ГЛАВА II. Квадратный трехчлен

Справочный материал

Квадратным трехчленом называют выражение ax^2+bx+c, где $a,b,c\in\mathbb{R}$ и $a\neq 0$. График квадратного трехчлена – ***парабола***. Прямая $x=-\dfrac{b}{2a}$ – ее ***ось симметрии***. Точка $(x_в;y_в)$ – ***вершина параболы***, где $x_в=-\dfrac{b}{2a}$, $y_в=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. Число $D=b^2-4ac$ – ***дискриминант***. Абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox ***являются корнями квадратного трехчлена***, т.е. решениями квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (2.1)$$

и вычисляются с помощью формулы

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (2.2)$$

При $D<0$ уравнение (2.1) не имеет корней (парабола не пересекает ось Ox); при $D=0$ – один корень $x_1=\dfrac{-b}{2a}$ (парабола касается оси Ox в точке x_1); при $D>0$ – два корня $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ (парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1 и x_2).

При решении уравнения (2.1) значение параметра $a=0$ является ***контрольным***, так как в этом случае уравнение не является квадратным.

Всякий квадратный трехчлен (квадратичная функция) $f(x)=ax^2+bx+c$ представим в виде $f(x)=a(x-x_в)^2+y_в$.

Множество значений квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$:

$$E_f=[y_в;+\infty) \text{ при } a>0 \text{ и } E_f=(-\infty;y_в] \text{ при } a<0.$$

Если $a>0$, то ***наименьшее значение*** $\min\limits_x f(x)=y_в$; если $a<0$, то ***наибольшее значение*** $\max\limits_x f(x)=y_в$.

§2.1. Решение квадратных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметров

Наиболее распространенным типом задач с параметром, связанных с квадратным трехчленом, являются задачи по определению корней квадратного уравнения, коэффициенты которого зависят от параметра. При их решении используется формула (2.2) и исследуется дискриминант. Отдельно необходимо рассматривать случай, когда коэффициент при x^2 равен нулю и уравнение не является квадратным, и формула (2.2) неприменима.

Как уже отмечалось выше, ответ задачи должен содержать решения для всех значений параметра в порядке возрастания его от $-\infty$ до $+\infty$. Для компактности ответа возможно объединение промежутков для параметра, на которых формулы решения совпадают.

Рассмотрим несколько типовых примеров.

Пример 1. *Для каждого действительного значения параметра* a *решить квадратное уравнение* $ax^2+2x+1=0$.

Решение. При $a=0$ исходное уравнение является линейным и имеет вид $2x=-1$. В этом случае уравнение число $x=-0,5$ – его корень.

При $a\neq 0$ исходное уравнение является квадратным. Его дискриминант $D=4-4a$. Квадратное уравнение имеет решение при $D\geq 0$, т.е. при $a\leq 1$.

Если $a=1$, то $D=0$ и уравнение имеет один корень $x=-1$.

Если $a\neq 0$ и $a<1$, то исходное уравнение имеет два корня $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$ и $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$.

Если $a>1$, то $D<0$ и уравнение не имеет корней.

Ответ. Если $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$, то уравнение имеет два корня

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1-a}}{a} \text{ и } x_2=\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a};$$

если $a=0$, то $x=-0,5$;

если $a=1$, то $x=-1$;

если $a > 1$, то решений нет.

Пример 2. *Для каждого действительного значения параметра a решить квадратное уравнение*

$$ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0.$$

Решение. При $a = 0$ уравнение имеет вид $2x = 0$, откуда получаем $x = 0$.

При $a \neq 0$ дискриминант $D = 4(a+1)^2 - 8a^2 = -4(a^2 - 2a - 1)$. Уравнение имеет решение при $D \geq 0$, т.е. при $a \in [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$.

Если $a = 1-\sqrt{2}$, то $x = \sqrt{2}$; если $a = 1+\sqrt{2}$, то $x = -\sqrt{2}$.

При $a \in (1-\sqrt{2}; 0) \cup (0; 1+\sqrt{2})$ уравнение имеет два решения

$$x_1 = \frac{-(a+1) - \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a} \text{ и } x_2 = \frac{-(a+1) + \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a}.$$

При $a \notin [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$ уравнение не имеет решений.

Ответ. Если $a \in (-\infty; 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}; +\infty)$, то решений нет;
если $a = 1-\sqrt{2}$, то $x = \sqrt{2}$; если $a = 0$, то $x = 0$;
если $a = 1+\sqrt{2}$, то $x = -\sqrt{2}$;
если $a \in (1-\sqrt{2}; 0) \cup (0; 1+\sqrt{2})$, то уравнение имеет два решения

$$x_1 = \frac{-(a+1) - \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a} \text{ и } x_2 = \frac{-(a+1) + \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a}.$$

Далее рассмотрим пример, в котором параметр в явном виде не содержится, но задача в ходе решения сводится к исследованию существования корней квадратного уравнения с коэффициентами, зависящими от параметра.

