+2)^2 < -2(x+2) \;\Leftrightarrow\; (x+2)(x+4) < 0,$$

чиито решения са $x \in (-4;-2)$.

Литература

- Рангелова, П., Сборник по математика 9. – 12. клас с методични указания, Макрос, Пловдив, 2006.
- Веселаго И.А., Алгебра для школьников и абитуриентов, ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- Золотарева Н.Д., Попов Ю.А., Сазонов В.В., Алгебра – базовый курс с решениями и указаниями, БИНОМ, Москва, 2015.
- Золотарева Н.Д., Попов Ю.А., Семендяева Н.Л., Федотов М.В., Алгебра – углубленный курс с решениями и указаниями, 2011.
- Киселёв, А.П., Алгебра, ч. I, ч. II, Физматлит, 2006.
- Лурье М.В., Алгебра – техника решения задач, 2005.
- Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., Алгебрический тренажер, ИЛЕКСА, Москва, 2007.
- Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И., Уравнения и неравенства. нестандартные методы решения: справочник.
- Шестаков С.А., Уравнения и системы уравнений, Изд. МЦНМО, Москва, 2018.
- Шестаков С.А., Неравенства и системы неравенств, Изд. МЦНМО, Москва, 2018.