Училищен курс по алгебра

Лекция 3.

Рационални уравнения и неравенства от трета и по-висока степен.
Дробно-рационални уравнения и неравенства.
Метод на интервалите

специалности: МИИТ, ИТМОМ, 3 курс

лектор: Марта Теофилова

Цели рационални уравнения

При решаване на цели рационални (полиномни) уравнения от трета и по-висока степен от вида $f(x) = 0$, където $f(x)$ е полином с реални коефициенти, търсим разлагане на $f(x)$ на неразложими над полето на реалните числа множители – линейни двучлени и квадратни тричлени с отрицателни дискриминанти.

Полезна е следната

Теорема

Нека $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ е полином с коефициенти цели числа. Тогава, ако $x_0 = \frac{p}{q}$ е корен на уравнението $f(x) = 0$, то числото p дели свободния член a_n, а числото q дели старшия коефициент a_0.

Теорема (Безу)

Остатъкът R при делението на многочлена $f(x)$ с двучлена $x - x_0$ е $R = f(x_0)$. Следствие – Многочленът $f(x)$ се дели на $x - x_0$, точно когато $f(x_0) = 0$, т.е. $x = x_0$ е корен на уравнението $f(x) = 0$.

Цели рационални уравнения

Правило на Декарт за знаците.

Броят на положителните реални корени на полинома $f(x)$ с реални коефициенти е по-малък или равен на броя на знаковите промени на коефициентите на $f(x)$. Броят на положителните корени и този на смяната на знаците са с еднаква четност.

Броят на отрицателните реални корени на $f(x)$ с реални коефициенти е по-малък или равен на броя на знаковите промени на коефициентите на $f(-x)$ и е със същата четност като тази на смяната на знаците на коефициентите.

Пример. Нека $f(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 + 9x^2 - x + 5$.
В коефициентите на $f(x)$ има 4 последователни смени на знаците. Следователно броят на положителните корени на $f(x) = 0$ е 4, 2 или 0.

Тъй като $f(-x) = -x^5 - x^4 - 3x^3 + 9x^2 + x + 5$, то броят на смените на знаците на коефициентите на $f(-x)$ е 1. Следователно уравнението $f(x) = 0$ има 1 отрицателен корен.

Намерете корените на уравнението

$$3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0.$$

Групираме първото и последното събираемо и второто и третото

$$3(x^3 - 1) - 13x(x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x - 1)(x^2 + x + 1) - 13x(x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x - 1)(3x^2 - 10x + 3) = 0,$$

чиито корени са $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{3}$.

Намерете корените на уравнението

$$x^3 - 2x^2 - 9 = 0.$$

Представяме израза в лявата страна по следния начин

$$x^3 - 3x^2 + x^2 - 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(x - 3) + (x - 3)(x + 3) = 0$$

$$(x - 3)(x^2 + x + 3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3.$$

Разлагане на множители

Намерете корените на уравнението

$$(x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8.$$

Разлагаме на множители двете страни на уравнението

$$(3x+2)\left((x-1)^2 - (x-1)(2x+3) + (2x+3)^2\right) = (3x+2)(9x^2 - 6x + 4),$$

откъдето след преобразуване, прехвърляне на всичко от едната страна и изнасяне на общия множител получаваме

$$(3x+2)(2x^2 - 5x - 3) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x+2 = 0 \;\text{ или }\; 2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Корените са $x = -\frac{2}{3}$ и $x = 3$, $x = -\frac{1}{2}$.

Разлагане на множители – схема на Хорнер

Намерете корените на уравнението

$$3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0.$$

Ако уравнението има рационални корени $\frac{p}{q}$, то $p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ и $q = \pm 1, \pm 3$.

Използваме схема на Хорнер за намиране на рационалените корени

	3	-2	-12	8
2	3	4	-4	0
-2	3	-2	0	

Следователно $3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = (x-2)(x+2)(3x-2)$. Тогава корените на уравнението са $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = \frac{2}{3}$.

Намерете корените на уравнението

$$6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0, \qquad x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0.$$

За първото уравнение използвайте, че $x = -2$ е корен, а за второто, че $x = 3$ е корен.