Пример 3. *Найти наименьшее значение x, при котором существуют числа y и z такие, что выполняется равенство*

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

Решение. Рассмотрим данное равенство как квадратное уравнение относительно переменной z

$$z^2-(x+y)z+(x^2+2y^2+xy-1)=0, \qquad (2.3)$$

где переменные x и y являются параметрами.

Уравнение (2.3) имеет решение, если его дискриминант D неотрицателен ($D=(x+y)^2-4(x^2+2y^2+xy-1)=-3x^2-7y^2-2xy+4$).

$$D\ge 0 \Leftrightarrow -3x^2-7y^2-2xy+4\ge 0.$$

Рассмотрим последнее неравенство как квадратное неравенство относительно переменной y

$$7y^2+2xy+(3x^2-4)\le 0, \qquad (2.4)$$

где переменная x является параметром.

Неравенство (2.4) имеет решение, если его дискриминант D_1 неотрицателен ($D_1=4x^2-28\cdot(3x^2-4)=112-80x^2$).

$$D_1\ge 0 \Leftrightarrow 112-80x^2\ge 0 \Leftrightarrow \frac{7}{5}\ge x^2 \Leftrightarrow \sqrt{7/5}\ge x\ge -\sqrt{7/5}.$$

Наименьшее значение x, при котором существует решение y неравенства (2.4) и решение z уравнения (2.3), равно $-\sqrt{7/5}$. Следовательно, $-\sqrt{7/5}$ – наименьшее значение x, удовлетворяющее условию задачи.

Задачи для самостоятельного решения

2.1.1. Решите уравнение:

а) $x^2=a$; б) $x^2=a^2-3a-4$;

в) $ax^2=4$; г) $(a^2-3a-4)x^2=4$;

д) $ax^2=a^2$; е) $ax^2=a^3-3a^2-4a$;

ж) $(a^2-3a-4)x^2=a-4$; з) $(a^2-3a-4)x^2=4+3a-a^2$.

2.1.2. Решите уравнение:

а) $(a^2-6a+5)x^2-(a-5)x=0$;

б) $(a^2-3a-4)x^2-(a^3-16a)x=0$.

2.1.3. Решите уравнение:

а) $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$;

б) $x^2+(2-a)x+4a-8=0$.

2.1.4. Решите уравнение:

а) $x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0$; б) $x^2 + (a+1)x + \frac{a^2}{4} = 0$.

2.1.5. Решите уравнение:

а) $ax^2 + 2x + 1 = 0$; б) $(a-1)x^2 + 2(a+1)x + a - 2 = 0$;

в) $(a+1)x^2 - (a-1)x - 2a = 0$; г) $ax^2 - (a+1)x + a^2 + a = 0$.

2.1.6. Докажите, что если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$:

а) поменять местами коэффициенты a и c, то получится уравнение, корни которого будут обратны корням данного;

б) поменять знак коэффициента b, то получится уравнение, корни которого будут противоположны корням данного;

в) коэффициенты a и c разных знаков, то оно имеет действительные корни;

г) коэффициент a положителен и дискриминант равен нулю, то левая часть уравнения есть полный квадрат и, наоборот, если левая часть уравнения есть полный квадрат, то коэффициент a положителен и дискриминант равен нулю;

д) все коэффициенты рациональны и дискриминант есть полный квадрат рационального числа, то корни уравнения рациональны.

2.1.7. Для каждого значения параметра a определите число решений уравнения (кратные корни уравнения считать одним решением):

а) $x^2 + 2ax + 3 = 0$; б) $ax^2 + 2x + 3 = 0$;

в) $(a-1)x^2 + 2ax + 3 = 0$; г) $(a+2)x^2 + 5(a+2)x + 1 = 0$.

2.1.8. Решите уравнение:

а) $x^4 + 4a^3x^2 - 5a^6 = 0$; б) $x^4 - 2(a+1)x^2 + 4a = 0$.

2.1.9. Пусть числа x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + ax + bc = 0$, а числа x_2 и x_3 – корни уравнения $x^2 + bx + ac = 0$. Докажите, что числа x_1 и x_3 – корни уравнения $x^2 + cx + ab = 0$, если $ac \neq bc$.

§2.2. График квадратного трехчлена

Пример 1. *Определить знаки коэффициентов* a, b *и* c*, если график квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$ *имеет вид, изображенный на рис. 5.*

Решение. Знак коэффициента a определяется направлением ветвей параболы. Так как ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$.

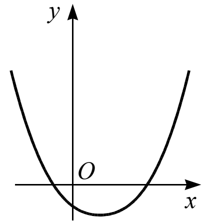

Рис. 5

Из условия $y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ получается значение ординаты точки пересечения параболы с осью Oy На рисунке 5 видно, что $c < 0$.

Вершина параболы расположена правее оси Oy, т.е. $x_в = -\dfrac{b}{2a} < 0$. Так как $a > 0$ и $x_в > 0$ получаем, что $b < 0$.

Ответ. $a > 0, b < 0, c < 0$.

Пример 2. *Определить знак числа* c*, если известно, что квадратный трехчлен* $ax^2 + bx + c$ *не имеет корней и, кроме того, справедливо неравенство* $\sqrt{63}\,a - \sqrt{21}\,b + \sqrt{7}\,c < 0$.

