Училищен курс по алгебра

Лекция 2.

Уравнения и неравенства с неизвестни. Линейни и квадратни уравнения и неравенства и свеждащи се до тях

специалности: МИИТ, ИТМОМ, 3 курс

лектор: Марта Теофилова

Равенство, в което участва една неизвестна величина (число), означено с буква, се нарича **уравнение с едно неизвестно.**

Корен (решение) на уравнение с едно неизвестно е всяко (реално) число, което принадлежи на дефиниционната област на уравнението и заместено в него, го превръща във вярно тъждество.

Да се реши дадено уравнение означава да бъдат намерени всички негови корени или да бъде установено, че уравнението няма решения.

Еквивалентни уравнения

Уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ се наричат еквивалентни върху дадено числово множество M, ако множествата от решенията им съвпадат върху M. Обикновено за M се разглежда сечението да дефиниционните области на двете уравнения, т.е. на функциите $f(x)$ и $g(x)$.

Еквивалентни преобразувания в уравнение са:

- прехвърляне на израз (събираемо) от едната страна в другата страна на уравнението с противоположен знак;
- умножаване на двете страни на уравнението с израз, различен от нула (с отчитане на дефиниционните области на уравнението и на израза);
- заместване на израз от уравнението с друг израз, тъждествено равен на него.

Линейни уравнения

Нормален вид на линейно уравнение (6. клас)

$$ax + b = 0, \tag{1}$$

където a и b са коефициенти, а x е търсеното неизвестно. Еквивалентен запис $ax = -b$.

При $a \neq 0$ уравнението има единствено решение $x = -\frac{b}{a}$.

При $a = 0$ и $b \neq 0$ уравнението няма решения.

При $a = b = 0$ всяко реално число x е решение на уравнението.

Разложено квадратно уравнение (7. клас) от вида

$$(ax + b)(cx + d) = 0. \tag{2}$$

Решенията му са обединение на решенията на уравненията $ax + b = 0$ и $cx + d = 0$.

Линейни модулни уравнения

Функцията модул на реално число (аналитичен израз) $|\ .\ |$ се дефинира чрез

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{ако } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{ако } f(x) < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Изпълнено е $|f(x)| = |-f(x)|$ и $|f(x)| \geq 0$ за всяко реално x.

Линейно модулно уравнения (7. клас)

$$|ax + b| = c. \tag{4}$$

При $c < 0$ уравнението няма решения.

При $c = 0$ уравнението е еквивалентно на $ax + b = 0$.

При $c > 0$ решенията на уравнението са обединение от решенията на уравненията $ax + b = c$ и $ax + b = -c$.

Примери

$$(2x+3)(x-5)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+3=0 \ \text{ или } \ x-5=0. \tag{5}$$

Решения: $x_1 = -\frac{3}{2}$ и $x_2 = 5$.

$$|3x-2|=5 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-2=5 \ \text{ или } \ 3x-2=-5, \tag{6}$$

откъдето корените на уравнението са: $x_1 = \frac{7}{3}$ и $x_2 = -1$.

Линейни неравенства

Линейно неравенство (7. клас)

$$ax + b > 0 \quad (\text{или} \quad ax + b < 0). \tag{7}$$

Първото неравенство е еквивалентно на $ax > -b$.

При $a > 0$ решенията му са $x > -\frac{b}{a}$.

При $a < 0$ решенията му са $x < -\frac{b}{a}$.

Примери:

$$\begin{aligned} &2x - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \tfrac{3}{2} \\ &-2x - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

Линейно модулно неравенство (9. клас)

$$|ax+b| < c, \quad c > 0 \tag{9}$$

е еквивалентно на системата от двете неравенства

$$-c \ < \ ax+b \ < \ c. \tag{10}$$

При $c \leq 0$ даденото неравенство няма решения.

Линейно модулно неравенство (9. клас)

$$|ax+b| > c, \quad c > 0 \tag{11}$$

е еквивалентно на обединението на решенията на двете неравенства по-долу, т.е.

$$ax+b \ > \ c \ \text{ или } \ ax+b \ < \ -c. \tag{12}$$

При $c < 0$ всяко реално x е решение на даденото неравенство. При $c = 0$ решенията са всички стойности, за които $ax+b \neq 0$.

Примери

$$|x-5|<6 \quad \Leftrightarrow \quad -6<x-5<6 \quad \Leftrightarrow \quad -1<x<11. \tag{13}$$

Решенията можем да запишем във вида $x \in (-1; 11)$.

$$|x-5|\leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad -6\leq x-5\leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad -1\leq x\leq 11. \tag{14}$$

Решенията можем да запишем във вида $x \in [-1; 11]$.

$$|x-5|>6 \quad \Leftrightarrow \quad x-5>6 \;\text{ или }\; x-5<-6, \tag{15}$$

които неравенства са съответно еквивалентни на $x > 11$ и $x < -1$. Тогава решенията на даденото неравенство са $x \in (-\infty; -1) \cup (11; +\infty)$.

