1. ДЕЙСТВИЯ С РАЦИОНАЛНИ ДРОБИ. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Изрази от числа и букви, свързани със скоби и само знаците за действията: събиране, изваждане, умножение и деление, се наричат **рационални изрази**.

Рационални изрази, в знаменателите на които няма променливи, се наричат **цели рационални изрази**.

Рационални изрази, в знаменателите на които се съдържа променлива, се наричат **дробни рационални изрази**.

Стойностите, които могат да приемат означените с букви величини, се наричат **допустими стойности** (ДС). Това множество от стойността се нарича още дефиниционно множество (ДМ или само Д) или дефиниционна област (ДО).

Допустимите стойности на цял рационален израз са всички числа.

Допустимите стойности на дробен рационален израз са всички числа, за които знаменателят е различен от нула.

Пример 1. Да се определят допустимите стойности (ДС) на рационалната дроб:

а) $\dfrac{5}{x-3}$; б) $\dfrac{7x+18}{5x+10}$; в) $\dfrac{3}{x^2-4}$; г) $\dfrac{2x^2+3}{x^4+3}$.

Решение: а) От $x-3=0$ за $x=3$ следва, че ДС: $x \neq 3$;

б) От $5x+10=0$ за $x=-2$ следва, че ДС: $x \neq -2$;

в) От $x^2-4=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=2,\ x=-2$ следва, че ДС: $x \neq \pm 2$.

г) Понеже $x^4 \geq 0$ за всяко x, то $x^4+3 \geq 3 > 0$ за всяко x. Следователно ДС: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пример 2. Извършете означените действия:

а) $\dfrac{7}{x+1}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{6}{x^2-1}$; б) $\dfrac{2x}{x^2+2x+1}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3x}{x^2-1}$.

Решение: а) ДС: $x \neq \pm 1$. Извършваме означените действия и получаваме

$$\frac{7}{x+1}-\frac{3}{x-1}+\frac{6}{x^2-1}=\frac{7x-7-3x-3+6}{(x-1)(x+1)}=\frac{4x-4}{(x-1)(x+1)}=\frac{4}{x+1}.$$

б) ДС: $x \neq \pm 1$. Получаваме $\dfrac{2x}{x^2+2x+1}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3x}{x^2-1}=$

$$=\frac{2x}{(x+1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{3x}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x^2-2x-x^2-2x-1+3x^2+3x}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{4x^2-x-1}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Пример 3. Да се опрости изразът $\frac{x-a}{ax}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a}\right):\frac{x^2-a^2}{\frac{2}{3}ax}$.

Решение: ДС: $a \neq 0,\ x \neq 0$. При тези стойности за a и x преработваме израза и получаваме $\frac{x-a}{ax}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a}\right):\frac{x^2-a^2}{\frac{2}{3}ax}=\frac{x-a}{ax}\cdot\frac{a+x}{xa}\cdot\frac{\frac{2}{3}ax}{x^2-a^2}=\frac{2}{3ax}$.

Пример 4. Да се намери стойността на дробта $\frac{a+b}{a-b}$, ако $2a^2+2b^2=5ab$ и $a>b>0$.

Решение: Преобразуваме израза $2a^2+2b^2=5ab$ и получаваме

$$2a^2+2b^2+4ab=9ab \Leftrightarrow (1)\ (a+b)^2=\frac{9}{2}ab \text{ и}$$

$$2a^2+2b^2-4ab=ab \Leftrightarrow (2)\ (a-b)^2=\frac{1}{2}ab.$$

Разделяме почленно равенствата (1) и (2) и получаваме $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2=9 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2-3^2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{a-b}-3\right)\left(\frac{a+b}{a-b}+3\right)=0 \Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=3 \text{ или } \frac{a+b}{a-b}=-3.$$

Понеже $a>b>0$, то дробта приема положителна стойност. Следователно $\frac{a+b}{a-b}=3$.

Пример 5. Докажете, че ако $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ при $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0,\ a+b+c\neq 0$, то сумата поне на две от числата a, b и c е равна на нула.

Решение: От даденото равенство получаваме

$(a+b+c).(ab+bc+ca)=abc \Leftrightarrow$

$a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+bc^2+ac^2+abc=0 \Leftrightarrow$

$a^2(b+c)+ab(b+c)+ac(b+c)+bc(b+c)=0 \Leftrightarrow$

$(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=0 \Leftrightarrow (b+c)(a+b)(a+c)=0 \Rightarrow a+c=0$ или $a+b=0$, или $b+c=0$.

Пример 6. Докажете, че ако $a(y$ …

$=\frac{x-y}{c(a-b)}$ при $a\neq 0,\ b\neq 0,$ …

Решение: Даденото условие запи…

Знаем, че ако $\frac{u}{v}=\frac{p}{q}$, то $\frac{u}{v}=\frac{p}{q}=$ …

$\frac{y-z}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}=\frac{z-x}{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}=\frac{x-y}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$ или …

Пример 7. Докажете, че ако $b=\frac{2ac}{a+c}$ …

Решение: Преработваме израза …

$\frac{2xz}{x+z}=\frac{2ac}{(b+c)(a+b)}:\Big(\frac{a}{b+c}$ …

От $b=\frac{2ac}{a+c}$ следва, че $\frac{2xz}{x+z}=$ …

Следователно $y=\frac{2xz}{x+z}$.

1. Намерете ДС за:

а) $\frac{x^2+7x+13}{8}$; б) …

2. Съкратете дробта:

а) $\frac{12x^3}{4x^2}$; б) …