Решение. Так как квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ не имеет корней, то его график не имеет общих точек с осью абсцисс, т.е. расположен выше (ветви параболы направлены вверх) или ниже (ветви параболы направлены вниз) оси Ox. Это означает, что для всех значений x квадратный трехчлен $f(x)$ принимает значения одного знака.

Заметим, что $\sqrt{63}\,a - \sqrt{21}\,b + \sqrt{7}\,c =$

$$= \sqrt{7}(3a - \sqrt{3}\,b + c) = \sqrt{7}\left(a(-\sqrt{3})^2 + b(-\sqrt{3}) + c\right).$$

Из условия $\sqrt{63}\,a - \sqrt{21}\,b + \sqrt{7}\,c < 0$ следует, что

$$f(-\sqrt{3}) = a(-\sqrt{3})^2 + b(-\sqrt{3}) + c < 0,$$

т.е. $f(x) < 0$ при всех значениях $x \in \mathbb{R}$.

Следовательно, и $f(0) < 0$, но $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, т.е. $c < 0$.

Ответ. $c < 0$.

Пример 3. *Точка* $A(6;-12)$ *является вершиной параболы* $y=ax^2+bx+c$*, одна из ее точек пересечения с осью* Ox *имеет абсциссу, равную 8. Определить значения коэффициентов* a, b *и* c.

Решение. Координаты вершины параболы $(x_в;\ y_в)$ задаются формулами $x_в=-\dfrac{b}{2a}=6$, $y_в=\dfrac{4ac-b^2}{4a}=-12$. Так как $y_в<0$ и парабола пересекает ось абсцисс, то ее ветви направлены вверх, т.е. $a>0$. По условию $y(8)=a8^2+b8+c=0$.

Исходная задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} -(b/2a)=6, \\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=-12, \\ 64a+8b+c=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-12a, \\ ac-36a^2=-12a, \\ c=32a; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-12a, \\ 32a^2-36a^2=-12a, \\ c=32a; \end{cases} \Rightarrow$$

$a=3$, $b=-36$, $c=96$.

Ответ. $a=3$, $b=-36$, $c=96$.

Пример 4. *Для каждого значения параметра* a *определить число решений уравнения* $x^2+2x-3=a^2-4a$.

Решение. График квадратного трехчлена x^2+2x-3, стоящего в левой части данного уравнения – парабола, имеющая координаты вершины $(x_в;\ y_в)$, где $x_в=-1$ и $y_в=(-1)^2+2(-1)-3=-4$. Так как ветви параболы направлены вверх, то множество значений функции $y=x^2+2x-3$ представляет $[-4;+\infty)$.

Правая часть уравнения для каждого значения параметра a представляет постоянную функцию $y=a^2-4a$. Ее график – прямая линия, параллельная оси Ox, не имеет общих точек с параболой при $y=a^2-4a<-4$ (1); имеет одну общую точку при $y=a^2-4a=-4$ (2); две точки при $y=a^2-4a>-4$ (3).

Рассмотрим каждый из полученных случаев:

(1) $a^2-4a<-4 \Leftrightarrow (a-2)^2<0$ – таких a не существует;

(2) $a^2 - 4a = -4 \Leftrightarrow (a-2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ – исходное уравнение имеет одно решение;

(3) $a^2 - 4a > -4 \Leftrightarrow (a-2)^2 > 0$ – при всех $a \neq 2$ исходное уравнение имеет два решения.

Ответ. Если $a = 2$, то уравнение имеет одно решение;
если $a \neq 2$, то – два решения.

Задачи для самостоятельного решения

2.2.1. Определите знаки параметров a, b и c, если график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ имеет вид, изображенный на рис. 6.

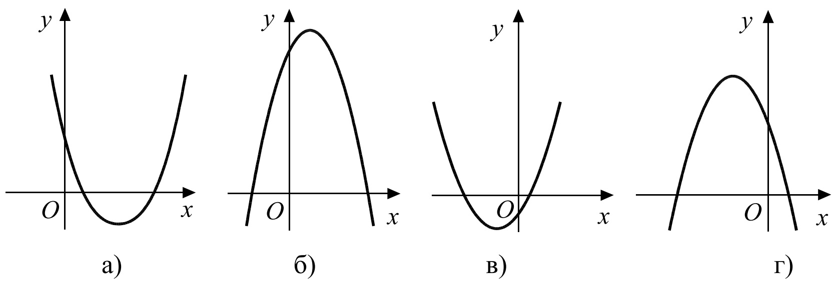

Рис. 6

2.2.2. Известно, что точка A является вершиной параболы $y = x^2 + px + q$. Найдите числа p и q, если:

а) $A(1;-2)$; б) $A(-2;-7)$.

2.2.3. Найдите числа a, b и c, если точка M является вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$, пересекающей ось ординат в точке N:

а) $M(-1;-7)$, $N(0;-4)$; б) $M(1;5)$, $N(0;1)$.

2.2.4. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 6x + a$, наименьшее значение которой равно 1;

б) $y = -x^2 + 4x + a$, наибольшее значение которой равно 2.