Реалното неотрицателно число b, за което $b^2 = a$, се нарича квадратен корен (корен втори) от числото a и записваме $b = \sqrt{a}$.

Свойства:

- $\sqrt{a^2} = |a|$;
- ако $b \geq 0$, то $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$;
- ако $b \geq 0$, то $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ при $a \geq 0$ и $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$ при $a < 0$;
- ако $a, b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$;
- ако $a > 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$;

  Сбор и разлика не се коренуват!
- ако $0 \leq a \leq b$, то $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ ($f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, е строго растяща функция).

Уравнение от вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

се нарича квадратно уравнение на неизвестното x.

Ако някои от коефициентите b или c са равни на нула, то квадратното уравнение се нарича непълно.

При $b \neq 0$, $c = 0$ имаме $ax^2 + bx = 0$, което е еквивалентно на $x(ax + b) = 0$ с корени $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$.

При $b = 0$, $c \neq 0$ имаме $ax^2 + c = 0$. Ако $a > 0$ и $c < 0$, то получаваме $ax^2 = -c$ с корени $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Ако $a > 0$ и $c > 0$, то уравнението няма реални корени, тъй като $ax^2 + c > 0$ за всяко реално x при тези условия.

Ако $b = c = 0$, то имаме $ax^2 = 0$ с единствен корен $x = 0$.

Квадратно уравнение – 8. клас

Уравнението $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ е еквивалентно на

$$\begin{aligned} & x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x + \tfrac{c}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x + \tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{c}{a} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 = \tfrac{b^2-4ac}{4a^2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Тъй като изразът в лявата страна на уравнението е неотрицателен за всяко x и $a^2 > 0$, то квадратното уравнение има реални корени, точно когато числото $D = b^2 - 4ac \geq 0$. Числото D се нарича дискриминанта на квадратното уравнение.
При $D > 0$ уравнението има два различни реални корена (Брахмагупта)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{18}$$

При $D = 0$ уравнението има един (двоен) корен $x = -\frac{b}{2a}$.

При $D < 0$ уравнението няма реални корени (има двойка комплексно спрегнати корени).

При $b = 2k$ (четно число) може да се използва т. нар. съкратена формула за намирането на корените на квадратното уравнение.

Тъй като в този случай $\sqrt{D} = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{4k^2 - 4ac} = 2\sqrt{k^2 - ac}$, то

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \tag{19}$$

Пример

$$\begin{aligned} &x^2 + 2x - 8 = 0 \\ &x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 2. \end{aligned} \tag{20}$$

Разлагане на квадратния тричлен. Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{21}$$

Пример

Намерете стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$(a-1)x^2 - 2(a+1)x + a - 2 = 0$$

има два различни реални корена.

При $a - 1 = 0$, т.е. $a = 1$, уравнението не е квадратно – линейно уравнение с един корен $x = -\frac{1}{4}$.

Разглеждаме уравнението при $a \neq 1$. Имаме

$$D = (a+1)^2 - (a-1)(a-2) = 5a - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > \frac{1}{5}.$$

Тогава отговорът на задачата е $a \in \left(\frac{1}{5}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Пример

Намерете броя на корените на уравнението

$$ax^2 - x - (a+1) = 0$$

в зависимост от стойностите на реалния параметър a.

При $a = 0$ уравнението приема вида $x + 1 = 0$ и има единствен корен $x = -1$.

При $a \neq 0$ имаме

$$D = 1 + 4a(a+1) = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2 \geq 0 \text{ за всяко } a \in \mathbb{R}.$$

Тогава при $a = -\frac{1}{2}$ имаме $D = 0$ и уравнението има двоен корен $x = -1$, а при $a \neq -\frac{1}{2}$ имаме $D > 0$ и уравнението има два различни корена.

Отговор:
1 корен при $a = -\frac{1}{2}$, $a = 0$;
2 корена при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

Формули на Виет

Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), то са в сила следните равенства (формули на Виет)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \tag{22}$$

Формулите на Виет (правата теорема на Виет) се доказват с директно заместване на корените от формулата на Брахмагупта в равенствата (22).

Обратна теорема на Виет. Числата x_1 и x_2, за които

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 x_2 = q, \tag{23}$$

са корените на квадратното уравнение $x^2 + px + q = 0$.

Доказателството се извършва, като се използва, че x_1 и x_2 са корените на уравнението $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, което е еквивалентно на
$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$.

