20. Докажете, че ако $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{c-b}=0$ и числата a, c, $a-b$, $c-b$, $b-(a+c)$ са различни от нула, то $2ac = b(a+c)$.

21. Решете уравнението:

а) $\dfrac{12}{1-x^2}-\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{1+x}{x-1}$; б) $\dfrac{3x-5}{x-1}-\dfrac{2x-5}{x-2}=1$;

в) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{4-x}{x-3}+2=0$; г) $\dfrac{x+1}{x-3}-\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{8x}{x^2-9}$.

22. Решете уравнението (a, b, c са параметри):

а) $\dfrac{ax}{a+3}=2x-1$; б) $\dfrac{ax-b}{c}=b$.

23. В уравнението $\dfrac{2x-m}{x+2}-\dfrac{x+m}{x^2-4}=\dfrac{4x-m}{2x-4}$ m е реален параметър. За кои стойности на m коренът на уравнението е по-малък от -1?

24. За коя стойност на параметъра a уравнението $\dfrac{x+1}{x-7}=\dfrac{a-x}{x-7}$ няма смисъл?

2. КВАДРАТЕН КОРЕН. ДЕЙСТВИЯ С КВАДРАТНИ КОРЕНИ

Реалното неотрицателно число b, за което $b^2=a$, се нарича **квадратен корен** (**корен втори**) от числото a и се означава $b=\sqrt{a}$.

Знакът “$\sqrt{\ }$“ се нарича “корен” или “радикал”.

Свойства на квадратните корени:

1. $\sqrt{a^2}=|a|$.

2. Ако $b \geq 0$, то $\sqrt{a^2 b}=|a|\sqrt{b}$.

3. Ако $b \geq 0$, то $a\sqrt{b}=\begin{cases}-\sqrt{a^2 b} & при\ a<0 \\ \sqrt{a^2 b} & при\ a>0.\end{cases}$

4. Ако $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}$.

5. Ако $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

6. Ако $0 \leq a \leq b$, то $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Запомнете. Сбор и разлика не се коренуват.

Числа, които могат да се запишат като частно на 2 цели числа p и $q \neq 0$, т.е. от вида $\frac{p}{q}$, се наричат **рационални числа.** Всички положителни и отрицателни обикновени дроби са рационални числа. Множеството на рационалните числа се означава с Q.

Числа, които не могат да се запишат като частно на две цели числа, се наричат **ирационални числа.** Например числата: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и др. Те се записват с безкрайни непериодични десетични дроби.

Рационалните и ирационалните числа определят множеството R за **реалните числа.**

От определението за квадратен корен следва, че не всяко реално число може да се коренува. **Коренуват се само неотрицателните числа.**

Пример 1. Да се намерят допустимите стойности на x в израза:

а) $\sqrt{x-7}$; б) $\sqrt{5x+45}$; в) $\sqrt{\frac{1}{3x-12}}$.

Решение:

а) ДС: $x-7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7$; б) ДС: $5x+45 \geq 0 \Rightarrow x \geq -9$;

в) ДС: $3x-12 > 0 \Rightarrow x > 4$.

Пример 2. За кои стойности на променливата x следният израз няма смисъл:

а) $\sqrt{x+7}$; б) $\sqrt{\frac{1}{8}-x}$.

Решение:

а) $x+7 < 0 \Rightarrow x < -7$; б) $\frac{1}{8}-x < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{8}$.

Пример 3. Пресметнете:

а) $\sqrt{81}$; б) $\sqrt{\frac{1}{49}}$; в) $\sqrt{\frac{16}{25}}$;

г) $\sqrt{0,36.36}$; д) $\sqrt{1764}$; е) $\sqrt{375}.\sqrt{15}$.

Решение:

а) $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$; б) $\sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7^2}} = \frac{1}{7}$; в) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{5^2}} = \frac{4}{5}$;

г) $\sqrt{0,36.36} = \sqrt{0,36}.\sqrt{36} = \sqrt{(0,6)^2}.\sqrt{6^2} = 0,6.6 = 3,6$;

д) $\sqrt{1764} = \sqrt{2^2.3^2.7^2} = 2.3.7 = 42$; е) $\sqrt{375}.\sqrt{15} = \sqrt{375.15} = \sqrt{5^4.3^2} = 25.3 = 75$.