2.2.5. Найдите коэффициенты a, b и c квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, если известно, что:

а) $f(-2) = 9,\ f(1) = 3,\ f(3) = 19;$

б) $f(-3) = -11,\ f(0) = 10,\ f(2) = -6.$

2.2.6. Определите знак коэффициента a квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, если известно, что:

а) $f(-1) < 1,\ f(1) > -1,\ f(3) < -4;$

б) $f(-3) < -5,\ f(-1) > 0,\ f(1) < 4$.

2.2.7. Определите значения параметра c, при которых уравнение $5x^2 - 4x + c = 0$:

а) имеет различные действительные корни;

б) имеет один корень (т.е. имеет корень двойной кратности);

в) не имеет действительных корней;

г) имеет хотя бы один общий корень с уравнением $x^2 + 13x - 30 = 0$.

2.2.8. Найдите все значения параметра b, при которых график функции $y = x^2 + bx + 4$:

а) пересекает ось абсцисс в двух точках;

б) касается оси абсцисс;

в) лежит выше оси абсцисс.

В каждом из пунктов выберите подходящее значение параметра и постройте график соответствующей функции.

2.2.9. Исследуйте взаимное расположение графиков функций $f(x) = 2x^2$ и $g(x) = 5x - c$ в зависимости от значений параметра c.

2.2.10. В зависимости от значений параметра a исследуйте взаимное расположение графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, если:

а) $f(x) = ax^2 - 3$ и $g(x) = 4x + 1$;

б) $f(x) = ax^2 - 8x + 5$ и $g(x) = x^2 - 2ax + 1$.

2.2.11. В зависимости от значений параметра b исследуйте взаимное расположение графиков функций $f(x) = 2bx^2 + 2x + 1$ и $g(x) = 5x^2 + 2bx - 2$.

В каждом из пунктов задач 2.2.12 и 2.2.13 при найденных значениях параметра постройте график соответствующей функции.

2.2.12. Определите все значения параметра a, при которых график функции $y = 2x^2 - 3x + a$:

а) лежит выше оси абсцисс; б) касается оси абсцисс;

в) пересекает ось абсцисс в двух точках;

г) пересекает ось абсцисс в двух точках по правую сторону от оси ординат;

д) пересекает ось абсцисс в двух точках по разные стороны от оси ординат.

2.2.13. Определите все значения параметра a, при которых график функции $y = -x^2 - 4x + 3a$:

а) лежит ниже оси абсцисс; б) касается оси абсцисс;

в) пересекает ось абсцисс в двух точках;

г) пересекает ось абсцисс в двух точках по левую сторону от оси ординат;

д) пересекает ось абсцисс в двух точках по разные стороны от оси ординат.

2.2.14. При каких значениях параметра a квадратный трехчлен:

а) $2x^2 + x + a$ принимает только положительные значения;

б) $-x^2 + 6x + a$ принимает только отрицательные значения?

2.2.15. Для каждого значения параметра a определите число решений уравнения:

а) $x^2 + 4x + 5 = a^2 - 2a - 2$; б) $6x - 2x^2 + 1{,}5 = a^2 - 5a$.

2.1.16. Определите знак чисел a и c, если известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней и, кроме того, справедливо неравенство:

а) $4\sqrt{2}\,a - \sqrt{24}\,b + 3\sqrt{2}\,c < 0$; б) $\dfrac{\sqrt{12}}{3}a - 2b + 2\sqrt{3}\,c > 0$.

2.1.17. Докажите, что при изменении параметра a вершина параболы:

а) $y = x^2 + (2a+1)x + a^2 - 1$ описывает прямую линию;

б) $y = x^2 - (2a+1)x + 2a$ описывает параболу.

§ 2.3. Необходимые и достаточные условия, задающие возможные случаи расположения корней квадратного трехчлена

Задачи с параметром часто сводятся к исследованию квадратного трехчлена с коэффициентами, зависящими от параметра. Решение каждой такой задачи можно разделить на два этапа. Первый этап состоит в переформулировке исходной задачи и сведении ее к исследованию квадратного трехчлена. Второй – в исследовании полученного квадратного трехчлена, сводящемся к определению необходимых и достаточных условий для реализации одной или нескольких возможностей, приведенных в следующей ниже задаче. В каждом из рассматриваемых случаев вывод необходимых и достаточных условий может быть осуществлен аналитически. Однако каждый из них допускает графическую интерпретацию и, как будет показано ниже, позволяет достаточно просто вывести аналитические условия с использованием возможных для конкретного случая вариантов расположения графика соответствующего квадратного трехчлена.