Пример

Съставете квадратно уравнение с корени $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$.

От формулите на Виет имаме $x_1 + x_2 = -2 = -p$ и $x_1 x_2 = -15 = q$. Тогава дадените числа са корените на уравнението $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Друг начин е да запишем, че дадените числа са корените на $(x+5)(x-3) = 0$, което е еквивалентно на $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Дадено е квадратното уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$. Да се намери квадратно уравнение, чиито корени са равни на квадратите на корените на даденото уравнение.

От формулите на Виет за корените на даденото уравнение имаме $x_1 + x_2 = 5$ и $x_1 x_2 = 6$. Търсим квадратно уравнение с корени $y_1 = x_1^2$ и $y_2 = x_2^2$. Имаме

$$y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 13, \quad y_1 y_2 = x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = 36.$$

Тогава търсеното уравнение е $y^2 - 13y + 36 = 0$.

Пример

Дадено е квадратното уравнение $x^2 - (a+3)x + a = 0$, където $a \in \mathbb{R}$, с корени x_1 и x_2. Намерете най-малката стойност, която приема изразът $x_1^2 + x_2^2$.

За дискриминантата на квадратното уравнение пресмятаме

$$D = (a+3)^2 - 4a = a^2 + 2a + 9 = (a+1)^2 + 8 \geq 8 > 0,$$

следователно уравнението има два различни реални корена за всяка стойност на a. Съгласно формулите на Виет имаме

$$x_1 + x_2 = a + 3, \qquad x_1 x_2 = a,$$

откъдето

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a+3)^2 - 2a = a^2 + 4a + 9 \\ &= (a+2)^2 + 5 \geq 5. \end{aligned}$$

Следователно най-малката стойност на израза $x_1^2 + x_2^2$ е 5 и тя се достига при $a = -2$.

Пример

Дадено е квадратното уравнение $x^2 - 2(a+1)x + 4a^2 = 0$, където $a \in \mathbb{R}$, с корени x_1 и x_2. Намерете най-голямата стойност на израза $x_1^2 + x_2^2$.

За дискриминантата на квадратното уравнение пресмятаме

$$D = (a+1)^2 - 4a^2 = (a+1-2a)(a+1+2a) = (3a+1)(1-a) \geq 0,$$

точно когато $(3a+1)(a-1) \leq 0$, точно когато $a \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$. За тези стойности на параметъра a уравнението има реални корени. Съгласно формулите на Виет имаме

$$x_1 + x_2 = 2(a+1), \qquad x_1 x_2 = 4a^2,$$

откъдето

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(a+1)^2 - 8a^2 = -4a^2 + 8a + 4$$
$$= 8 - 4(a-1)^2 \leq 8.$$

Следователно най-голямата стойност на израза $x_1^2 + x_2^2$ е 8 и тя се достига при $a = 1$.

Пример

Дадено е квадратното уравнение $x^2 - 2ax + 3a - 2 = 0$. Намерете стойностите на реалния параметър a, за които сумата на корените на уравнението е равна на сумата на кубовете им.

Пресмятаме дискриминантата на уравнението

$$D = a^2 - 3a + 2 \quad \Rightarrow \quad D \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a^2 - 3a + 2 \geq 0,$$

точно когато $a \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. За тези стойности на параметъра уравнението има 2 реални корена.
Нека означим корените с x_1 и x_2. Тогава условието за тях е

$$x_1 + x_2 = x_1^3 + x_2^3 \;\Leftrightarrow\; x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)$$

$$x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2\right)$$

$$(x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 - 1\right) = 0.$$

Пример

От формулите на Виет имаме

$$x_1 + x_2 = 2a, \qquad x_1 x_2 = 3a - 2,$$

които заместваме в условието за корените и получаваме

$$2a(4a^2 - 9a + 5) = 0.$$

Корените на уравнението са $a_1 = 0 \in$ Д.О., $a_2 = 1 \in$ Д.О. и $a_3 = \frac{5}{4} \notin$ Д.О. Следователно решения на задачата са $a = 0$ и $a = 1$. При $a = 0$ корените на уравнението са $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, а при $a = 1$ уравнението има двоен корен $x = 1$.

Знаци на корените на квадратно уравнение

Квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ има два различни корена x_1 и x_2 с еднакви знаци, точно когато

$$D > 0, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0. \tag{24}$$

Двата корена са положителни, точно когато

$$D > 0, \qquad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0. \tag{25}$$

Двата корена са отрицателни, точно когато

$$D > 0, \qquad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0. \tag{26}$$

Квадратното уравнение $ax^2+bx+c = 0$ $(a \neq 0)$ има корени x_1 и x_2 с различни знаци, точно когато

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0. \tag{27}$$

От последното условие следва, че $D = b^2 - 4ac > 0$.