Разлагане на множители – схема на Хорнер

Намерете корените на уравнението

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 64 = 0.$$

Разлагаме

$$x^3(x-4) + 4(x^2-16) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3(x-4) + 4(x-4)(x+4) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-4)(x^3+4x+16) = 0.$$

Прилагаме схема на Хорнер за проверка дали $x^3+4x+16=0$ има цял корен.

	1	0	4	16
-2	1	-2	8	0

Следователно $x^3+4x+16 = (x+2)(x^2-2x+8)$, откъдето уравнението приема вида

$$(x-4)(x+2)(x^2-2x+8) = 0$$

и реалните му корени са $x_1 = 4$ и $x_2 = -2$.

Други техники – решаване относно параметър или постоянен коефициент

Намерете корените на уравнението

$$x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + 2 = 0.$$

Уравнението не е с рационални (цели) коефициенти и затова не можем да използваме теоремата за намиране на рационален корен. Нека разгледаме това уравнение като квадратно относно $\sqrt{2}$, т.е.

$$(\sqrt{2})^2 - x^2.\sqrt{2} + x^3 - x^2 = 0.$$

Дискриминантата му е

$$D = x^4 - 4(x^3 - x^2) = x^2(x^2 - 4x + 4) = x^2(x-2)^2 \geq 0.$$

Тогава съгласно формулата за корените на квадратно уравнение имаме

$$\sqrt{2} = \frac{x^2 \pm x(x-2)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} = x^2 - x, \quad \sqrt{2} = x.$$

Решенията на уравнението $x^2 - x - \sqrt{2} = 0$ са $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$. Третият корен е $x_3 = \sqrt{2}$. Уравнението може да се реши и с разлагане.

Намерете корените на уравнението

$$(x^4 - 8x^2 + 18)^4 + (x^2 + 4x + 7)^2 = 25.$$

Отделяме точни квадрати в двата израза отляво

$$\left((x^2 - 4)^2 + 2\right)^4 + \left((x + 2)^2 + 3\right)^2 = 25.$$

Разглеждаме функцията $f(x) = \left((x^2 - 4)^2 + 2\right)^4 + \left((x + 2)^2 + 3\right)^2$. Тъй като $(x^2 - 4)^2 + 2 \geq 2$ и $(x + 2)^2 + 3 \geq 3$, то е изпълнено $f(x) \geq 25$ за всяка реална стойност на x, като $f(x) = 25$ при $x = -2$. Следователно лявата страна уравнението не приема стойности, по-малки от 25 (дясната страна). Тогава уравнението има единствен корен (двоен корен) $x = -2$.

Други техники – монотонност на функция

Намерете корените на уравнението

$$x^7 + 7x - 8 = 0.$$

Вижда се, че $x = 1$ е корен на уравнението. Ще докажем, че това е единственият реален корен.

Разглеждаме функцията $f(x) = x^7 + 7x$ и уравнението добива вида $f(x) = 8$. За първата производна намираме $f'(x) = 7x^6 + 7 > 0$. Следователно $f(x)$ е строго растяща функция за $x \in (-\infty; +\infty)$ и непрекъсната в същия интервал.

Използваме, че уравнението $f(x) = c$, където $c = \mathrm{const.}$ и функцията $f(x)$ е строго растяща (намаляваща) и непрекъсната, може да има най-много един реален корен.
Следователно даденото уравнение има единствен корен $x = 1$.

Цели рационални неравенства – метод на интервалите

Нека $f(x)$ е полином на x от втора или по-висока степен. При решаване на неравенството $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$ се стремим да разложим $f(x)$ на произведение от линейни множители (и квадратни тричлени с отрицателни дискриминанти, за които припомняме, че приемат само положителни стойности за всяко реално x).

Метод на интервалите.

Нека е изпълнено $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)$, като $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Тогава нанасяме върху числовата ос корените a_1, a_2, ..., a_n на уравнението $f(x) = 0$. Във всеки интервал от вида $(-\infty; a_1)$, $(a_i; a_{i+1})$ и $(a_n; +\infty)$, всеки от линейните множители $x - a_j$ е знаково постоянен и следователно и тяхното произведение $f(x)$ също е с постоянен знак, който може да се определи. Знакът на $f(x)$ се променя алтернативно във всеки два съседни интервала, на които a_1, a_2, ..., a_n разделят числовата ос.
Ако старшият коефициент на $f(x)$ е положителен, то в последния интервал $(a_n; +\infty)$ полиномът $f(x)$ приема положителни стойности. В противен случай в този интервал $f(x)$ приема отрицателни стойности.