Задача 2. С помощью дискриминанта D квадратного трехчлена ax^2+bx+c с положительным коэффициентом a абсциссы $x_в = -\dfrac{b}{2a}$ вершины соответствующей параболы, а также значений функции в отдельных точках, сформулируйте необходимые и достаточные условия для того, чтобы этот квадратный трехчлен:

а) не имел корней; б) имел единственный корень;

в) имел два корня, расположенные по разные стороны от числа d;

г) имел два корня, между которыми лежит отрезок $[d_1;d_2]$;

д) имел два корня, каждый из которых больше числа d;

е) имел два корня на отрезке $[d_1;d_2]$;

ж) имел два корня, расположенных по одному на каждом из двух непересекающихся интервалов $(d_1;d_2)$ и $(d_3;d_4)$;

з) не имел корней, больших числа d;

и) не имел корней на отрезке $[d_1;d_2]$;

к) имел хотя бы один корень, больший числа d;

л) имел хотя бы один корень на отрезке $[d_1;d_2]$;

м) имел ровно один корень, больший числа d;

н) имел ровно один корень на интервале $(d_1;d_2)$.

Решение. а) Квадратный трехчлен не имеет корней, если его дискриминант отрицательный. Условие $D<0$ или $b^2-4ac<0$ – необходимое и достаточное.

б) Квадратный трехчлен имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю. Условие $D=0$ или $b^2-4ac=0$ – необходимое и достаточное.

Для вывода необходимых и достаточных условий в последующих пунктах данной задачи воспользуемся ***методом графической интерпретации,*** т.е. выведем аналитические условия из графического представления задачи.

в) Если квадратный трехчлен имеет два корня, расположенные по разные стороны от числа d, то (см. рис. 7) значение $f(d)=ad^2+bd+c$ – отрицательно, т.е. условие $f(d)<0$ – необходимое и достаточное.

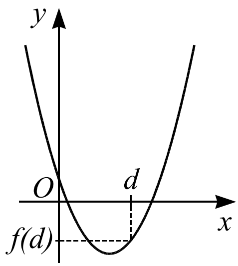

Рис. 7

г) Если квадратный трехчлен имеет два корня, между которыми расположен отрезок $[d_1;d_2]$, то (см. рис. 8) оба его значения $f(d_1)$ и $f(d_2)$ отрицательны, т.е. необходимое и достаточное условие можно представить системой неравенств:

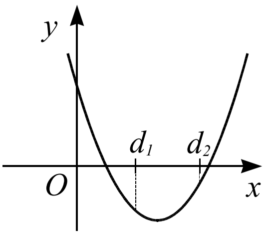

Рис. 8

$$\begin{cases} f(d_1)<0, \\ f(d_2)<0. \end{cases}$$

д) Если квадратный трехчлен имеет два корня, каждый из которых больше числа d, то (см. рис. 9) его значение $f(d)$ положительно (иначе см. пункт в)), дискриминант положителен (условие существования корней) и абсцисса вершины параболы расположена правее числа d. Следовательно, необходимое и достаточное условие можно представить системой неравенств:

$$\begin{cases} f(d) > 0, \\ D > 0, \\ x_в > d. \end{cases}$$

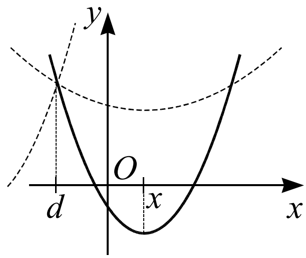

Рис. 9

е) Если квадратный трехчлен имеет два корня на отрезке $[d_1; d_2]$, то (см. рис. 10) оба значения $f(d_1)$ и $f(d_2)$ неотрицательны (иначе см. пункт в)), дискриминант положителен (условие существования корней) и абсцисса вершины параболы расположена между числами d_1 и d_2. Следовательно, необходимое и достаточное условие представляется системой неравенств:

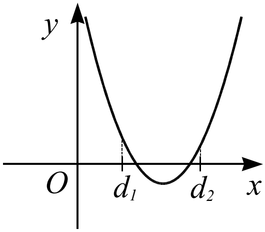

Рис. 10

$$\begin{cases} f(d_1) \ge 0, \\ f(d_2) \ge 0, \\ D > 0, \\ d_1 < x_в < d_2. \end{cases}$$

ж) Если квадратный трехчлен имеет два корня, расположенные по одному на каждом из двух непересекающихся интервалов $(d_1; d_2)$ и $(d_3; d_4)$ (см. рис. 11), то это возможно только, если его значения $f(d_1)$ и $f(d_2)$ (аналогично $f(d_3)$ и $f(d_4)$) разного знака. Следовательно, необходимое и достаточное условие можно представить системой неравенств:

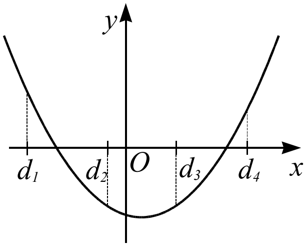

Рис. 11

$$\begin{cases} f(d_1) \cdot f(d_2) < 0, \\ f(d_3) \cdot f(d_4) < 0. \end{cases}$$

з) Квадратный трехчлен не имеет корней, больших числа d в двух случаях (см. рис. 12): либо он вообще не имеет корней ($D<0$), либо корни есть, но они не превышают d. Следовательно, необходимое и достаточное условие можно представить следующей совокупностью:

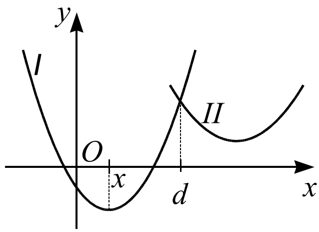

Рис. 12

$$\left[\begin{array}{l}(\mathrm{II})\ D<0, \\ (\mathrm{I}) \begin{cases} f(d)\ge 0, \\ x_в \le d. \end{cases}\end{array}\right.$$

и) На рисунке 13 представлены четыре возможных варианта расположения графиков квадратного трехчлена, удовлетворяющих условию данного пункта задачи.