Пример

Определете знаците на корените на квадратното уравнение $x^2 + (a-9)x + a - 1 = 0$ в зависимост от стойностите на реалния параметър a.

Намираме

$$D = (a-9)^2 - 4(a-1) = a^2 - 22a + 85 = (a-5)(a-17)$$

$$x_1 + x_2 = -(a-9) = 9 - a, \qquad x_1 x_2 = a - 1.$$

1) Уравнението има корени с различни знаци, точно когато

$$x_1 x_2 = a - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < 1.$$

Пример

2) Уравнението има два различни положителни корена, точно когато

$$\left| \begin{array}{lll} D = (a-5)(a-17) > 0 & \Leftrightarrow & a < 5 \cup a > 17 \\ x_1 + x_2 = 9 - a > 0 & \Leftrightarrow & a < 9 \\ x_1 x_2 = a - 1 > 0 & \Leftrightarrow & a > 1. \end{array} \right.$$

Три условия са изпълнени едновременно при $a \in (1; 5)$.

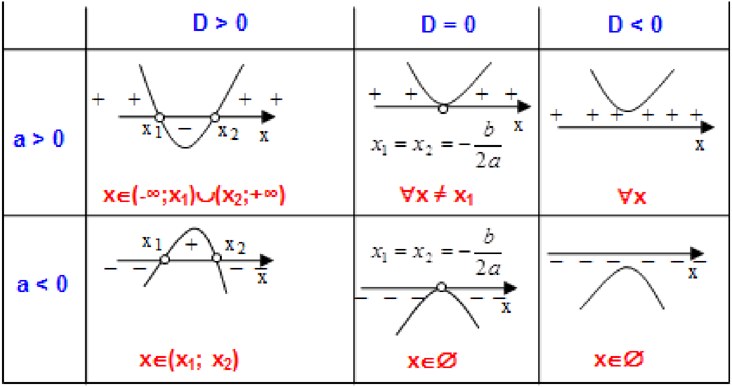
3) Уравнението има два различни отрицателни корена, точно когато

$$\left| \begin{array}{lll} D = (a-5)(a-17) > 0 & \Leftrightarrow & a < 5 \cup a > 17 \\ x_1 + x_2 = 9 - a < 0 & \Leftrightarrow & a > 9 \\ x_1 x_2 = a - 1 > 0 & \Leftrightarrow & a > 1. \end{array} \right.$$

Три условия са изпълнени едновременно при $a \in (17; +\infty)$.

При $a > 0$ квадратната функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ е изпъкнала (отдолу), при $a < 0$ е вдлъбната.

Решенията на квадратното неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, $a \neq 0$ (9. клас).



Примери

Намерете решенията на квадратното неравенство

$$x^2 + x - 6 > 0.$$

Корените на съответното квадратно уравнение са $x_1 = -3$ и $x = 2$. Следователно неравенството е еквивалентно на $(x-2)(x+3) > 0$, чиито решения са $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

Намерете решенията на квадратното неравнство

$$x^2 - 9x + 20 \leq 0.$$

Корените на съответното квадратно уравнение са $x_1 = 4$ и $x = 5$. Следователно неравенството е еквивалентно на $(x-4)(x-5) \leq 0$, чиито решения са $x \in [4; 5]$.

Запазване на знака на квадратния тричлен

За квадратния тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ е изпълнено:

- $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$, точно когато

$$\left| \begin{array}{l} a > 0, \\ D < 0; \end{array} \right. \tag{28}$$

- $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$, точно когато

$$\left| \begin{array}{l} a < 0, \\ D < 0; \end{array} \right. \tag{29}$$

Пример

Намерете стойностите на реалния параметър a, за които

$$(a+1)x^2 + 2(a-1)x + a - 2 > 0$$

за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Намираме

$$\left| \begin{array}{l} a+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad a>-1 \\ D=(a-1)^2-(a+1)(a-2)=3-a<0 \quad \Leftrightarrow \quad a>3. \end{array} \right.$$

Горната система от неравенства е еквивалентна на $a \in (3; +\infty)$.