Цели рационални неравенства – метод на интервалите

Ако линейните множители, на които се разлага $f(x)$, са от нечетна степен, по-висока от първа – трета, пета и т.н., важат същите разсъждения – знакът на $f(x)$ се променя алтернативно във всеки два съседни интервала, на които a_1, a_2, ..., a_n разделят числовата ос.

Ако даден линеен множител $x - a_i$ участва в разлагането на $f(x)$ на четна степен – втора, четвърта и т.н., то при преминаване през a_i знакът на $f(x)$ се запазва.

Примери – в отделен файл (сканиран).

Цели рационални неравенства – полагане

Намерете решенията на неравенството

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) < 12.$$

Полагаме $t = x^2 + x$ и получаваме неравенството $(t + 1)(t + 2) - 12 < 0$, еквивалентно на $t^2 + 3t - 10 < 0$, т.е. $(t + 5)(t - 2) < 0$ с решения $-5 < t < 2$. Връщайки се в полагането, решаваме

$$-5 < x^2 + x < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + x - 2 < 0 \\ x^2 + x + 5 > 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} (x + 2)(x - 1) < 0 \\ x^2 + x + 5 > 0 \end{array} \right.$$

Решенията на първото неравенство от системата са $x \in (-2; 1)$, а на второто – всяко реално x.
Следователно отговорът на задачата е $x \in (-2; 1)$.

Цели рационални неравенства – полагане

Намерете решенията на неравенството

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) > 27.$$

Групирайки първи и четвъртия, както и втория и третия множител в лявата страна на неравенството, получаваме

$$(x^2-7x+6)(x^2-7x+12) > 27.$$

Нека положим $x^2-7x=t$. Неравенството приема вида $(t+6)(t+12) > 27$, т.е. $t^2+18t+45 > 0$, еквивалентно на $(t+15)(t+3) > 0$. Решенията са $t < -15$ или $t > -3$. Връщаме се в полагането и решаваме неравенствата

$$x^2-7x < -15 \;\Leftrightarrow\; x^2-7x+15 < 0, \quad \text{което няма решения;}$$

$$x^2-7x > -3 \;\Leftrightarrow\; x^2-7x+3 > 0,$$

с решения $x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{37}}{2}; +\infty\right)$, които са и решенията на задачата.

Дробно рационални уравнения

Уравнение, в което неизвестното се среща в знаменател, т.е. от вида

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + ... + \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = 0, \tag{1}$$

където $P_i(x)$ и $Q_i(x)$ са полиноми на x, се нарича дробно-рационално уравнение.

При решаването на този вид уравнения, първо се определя дефиницонната област (множество) на уравнението от условията: $Q_1(x) \neq 0$, $Q_2(x) \neq 0$,..., $Q_n(x) \neq 0$. Тук може да се наложи предварително разлагане на знаменателите.

Следващата стъпка е освобождаване от знаменатал чрез умножаване на двете страни на уравнението с най-малкото общо кратно на знаменателите.

След намиране на корените на полученото уравнение, се проверява дали те принадлежат на дефиниционната област на даденото уравнение. Онези от тях, които удовлетворяват това условие, са корени на даденото уравнение.

Пример

Намерете корените на уравнението

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{8}{x^3-4x}.$$

Даденото уравнение е еквивалентно на

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x(x-2)} = \frac{8}{x(x-2)(x+2)}.$$

Определяме Д.О.: $x \neq 0, \pm 2$. При тези стойности на x освобождаваме от знаменател чрез умножаване на двете страни на уравнението с $x(x-2)(x+2)$. Така получаваме

$$x(x-2) + x + 2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 3.$$

Проверяваме дали намерените стойности на x принадлежат на Д.О. на даденото уравнение. Тъй като $x_1 = -2 \notin$ Д.О., а $x_2 = 3 \in$ Д.О., то само $x = 3$ е корен на даденото уравнение.

