Определете знаците на корените на уравнението $x^2 + (a-9)x + a - 1 = 0$ в зависимост от стойностите на $a \in \mathbb{R}$.

Намираме:

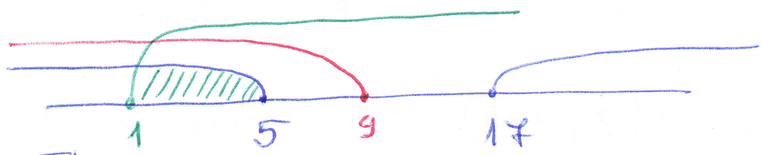
$$\left| \begin{aligned} & D = (a-9)^2 - 4(a-1) = a^2 - 22a + 85 = (a-5)(a-17) \\ & x_1 + x_2 = -(a-9) = 9 - a \\ & x_1 x_2 = a - 1 \end{aligned} \right.$$

1) Уравнението има корени с различни знаци $\Leftrightarrow$

$x_1 x_2 = a - 1 < 0 \Leftrightarrow \boxed{a < 1}$

2) Уравнението има два положителни корена $\Leftrightarrow$

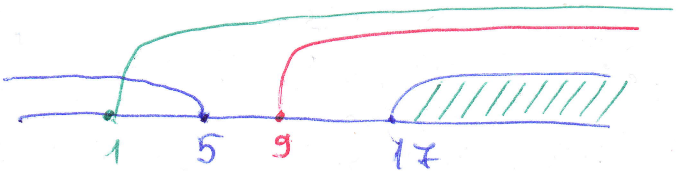
$$\left| \begin{aligned} & D = (a-5)(a-17) > 0 \Leftrightarrow a < 5 \text{ или } a > 17 \\ & x_1 + x_2 = 9 - a > 0 \Leftrightarrow a < 9 \\ & x_1 x_2 = a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > 1 \end{aligned} \right.$$



$\boxed{a \in (1; 5)}$

3) Уравнението има два отрицателни корена $\Leftrightarrow$

$$\left| \begin{aligned} & D = (a-5)(a-17) > 0 \Leftrightarrow a < 5 \text{ или } a > 17 \\ & x_1 + x_2 = 9 - a < 0 \Leftrightarrow a > 9 \\ & x_1 x_2 = a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > 1 \end{aligned} \right.$$



$\boxed{a \in (17; +\infty)}$

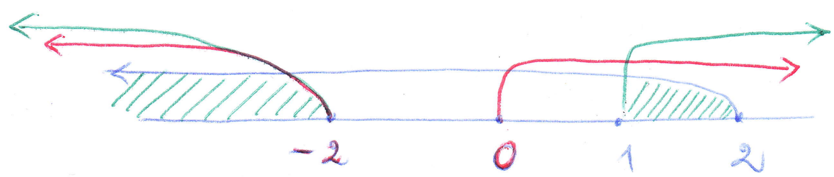
Намерете стойностите на реалния параметър p, за които уравнението $(p+2)x^2+2px+p-1=0$ има два различни отрицателни корена.

$$x_1<x_2<0 \iff \left|\begin{array}{l} D>0 \\ x_1+x_2<0 \\ x_1x_2>0 \end{array}\right.$$

$$D=p^2-(p-1)(p+2)=p^2-(p^2+p-2)=2-p$$

$$x_1+x_2=-\frac{2p}{p+2}\ ; \quad x_1x_2=\frac{p-1}{p+2} \quad \text{(Виет)}$$

$$\left|\begin{array}{l} D=2-p>0 \\ x_1+x_2=-\dfrac{2p}{p+2}<0 \\ x_1x_2=\dfrac{p-1}{p+2}>0 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} p<2 \\ \dfrac{p}{p+2}>0 \iff \underline{p(p+2)>0} \\ \underline{(p-1)(p+2)>0} \end{array}\right.$$



Отговор: $p\in(-\infty;-2)\cup(1;2)$

Тук използвахме, че дробно-рационалното строго неравенство

$$\frac{ax+b}{cx+d}>0 \iff \underbrace{(ax+b)(cx+d)}_{\substack{\text{квадратен тричлен} \\ \text{с корени } x_1=-\frac{b}{a} \text{ и } x_2=-\frac{d}{c} \\ \text{при } a,c\neq 0.}}>0 \quad \text{квадратно неравенство}$$

Аналогично,

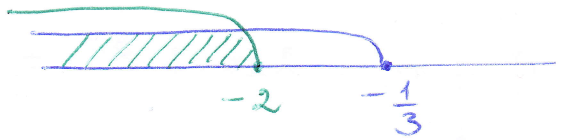
$$\frac{ax+b}{cx+d}<0 \iff (ax+b)(cx+d)<0.$$

Ако неравенството е нестрого, от решенията се изключват нулите на знаменателите.

$$|x-3| + |3x+1| > 10$$

1) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$: $|x-3| = 3-x$, $|3x+1| = -3x-1 \Rightarrow$

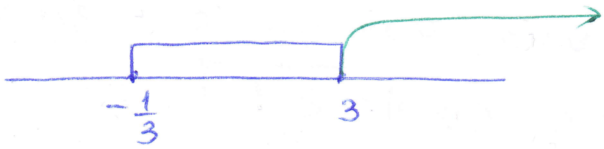
$3 - x - 3x - 1 > 10 \Leftrightarrow 4x < -8 \Leftrightarrow x < -2$



$\Rightarrow x \in (-\infty; -2)$

2) $x \in \left[-\frac{1}{3}; 3\right]$: $|x-3| = 3-x$, $|3x+1| = 3x+1 \Rightarrow$

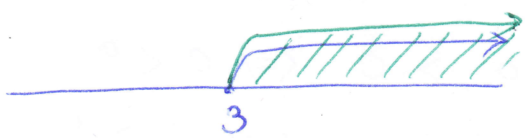
$3 - x + 3x + 1 > 10 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$



$\Rightarrow x \in \emptyset$

3) $x \in (3; +\infty)$: $|x-3| = x-3$, $|3x+1| = 3x+1$

$x - 3 + 3x + 1 > 10 \Leftrightarrow 4x > 12 \Leftrightarrow x > 3$



$\Rightarrow x \in (3; +\infty)$

Обединяваме получените решения от 1), 2) и 3) $\Rightarrow$

$\boxed{x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)}$ са решенията на даденото неравенство.