Разположение на корените на квадратно уравнение върху числовата ос

Нека $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ е квадратен тричлен с реални коефициенти и $p \in \mathbb{R}$. В сила са твърденията:

1) Квадратното уравнение $f(x) = 0$ има два различни корена $x_1 < x_2$ и $x_1 < p < x_2$, точно когато

$$af(p) < 0. \tag{30}$$

2) Квадратното уравнение $f(x) = 0$ има два различни корена x_1 и x_2, по-големи от числото p $(p < x_1 < x_2)$, точно когато

$$D = b^2 - 4ac > 0, \quad af(p) > 0, \quad p < \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}. \tag{31}$$

3) Квадратното уравнение $f(x) = 0$ има два различни корена x_1 и x_2, по-малки от числото p $(x_1 < x_2 < p)$, точно когато

$$D = b^2 - 4ac > 0, \quad af(p) > 0, \quad p > \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}. \tag{32}$$

Доказателство. Използваме, че

$$\frac{1}{4}D = \left(pa + \frac{b}{2}\right)^2 - af(p), \qquad af(p) = a^2(p - x_1)(p - x_2). \tag{33}$$

1) От първото равенство в (33) и $af(p) < 0$ следва, че $D > 0$, т.е. уравнението има два различни реални корена, а от $af(p) < 0$ и второто тъждество в (33) следва, че p се намира между корените.

2) и 3) От $af(p) > 0$ и второто тъждество в (33) следва, че числото p не се намира между корените на уравнението (или е по-малко, или е по-голямо от тях).
От формулите на Виет следва, че $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

Тогава $p < x_1 < x_2$, когато $p < \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$

и $x_1 < x_2 < p$, когато $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a} < p$.

Пример

Намерете стойностите на реалния параметър p, за които корените x_1, x_2 на квадратното уравнение $x^2+(2p-11)x+24-6p=0$ удовлетворяват условието $x_1<2<x_2$.

Нека $f(x) = x^2 + (2p - 11)x + 24 - 6p$. Пресмятаме $f(2) = 2(3 - p)$. Тогава уравнението има два различни реални корена, за които числото 2 се намира между тях, точно когато $af(2) = 2(3 - p) < 0$, т.е. $p > 3$.

Пример

Намерете стойностите на реалния параметър p, за които корените x_1, x_2 на квадратното уравнение $x^2 - 12x + p + 32 = 0$ удовлетворяват условието $x_1 < x_2 < 7$.

Нека $f(x) = x^2 - 12x + p + 32$. Намираме

$$\left|\begin{array}{l} D = 4 - p > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p < 4 \\ af(7) = p - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p > 3 \\ \frac{x_1+x_2}{2} = 6 < 7 \text{ за всяко } p \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Тогава горните три условия са изпълнени едновременно, точно когато $p \in (3; 4)$.

Пример

Намерете стойностите на реалния параметър p, за които корените x_1, x_2 на квадратното уравнение $x^2 + (p-9)x + p - 1 = 0$ удовлетворяват условието $1 < x_1 < x_2$.

Нека $f(x) = x^2 + (p-9)x + p - 1$. Намираме

$$\left|\begin{array}{l} D = (p-9)^2 - 4(p-1) = (p-5)(p-17) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p < 5 \,\cup\, p > 17 \\ af(1) = 2p - 9 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p > \frac{9}{2} \\ \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{p-9}{2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - p > 2 \quad \Leftrightarrow \quad p < 7. \end{array}\right.$$

Решенията на горната система от неравенства са $p \in \left(\frac{9}{2}; 5\right)$.

Още задачи за квадратен тричлен

Намерете решенията (x, y) на уравнението

$$2x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Нека разгледаме уравнението като квадратно относно x (с параметър y), т.е.

$$2x^2 - 2(y+1)x + 5y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Дискриминантата му е

$$D = (y+1)^2 - 2(5y^2 - 2y + 1) = -9y^2 + 6y - 1 = -(3y-1)^2 \leq 0.$$

За да има уравнението реални решения за x, трябва $D \geq 0$. Следователно единствената възможност уравнението да има реални корени е $D = 0$, т.е. $y = \frac{1}{3}$. При тази стойност на y уравнението има двоен корен за x, който е $x = \frac{2}{3}$.
Отговор: $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Решете самостоятелно $5x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 2y + 1 = 0.$

Още задачи за квадратен тричлен

Намерете решенията на уравнението

$$x^2y - x^2 + 4xy + 6y - 2x = 3,$$

за които y приема най-малка стойност.

Нека разгледаме уравнението като квадратно относно x с параметър y

$$(y-1)x^2 + 2(2y-1)x + 6y - 3 = 0.$$

При $y = 1$ уравнението е линейно относно x с единствен корен $x = -\frac{3}{2}$. При $y \neq 1$ уравнението е квадратно и за да има реални решения, трябва дискриминантата му да бъде неотрицателна

$$D = (2y-1)^2 - (y-1)(6y-3) = (2y-1)^2 - 3(y-1)(2y-1) = (2y-1)(2-y) \geq 0,$$

еквивалентно на $(2y-1)(y-2) \leq 0$ с решения $y \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Следователно най-малката стойност на y, за която уравнението има решения, е $y = \frac{1}{2}$. За тази стойност се установява, че уравнението има двоен корен $x = 0$.