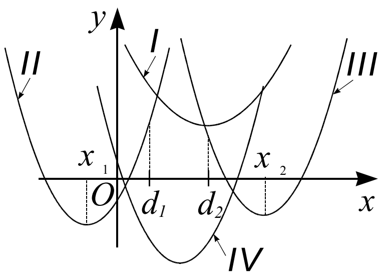

Рис. 13

I. Квадратный трехчлен не имеет корней $D<0$.

II. Корни квадратного трехчлена расположены на оси Ox левее числа d_1, что задается условиями

$$\begin{cases} f(d_1)>0, \\ x_в \le d_1. \end{cases}$$

Замечание. Условие неотрицательности дискриминанта $D\ge 0$ включать в систему не обязательно, так как в противном случае выполняется условие случая I.

III. Корни квадратного трехчлена расположены на оси Ox правее числа d_2, что задается условиями $\begin{cases} f(d_2)>0, \\ x_в \ge d_2. \end{cases}$

IV. Отрезок $[d_1;d_2]$ расположен между корнями квадратного трехчлена, т.е. при выполнении условий $\begin{cases} f(d_1)<0, \\ f(d_2)<0. \end{cases}$

Объединяя полученные условия, получаем совокупность необходимых и достаточных условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{(I) } D<0, \\ \text{(II) } \begin{cases} f(d_1)>0, \\ x_в \le d_1, \end{cases} \\ \text{(III) } \begin{cases} f(d_2)>0, \\ x_в \ge d_2, \end{cases} \\ \text{(IV) } \begin{cases} f(d_1)<0, \\ f(d_2)<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

к) На рисунке 14 представлены возможные варианты расположения графиков квадратного трехчлена, удовлетворяющих условию данного пункта задачи. По аналогии с предыдущим пунктом (объединив случаи I и III) задачи получаем совокупность необходимых и достаточных условий:

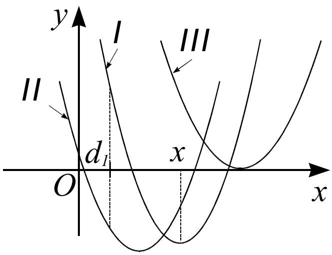

Рис. 14

$$\left[\begin{array}{l} \text{(II) } f(d)<0, \\ \text{(I) и (III) } \begin{cases} D\ge 0, \\ x_в > d. \end{cases} \end{array}\right.$$

л) На рисунке 15 представлены возможные варианты расположения графика квадратного трехчлена, имеющего хотя бы один корень на отрезке $[d_1;d_2]$. По аналогии с предыдущими пунктами задачи получаем совокупность необходимых и достаточных условий:

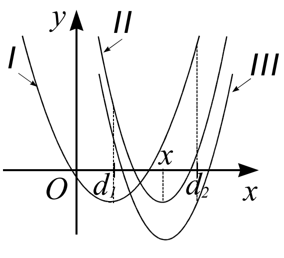

Рис. 15

$$\left[\begin{array}{l} \text{(I) и (III) } f(d_1)\cdot f(d_2)\le 0, \\ \text{(II) } \begin{cases} f(d_1)>0, \\ f(d_2)>0, \\ D\ge 0, \\ d_1 < x_в < d_2. \end{cases} \end{array}\right.$$

м) На рисунке 16 представлены возможные варианты расположения графиков квадратных трехчленов, имеющих ровно один корень, больший числа d. Необходимые и достаточные условия задаются совокупностью:

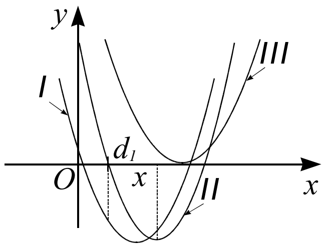

Рис. 16

$$\left[\begin{array}{l} \text{(I) } f(d) < 0, \\ \text{(II) и (III) } \begin{cases} x_в > d, \\ \left[\begin{array}{l} D = 0, \\ f(d) = 0. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

н) На рисунке 17 представлены возможные варианты расположения графиков квадратных трехчленов, имеющих ровно один корень на промежутке $(d_1; d_2)$. Необходимые и достаточные условия имеют вид:

$$\left[\begin{array}{l} \text{(I) и (III) } f(d_1) \cdot f(d_2) < 0, \\ \text{(II) } \begin{cases} f(d_1) = 0, \\ d_1 < x_в < \dfrac{d_1 + d_2}{2}, \end{cases} \\ \text{(V) } \begin{cases} D = 0, \\ d_1 < x_в < d_2, \end{cases} \\ \text{(IV) } \begin{cases} f(d_2) = 0, \\ \dfrac{d_1 + d_2}{2} < x_в < d_2. \end{cases} \end{array}\right.$$

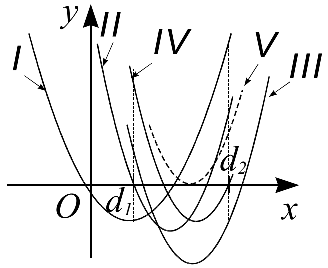

Рис. 17

Замечание. Нет необходимости запоминать все приведенные выше ответы. Достаточно при записи необходимых и достаточных условий уметь пользоваться графическим представлением задачи.