Пример

Аналогично решете самостоятелно уравнението

$$\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}.$$

Отг. $x=3$.

Пример

Намерете корените на уравнението

$$\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}.$$

Даденото уравнение е еквивалентно на

$$\frac{2x-7}{(x-2)(x-7)}-\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-1}.$$

Д.О. е $x \neq 1, 2, 7$. След освобождаване от знаменател достигаме до

$$(2x-7)(x-1)-(x-7)=(x-2)(x-7) \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=0, \;\; x_2=1.$$

Тъй като $x_1 = 0 \in$ Д.О., а $x_2 = 1 \notin$ Д.О., то само $x = 0$ е корен на даденото уравнение.

Пример

Намерете корените на уравнението

$$\frac{5x^2}{x^2-1}+\frac{2x^2}{x^2-2x-3}=\frac{4x^2-9x}{x^2-4x+3}.$$

Преобразуваме уравнението по следния начин

$$\frac{5x^2}{(x-1)(x+1)}+\frac{2x^2}{(x+1)(x-3)}=\frac{x(4x-9)}{(x-1)(x-3)}.$$

Д.О. е $x\neq\pm1,3$. Вижда се, че $x=0$ е корен на уравнението. Тогава, отчитайки този факт, можем да разделим двете страни на горното уравниние на $x\neq0$ и да продължим да решаваме уравнението

$$\frac{5x}{(x-1)(x+1)}+\frac{2x}{(x+1)(x-3)}=\frac{4x-9}{(x-1)(x-3)}.$$

Сега освобождаваме от знаменател в горното уравнение при Д.О.

$$5x(x-3)+2x(x-1)=(4x-9)(x+1).$$

Пример

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

И двете намерени стойности не принадлежат на Д.О., затова единственият корен на даденото уравнение е $x = 0$.

Пример

Намерете корените на уравнението

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{6}{x+6}.$$

Д.О. на уравнението е $x \neq 1, 2, 3, -6$. Преобразуваме чрез групиране на второто и третото събираемо от лявата страна и привеждане под общ знаменател и същото за останалите две събираеми

$$\frac{5x-12}{(x-2)(x-3)}-\frac{5x-12}{(x-1)(x+6)}=0$$

$$(5x-12)(x-1)(x+6)-(5x-12)(x-2)(x-3)=0$$

$$(5x-12)(10x-12)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=\frac{12}{5}, \quad x_2=\frac{6}{5}.$$

Тъй като и двете намерени стойности за x принадлежат на Д.О., то те са корени на даденото уравнение.

Пример

Намерете корените на уравнението

$$\frac{x}{x^2-6}+\frac{x^2}{x-6}+2=0.$$

Д.О. е $x \neq \pm\sqrt{6}, 6$. Преобразуваме по следния начин

$$\frac{x}{x^2-6}+1+\frac{x^2}{x-6}+1=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2+x-6}{x^2-6}+\frac{x^2+x-6}{x-6}=0$$

$$(x^2+x-6)(x^2+x-12)=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=-3,\; x_2=2,\; x_3=-4,\; x_4=3.$$

Всички намерени стойности за неизвестното принадлежат на Д.О., затова са корени на даденото уравнение.

Пример

Намерете корените на уравнението

$$\frac{x^{17}-1}{1-x^{15}} = \frac{1-x^{15}}{x^{13}-1}.$$

Освобождаваме от знаменател уравнението при условието $x \neq 1$. Получаваме

$$(x^{17}-1)(x^{13}-1) = (1-x^{15})^2 \;\Leftrightarrow\; x^{30} - x^{17} - x^{13} + 1 = 1 - 2x^{15} + x^{30},$$

което е еквивалентно на

$$x^{17} - 2x^{15} + x^{13} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^{13}(x^4 - 2x^2 + 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^{13}(x^2-1) = 0.$$

Корените на последното уравнение са $x = 0$, $x = \pm 1$, от които $x = 0$ и $x = -1$ принадлежат на дефиниционната област.