Още задачи за квадратен тричлен

Намерете най-голямата стойност на реалния параметър a, за която съществува поне една двойка реални числа (x, y), такива че

$$x^2 + 2y^2 + xy - ax + ay + a^2 \leq 3.$$

Нека разгледаме неравенството като квадратно неравенство относно x

$$x^2 + (y - a)x + 2y^2 + ay + a^2 - 3 \leq 0.$$

Необходимо и достатъчно условие, за да има поне едно решение за x, е дискриминантата на квадратния тричлен да е неотрицателна, т.е.

$$D = (y - a)^2 - 4(2y^2 + ay + a^2 - 3) = -7y^2 - 6ay - 3a^2 + 12 \geq 0,$$

равносилно на $7y^2 + 6ay + 3a^2 - 12 \leq 0$. Последното неравенство е квадратно неравенство относно y, за което прилагаме същите разсъждения – необходимо и достатъчно условие да има поне едно решение, е дискриминантата му да е неотрицателна, т.е.

$$D_1 = 9a^2 - 7(3a^2 - 12) = -12a^2 + 84 \geq 0 \iff a^2 - 7 \leq 0$$

с решения $a \in [-\sqrt{7}; \sqrt{7}]$. Тогава най-голямата стойност на параметъра, за която е изпълнено условието на задачата, е $a = \sqrt{7}$.

Още задачи за квадратен тричлен

Намерете най-малката стойност на израза

$$x^2 + 4xy + 16y^2 - 2x - 16y + 9.$$

Нека означим $x^2+4xy+16y^2-2x-16y+9 = a$, където a е реално число. Тогава условието на задачата е еквивалентно на следното – да се намери най-малката стойност на реалния параметър a, за която уравнението

$$x^2 + 4xy + 16y^2 - 2x - 16y + 9 - a = 0$$

има поне едно решение (x, y). Разглеждаме уравнението като квадратно относно x

$$x^2 + 2(2y-1)x + 16y^2 - 16y + 9 - a = 0$$

с дискриминанта

$$D = (2y-1)^2 - 16y^2 + 16y - 9 + a = -(12y^2 - 12y + 8 - a) \geq 0,$$

еквивалентно на $12y^2 - 12y + 8 - a \leq 0$.

За има решения това квадратно неравенство относно y, трябва дискриминантата му да е неотрицателна, т.е.

$$D_1 = 36 - 12(8 - a) = 12(a - 5) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a \geq 5.$$

Следователно търсената най-малка стойност на дадения израз е 5 и тя се достига при $y = \frac{1}{2}$ и $x = 0$.

Биквадратно уравнение

Уравнение от вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0, \tag{34}$$

се нарича биквадратно уравнение. Чрез полагането $t = x^2 \geq 0$ се свежда до квадратното уравнение $at^2 + bt + c = 0$.

Уравнение от вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{35}$$

се свежда чрез полагането $t = x^n$ до квадратното уравнение $at^2 + bt + c = 0$, като при n четно число е в сила $t = x^n \geq 0$.

Пример. Намерете корените на уравнението $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.
Полагаме $t = x^2 \geq 0$ и получаваме $t^2 - 5t - 36 = 0$ с корени $t_1 = -4 \notin$ Д.О. и $t_2 = 9 \in$ Д.О. Тогава, връщайки се в полагането, получаваме $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

Уравнения с полагане

Решете уравнението

$$(x^2 - x)^2 - 18(x^2 - x - 2) + 36 = 0.$$

Полагаме $x^2 - x = y$. Получаваме $y^2 - 18y + 72 = 0$ с корени $y_1 = 6$ и $y_2 = 12$. Връщайки се в полагането, решаваме уравненията

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0, \qquad x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3) = 0.$$

Следователно корените на даденото уравнение са $x = -2, 3, -3, 4$.

Уравнения с полагане

Решете уравнението

$$(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55.$$

Даденото уравнение е еквивалентно на

$$(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x + 1) = 55.$$

Полагаме $x^2 + 2x = y$ и достигаме до $y^2 - y - 56 = 0$ с корени $y_1 = 8$ и $y_2 = -7$. Връщайки се в полагането, намираме

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -4,\ x_2 = 2$$

$$x^2 + 2x + 7 = 0 \ \text{ няма реални корени.}$$

Уравнения с полагане

Решете уравнението

$$x(x+3)(x+5)(x+8)=100.$$

Комбинираме първия с последния и втория с третия множител в лявата страна на уравнението и получаваме

$$(x^2+8x)(x^2+8x+15)=100.$$

В последното уравнение полагаме $y=x^2+8x$ и достигаме до $y^2+15y-100=0$ с корени $y_1=-20$ и $y_2=5$. Довършете задачата.