Преимущество использования метода графической интерпретации в сравнении с использованием формул (2.2) заключается в том, что метод графической интерпретации позволяет свести задачу определения принадлежности корней заданному промежутку к решению системы рациональных неравенств.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим нескольких типовых примеров, связанных с исследованием квадратного трехчлена

Пример 1. *При каких значениях параметра a уравнение $x^2-2(a-1)x+a+5=0$ имеет только положительные корни?*

Решение. Согласно результату пункта д) рассмотренной выше задачи для этого необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} f(0)=a+5>0, \\ D=4(a-1)^2-4(a+5)>0, \\ x_{\text{в}}=a-1>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-5, \\ a^2-3a-4>0, \\ a>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-5, \\ (a-4)(a+1)>0, \\ a>1. \end{cases}$$

Получаем, что условию задачи удовлетворяют значения параметра $a>4$. ***Ответ.*** $a>4$.

Пример 2. *Найти все значения p, при каждом из которых уравнение $(2+p)x^2-2px+3p=0$ имеет два положительных корня.*

Решение. В данной задаче необходимо рассмотреть два случая $2+p>0$ (ветви параболы направлены вверх) и $2+p<0$ (ветви – вниз). Дискриминант уравнения $D=-8p(3+p)>0$. Согласно предыдущим результатам получаем систему неравенств (см. рис. 18)

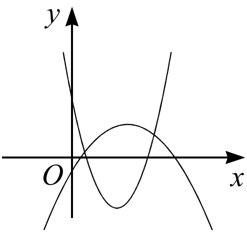

Рис. 18

$$\begin{cases} D=-8p(3+p)>0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(0)>0, \\ p+2>0, \\ x_{\text{в}}>0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(0)<0, \\ p+2<0, \\ x_{\text{в}}>0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<p<0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3p>0, \\ p>-2, \\ \dfrac{2p}{2(2+p)}>0; \end{cases} \\ \begin{cases} 3p<0, \\ p<-2, \\ \dfrac{2p}{2(2+p)}>0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < p < 0, \\ \left[\begin{array}{l} p > 0, \\ p < -2; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow -3 < p < -2\,.$$

Ответ. $-3 < p < -2$.

Пример 3. *Найти все действительные значения параметра* a*, при которых корни уравнения* $x^2 + x + 2a = 0$ *действительны и больше* a.

Решение. Дискриминант $D = 1 - 8a$; $D \ge 0$ при $a \le 1/8$. Решение задачи сводится к решению системы:

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ f(a) = a^2 + 3a, \\ x_в = -0,5 > a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 0,125, \\ \left[\begin{array}{l} a < -3, \\ a > 0, \end{array} \right. \\ a < -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow a < -3\,.$$

Ответ. $a < -3$.

Пример 4. *Найти все действительные значения параметра* b*, при которых корни уравнения* $x^2 - 2bx - 1 = 0$ *действительны и не превосходят по модулю* 2.

Решение. Дискриминант $D = 4b^2 + 4 > 0$ при любом b. Согласно условию корни уравнения должны принадлежать отрезку $[-2;\,2]$. Задача сводится к решению системы (см. рис. 10, $d_1 = -2$, $d_2 = 2$):

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ f(-2) = 4 + 4b - 1 \ge 0, \\ f(2) = 4 - 4b - 1 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b \ge -3, \\ 4b \le 3; \end{cases} \Leftrightarrow -3/4 \le b \le 3/4\,.$$

Ответ. $-3/4 \le b \le 3/4$.

Задачи для самостоятельного решения

2.3.1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - x + a = 0$:

а) не имеет корней;

б) имеет два равных корня;

в) имеет два различных корня;

г) не имеет корней на отрезке $[-2;1]$;

д) имеет два различных корня на отрезке $[-2;1]$;

е) имеет хотя бы один корень на отрезке $[-2;1]$;

ж) имеет ровно один корень на отрезке $[-2;1]$;

з) не имеет корней, меньших -2.

2.3.2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $-x^2+4x-3a=0$: а) не имеет корней;

б) имеет два равных корня; в) имеет два различных корня;

г) не имеет корней на промежутке $[-1;4)$;

д) имеет два различных корня на промежутке $[-1;4)$;

е) имеет хотя бы один корень на промежутке $[-1;4)$;

ж) имеет ровно один корень на промежутке $[-1;4)$;

з) не имеет корней, больших 4.