Пример 4. Сравнете числата:

а) $\sqrt{15}$ и $2\sqrt{3}$; б) 13 и $\sqrt{168}$; в) $2\sqrt{5,2}$ и $4\sqrt{2}$.

Решение: а) $2\sqrt{3} = \sqrt{4.3} = \sqrt{12}$ и $\sqrt{15} > \sqrt{12} \Rightarrow \sqrt{15} > 2\sqrt{3}$;

б) $13 = \sqrt{13^2} = \sqrt{169}$ и $\sqrt{169} > \sqrt{168} \Rightarrow 13 > \sqrt{168}$;

в) $2\sqrt{5,2} = \sqrt{4.5,2} = \sqrt{20,8}$, $4\sqrt{2} = \sqrt{16.2} = \sqrt{32}$ и $\sqrt{20,8} < \sqrt{32} \Rightarrow 2\sqrt{5,2} < 4\sqrt{2}$.

Трудно можем да съберем, извадим или сравним две дроби, в знаменателите на които се съдържат радикали. Поради това се стремим да преобразуваме дробта до равна на нея, но да не съдържа радикал в знаменателя.

Когато освобождаваме една дроб от радикали в знаменателя ѝ, казваме, че **рационализираме тази дроб**. За да рационализираме една дроб, умножаваме числителя и знаменателя ѝ с подходящо избран израз така, че произведението в знаменателя да не съдържа радикал.

Пример 5. Да се рационализира дробта:

а) $\dfrac{35}{\sqrt{7}}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$; г) $\dfrac{2}{3+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Решение: а) $\dfrac{35}{\sqrt{7}} = \dfrac{35.\sqrt{7}}{\sqrt{7}.\sqrt{7}} = \dfrac{35\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}\right)^2} = \dfrac{35\sqrt{7}}{7} = 5\sqrt{7}$;

б) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{3.\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = 3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2} = \dfrac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)} = \dfrac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$;

г) $\dfrac{2}{3+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \dfrac{2\left(3+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)} = \dfrac{2\left(3+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} =$

$\dfrac{2\left(3+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{9+6\sqrt{3}+3-5} = \dfrac{2\left(3+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(7-6\sqrt{3}\right)}{\left(7+6\sqrt{3}\right)\left(7-6\sqrt{3}\right)} =$

$$\frac{2\left(11\sqrt{3}-7\sqrt{5}+6\sqrt{15}-3\right)}{36.3-49}=\frac{2\left(11\sqrt{3}-7\sqrt{5}+6\sqrt{15}-3\right)}{59}.$$

При опростяването на изрази, съдържащи квадратни корени, често се налага използването на следната формула:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Пример 6. Пресметнете $\dfrac{1}{1+\sqrt{7-\sqrt{24}}}-\dfrac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$.

Решение: Преобразуваме радикалите от знаменателите на двете дроби с горната формула и получаваме: $\sqrt{7\mp\sqrt{24}}=\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{49-24}}{2}}\mp\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{49-24}}{2}}=$

$$\sqrt{\frac{7+5}{2}}\mp\sqrt{\frac{7-5}{2}}=\sqrt{6}\mp 1.$$

Следователно $\dfrac{1}{1+\sqrt{7-\sqrt{24}}}-\dfrac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}=\dfrac{1}{1+\sqrt{6}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{6}+1-1}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}=0$.

Група А

25. Да се определят допустимите стойности на x в израза:

а) $\sqrt{3x-15}$;   б) $\sqrt{\dfrac{2}{13}-4x}$;   в) $\sqrt{x-2}+\dfrac{x}{2x-13}$.

26. За кои стойности на x изразът няма смисъл:

а) $\sqrt{7x-42}$;   б) $\sqrt{\dfrac{15x+3}{7}}$;   в) $\sqrt{\dfrac{-12}{3x-27}}$.

27. Пресметнете:

а) $\sqrt{\dfrac{9}{49}}$;   б) $\sqrt{5\dfrac{19}{25}}$;

в) $\left(\sqrt{2,7}\right)^2+\left(\sqrt{0,3}\right)^2+\left(-2\sqrt{5,5}\right)^2$;   г) $\left(\sqrt{13}+3\right)\left(\sqrt{13}-3\right)$;

д) $\left(\sqrt{22}-\sqrt{19}\right)\left(\sqrt{22}+\sqrt{19}\right)$;   е) $\left(3\sqrt{4}+2\sqrt{7}\right).\left(3\sqrt{4}-2\sqrt{7}\right)$.