Уравнения с полагане

Намерете корените на уравнението

$$2(x-3)^2 - 5|x-3| + 2 = 0.$$

Тъй като $|x-3|^2 = (x-3)^2$, то полагаме $t = |x-3| \geq 0$ и достигаме до уравнението

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; t_1 = 2,\; t_2 = \frac{1}{2}.$$

Връщайки се в полагането, получаваме

$$|x-3| = 2 \;\Leftrightarrow\; x-3 = 2 \text{ или } x-3 = -2 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 5,\; x_2 = 1$$

$$|x-3| = \tfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x-3 = \tfrac{1}{2} \text{ или } x-3 = -\tfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x_3 = \tfrac{7}{2},\; x_4 = \tfrac{5}{2}.$$

Уравнения с полагане

Решете уравнението
$$\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{2x-2} = -\frac{5}{2}.$$
Аналитичният израз в лявата страна на уравнението е дефиниран при $x \neq 0, 1$. Полагаме $t = \frac{x-1}{x}$. Тогава уравнението добива вида
$$t - \frac{3}{2t} = -\frac{5}{2}, \quad t \neq 0, \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 + 5t - 3 = 0$$
с корени $t_1 = -3$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$. Връщайки се в полагането, намираме $x_1 = \frac{1}{4}$ и $x_2 = 2$.

Уравнения с полагане

Решете уравнението

$$x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8.$$

Разглеждаме уравнението при $x\neq 1$. Допълваме израза от лявата страна на уравнението до точен квадрат по следния начин

$$x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\frac{2x^2}{x-1}-\frac{2x^2}{x-1}=8$$

$$\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x-1}=8 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x-1}=8.$$

В последното уравнение полагаме $t=\frac{x^2}{x-1}$ и така достигаме до $t^2-2t-8=0$ с корени $t_1=4$ и $t_2=-2$. Връщайки се в полагането, намираме $x_1=x_2=2$ и $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}$.

Уравнения с полагане

Решете уравнението

$$(x^2 + x + 16)(x^2 - 20x + 16) + 54x^2 = 0.$$

Тъй като $x = 0$ не е корен на уравнението, можем да разделим двете му страни на x^2 и така получаваме еквивалентното на него уравнение

$$\left(x + 1 + \frac{16}{x}\right)\left(x - 20 + \frac{16}{x}\right) + 54 = 0.$$

В последното уравнение полагаме $x + \frac{16}{x} = y$ и достигаме до уравнението $(y+1)(y-20)+54 = 0$, еквивалентно на $y^2 - 19y + 34 = 0$. Корените му са $y_1 = 17$ и $y_2 = 2$.
Връщаме се в погаланeто и получаваме

$$x + \frac{16}{x} = 17 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 17x + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 16;$$

$$x + \frac{16}{x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 16 = 0,\ \text{което няма реални корени.}$$

Отговор на задачата: $x = 1, 16$.

Решете уравнението

$$(1+x^2)(1+x^4) = 4x^3.$$

С директна проверка се установява, че $x = 0$ не е корен на уравнението. Следователно след делене на двете страни на уравнението на x^3 получаваме еквивалентно уравнение

$$(1+x^2)(1+x^4) = 4x^3 \mid : x^3 \neq 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{1+x^2}{x}.\frac{1+x^4}{x^2} = 4 \ \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) = 4.$$

Можем да положим $x + \frac{1}{x} = t$, откъдето

$$t^2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2.$$

Следователно $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$

Освен това поради $t = x + \frac{1}{x}$ следва, че $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Уравнението приема вида

$$t(t^2 - 2) = 4 \;\Leftrightarrow\; t^3 - 2t - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; (t-2)(t^2 + 2t + 2) = 0,$$

откъдето $t = 2 \in$ Д.О. След връщане в полагането достигаме до

$$x + \frac{1}{x} = 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1.$$

Решете уравнението

$$2x^2(2x+1)^2 - x(4x^2-1) = 15(2x-1)^2.$$

Уравнението е хомогенно от втора степен относно изразите $y = x(2x+1)$ и $z = 2x-1$, тъй като е от вида $2y^2 - yz - 15z^2 = 0$. Тъй като y и z не се анулират при една и съща стойност на x, можем да разделим двете страни на даденото уравнение на $z^2 = (2x-1)^2$ и да получим следното еквивалентно на него уравнение

$$2\left(\frac{x(2x+1)}{2x-1}\right)^2 - \frac{x(2x+1)}{2x-1} - 15 = 0.$$

Полагаме $\frac{x(2x+1)}{2x-1} = t$ и получаваме $2t^2 - t - 15 = 0$, чиито корени са $t_1 = 3$ и $t_2 = -\frac{5}{2}$. Връщайки се в полагането, получаваме $x_{1,2} = 1, \frac{3}{2}$ и $x_{3,4} = \frac{-6\pm\sqrt{56}}{4}$.