Пример – с полагане

Намерете корените на уравнението

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1.$$

Полагаме $x^2 - x = t$, при което уравнението добива вида

$$\frac{t}{t+1} - \frac{t+2}{t-2} = 1.$$

Определяме Д.О.: $t \neq -1, 2$. При тази Д.О. освобождаваме от знаменател горното уравнение и получаваме

$$t(t-2) - (t+1)(t+2) = (t+1)(t-2) \;\Leftrightarrow\; t^2 + 4t = 0 \;\Leftrightarrow\; t_1 = 0,\; t_2 = -4.$$

И двете намерени стойности за t принадлежат на Д.О., затова се връщаме и с двете стойности в полагането.

$$x^2 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 1,$$

$$x^2 - x = -4 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x + 4 = 0 \;\text{ няма реални корени.}$$

Пример – с полагане

Намерете корените на уравнението

$$\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{18}{x^2+2x+1}.$$

Положете $t=x^2+2x$, след което ще достигнете до

$$\frac{1}{t-3}+\frac{18}{t+2}=\frac{18}{t+1}$$

с Д.О. $t \neq -2, -1, 3$.

Пример – с монотонност на функции

Намерете корените на уравнението

$$x^3 + 3x = \frac{28}{x}.$$

При $x \neq 0$ се освобождаваме от знаменателя и решаваме биквадратното уравнение $x^4 + 3x^2 - 28 = 0$.
Нека разгледаме друг начин. Д.О. на уравнението е $x \neq 0$. Нека разгледаме функциите

$$f(x) = x^3 + 3x, \qquad g(x) = \frac{28}{x}.$$

Тъй като $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ за всяка стойност на x, то функцията $f(x)$ е строго растяща (и непрекъсната върху реалната ос). Тъй като $g'(x) = -\frac{28}{x^2} < 0$ за всяко $x \neq 0$, то функцията $g(x)$ е строго намаляваща в дефиниционната си област и непрекъсната върху всеки от интервалите $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Използваме, че уравнение от вида $f(x) = g(x)$, където функциите $f(x)$ и $g(x)$ са от различни монотонности (едната е растяща, а другата – намаляваща) и непрекъснати, има най-много един корен.

Пример – с монотонност на функции

Разглеждаме уравнението за $x \in (0; +\infty)$. С директно заместване се проверява, че $x = 2$ удовлетворява уравнението, т.е. че $f(2) = g(2) = 14$. Следователно $x = 2$ е единственият корен на уравнението в този интервал.

Разглеждаме уравнението за $x \in (-\infty; 0)$. С директно заместване се проверява, че $x = -2$ удовлетворява уравнението, т.е. че $f(-2) = g(-2) = -14$. Следователно $x = -2$ е единственият корен на уравнението в този интервал.

Следователно уравнението има два корена: $x = -2$ и $x = 2$.

Дробно рационални неравенства

Неравенство, в което неизвестното се среща в знаменател, т.е. от вида

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + ... + \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} > 0 \ (< 0), \qquad (2)$$

където $P_i(x)$ и $Q_i(x)$ са полиноми на x, се нарича дробно рационално неравенство.

За решаване на неравенства от този вид лявата страна се привежда под общ знаменател, числителят и знаменателят се разлагат на множители и се прилага методът на интервалите, при което се прилага Д.О. – знаменателят не трябва да се анулира.

Литература

- Рангелова, П., Сборник по математика 9. – 12. клас с методични указания, Макрос, Пловдив, 2006.
- Веселаго И.А., Алгебра для школьников и абитуриентов, ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- Золотарева Н.Д., Попов Ю.А., Сазонов В.В., Алгебра – базовый курс с решениями и указаниями, БИНОМ, Москва, 2015.
- Золотарева Н.Д., Попов Ю.А., Семендяева Н.Л., Федотов М.В., Алгебра – углубленный курс с решениями и указаниями, 2011.
- Киселёв, А.П., Алгебра, ч. I, ч. II, Физматлит, 2006.
- Лурье М.В., Алгебра – техника решения задач, 2005.
- Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., Алгебрический тренажер, ИЛЕКСА, Москва, 2007.
- Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И., Уравнения и неравенства. нестандартные методы решения: справочник.
- Шестаков С.А., Уравнения и системы уравнений, Изд. МЦНМО, Москва, 2018.
- Шестаков С.А., Неравенства и системы неравенств, Изд. МЦНМО, Москва, 2018.