Симетрични уравнения от 3. степен

Уравнението

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \quad a \neq 0, \tag{36}$$

се нарича симетрично уравенение от 3. степен.

Поради

$$\begin{aligned} &ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0, \end{aligned} \tag{37}$$

то това уравнение винаги има за корен $x = -1$. Останалите му реални корени са реалните корени на квадратното уравнение $ax^2 + (b - a)x + a = 0$ (ако съществуват).
Пример. Намерете корените на уравнението $3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$.
Отговор. $x = -1$.

Симетрични уравнения от 4. степен

Уравнението

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad a \neq 0, \tag{38}$$

се нарича симетрично уравенение от 4. степен.

Тъй като $x = 0$ не е решение на уравнението, можем да разделим двете му страни на x^2 и да получим следното еквивалентно уравнение

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \tag{39}$$

Тъй като $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, то след полагане на $x + \frac{1}{x} = t$ в горното уравнение, то добива вида $at^2 + bt + c - 2a = 0$.

При $x > 0$ е изпълнено $t = x + \frac{1}{x} \geq 2$, а при $x < 0$ е изпълнено $t = x + \frac{1}{x} \leq -2$.

Пример

Намерете корените на уравнението $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

След разделяне на двете страни на $x^2 \neq 0$ уравнението е еквивалентно на

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Полагаме $x + \frac{1}{x} = t$ и достигаме до $t^2 - 5t + 6 = 0$ с корени $t_1 = 3$ и $t_2 = 2$. Връщайки се в полагането, намираме

$$\begin{array}{ccccc} x + \frac{1}{x} = 3 & \Leftrightarrow & x^2 - 3x + 1 = 0 & \Leftrightarrow & x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x + \frac{1}{x} = 2 & \Leftrightarrow & x^2 - 2x + 1 = 0 & \Leftrightarrow & x_3 = x_4 = 1. \end{array}$$

Метод на интервалите. При решаване на модулни уравнения (неравенства) с повече от един модул, числовата ос се разделя на интервали чрез нулите на изразите в модулите, така че във всеки от интервалите изразите в модулите да бъдат знаковопостоянни (положителини или отрицателни). Във всеки такъв интервал модулното уравнение (неравенство) се свежда до уравнение (неравенство) без модули чрез прилагане на дефиницията за модул на реално число.

Пример. Намерете корените на уравнението $|x-3|+|3x+1|=10$.

Нулите на изразите в модулите са $x=3$ и $x=-\frac{1}{3}$. Тогава за знаците на двата израза е изпълнено

	$x\in(-\infty;-1/3)$	$x\in[-1/3;3]$	$x\in(3;+\infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$3x+1$	$-$	$+$	$+$

1) Нека $x \in (-\infty; -1/3)$. Тогава $|x-3| = 3-x$ и $|3x+1| = -3x-1$ и уравнението добива вида

$$3 - x - 3x - 1 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = -8 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \in (-\infty; -1/3).$$

2) Нека $x \in [-1/3; 3]$. Тогава $|x-3| = 3-x$ и $|3x+1| = 3x+1$ и уравнението добива вида

$$3 - x + 3x + 1 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \in [-1/3; 3].$$

3) Нека $x \in (3; +\infty)$. Тогава $|x-3| = x-3$ и $|3x+1| = 3x+1$ и уравнението добива вида

$$x - 3 + 3x + 1 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \notin (3; +\infty).$$

Отговор. $x = -2, 3$.

Литература

- Рангелова, П., Сборник по математика 9. – 12. клас с методични указания, Макрос, Пловдив, 2006.
- Веселаго И.А., Алгебра для школьников и абитуриентов, ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- Золотарева Н.Д., Попов Ю.А., Сазонов В.В., Алгебра – базовый курс с решениями и указаниями, БИНОМ, Москва, 2015.
- Золотарева Н.Д., Попов Ю.А., Семендяева Н.Л., Федотов М.В., Алгебра – углубленный курс с решениями и указаниями, 2011.
- Киселёв, А.П., Алгебра, ч. I, ч. II, Физматлит, 2006.
- Лурье М.В., Алгебра – техника решения задач, 2005.
- Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., Алгебрический тренажер, ИЛЕКСА, Москва, 2007.
- Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И., Уравнения и неравенства. нестандартные методы решения: справочник.
- Шестаков С.А., Уравнения и системы уравнений, Изд. МЦНМО, Москва, 2018.
- Шестаков С.А., Неравенства и системы неравенств, Изд. МЦНМО, Москва, 2018.