2.3.3. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2-2(a-1)x+a+5=0:$$

а) имеет только отрицательные корни;

б) имеет корни разного знака?

2.3.4. Найдите все значения p, при каждом из которых уравнение

а) $2x^2+px+5=0$ имеет хотя бы один положительный корень;

б) $2x^2-3px+2-p=0$ не имеет положительных корней;

в) $4x^2-8px+p-3=0$ имеет два отрицательных корня;

г) $(p+1)x^2+px-2=0$ не имеет отрицательных корней.

2.3.5. Найдите все значения p, при каждом из которых корни уравнения $(p-2)x^2-2px+p+3=0$ заключены в интервале $(1;3)$.

2.3.6. Определите, сколько решений, удовлетворяющих заданным ограничениям, в зависимости от значений параметра a имеет уравнение:

а) $4x^2-2x+a=0$, где $-1\le x\le 2$;

б) $x^2-2ax-1=0$, где $-2<x<2$;

в) $(2a+3)x^2+(a-1)x+4a+3=0$, где $0<x<2$.

2.3.7. Определите, при каких значениях параметра p при всех x таких, что $1<x<2$, справедливо неравенство $x^2+px-7p<0$.

§ 2.4. Задачи на применение теорем Виета

Многие задачи, связанные с квадратным трехчленом, и методы их решения основаны на применении прямой и обратной теорем Виета.

Теорема Виета. ***Сумма корней*** x_1 ***и*** x_2 ***квадратного уравнения*** $ax^2+bx+c=0$ ***равна отношению второго коэффициента к первому, взятому с противоположным знаком, а произведение равно отношению свободного члена к первому коэффициенту:***

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Обратная теорема Виета. ***Если существуют действительные числа*** x_1 ***и*** x_2 ***такие, что*** $x_1+x_2=-p$ ***и*** $x_1\cdot x_2=q$ ***, то эти числа*** x_1 ***и*** x_2 ***являются корнями квадратного уравнения*** $x^2+px+q=0$**.**

К типу задач, основанных на применение теорем Виета, относятся задачи, в которых требуется определить такие значения параметра, при которых сумма или произведение корней квадратного трехчлена равна какому–либо числу; сумма квадратов или кубов корней квадратного трехчлена принимает наибольшее или наименьшее значение и т.д. Обычно применение теорем Виета значительно упрощает решение.

Пример 1. *Определите, при каких значениях параметра* a *сумма корней квадратного трехчлена* $x^2+(2-a-a^2)x-a^2=0$ *равна нулю.*

Решение. Если корни квадратного уравнения существуют, то по теореме Виета

$$x_1+x_2=a^2+a-2\,.$$

Сумма корней равна нулю, если $a^2+a-2=0$, т.е. при $a=1$ и $a=-2$.

При этих значениях a получается уравнение $x^2-a^2=0$, которое имеет два действительных корня.

Ответ. $a=1$ и $a=-2$.

Пример 2. *При каких значениях параметра a произведение корней квадратного трехчлена $x^2+2x+(a^2-5a+6)=0$ равно* 2?

Решение. Если корни квадратного уравнения существуют, то по теореме Виета $x_1\cdot x_2=a^2-5a+6$. Произведение корней равно 2, если $a^2-5a+6=2$, т.е. при $a=1$ и $a=4$. При этих значениях a исходное уравнение имеет вид $x^2+2x+2=0$ и не имеет действительных корней.

Ответ. Таких a не существует.

Пример 3. *Определить значения параметра a, при которых сумма S квадратов корней уравнения $x^2+(2-a)x-(3+a)=0$ является наименьшей? Чему равна эта сумма?*

Решение. Дискриминант уравнения $D=(2-a)^2+4(3+a)=a^2+16$. Так как $D>0$ при всех значениях a, то корни существуют. Из теоремы Виета следует $x_1+x_2=-(2-a)$, $x_1\cdot x_2=-(3+a)$. Тогда $S=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(a-2)^2+2(3+a)=a^2-2a+10=$ $=(a-1)^2+9$. Наименьшее значение суммы квадратов корней равно 9 и достигается при $a=1$.

Ответ. $a=1,\ S=9$.

Пример 3. *При каких значениях параметра а уравнение $x^4-(5a+6)x^2+4a^2+6a=0$ имеет два решения?*

Решение. Уравнение $x^4-(5a+6)x^2+4a^2+6a=0$ будет иметь два решения в следующих случаях:

(а) уравнение

$$y^2-(5a+6)y+4a^2+6a=0,\ \text{где}\ y=x^2 \quad (*)$$

имеет единственный корень и он положительный;

(б) уравнение (*) имеет два корня разного знака.

Найдем дискриминант D уравнения (*):

$$D=(5a+6)^2-4(4a^2+6a)=9(a+2)^2.$$

В случае (а) имеем: $D = 0$, т.е. $a = -2$. Тогда решением уравнения (*) будет $y = (5a+6)/2 = (5\cdot(-2)+6)/2 = -2$. Так как корень отрицательный, то в этом случае не существует значений параметра a, удовлетворяющих условию задачи.

Случай (б) равносилен тому, что произведение корней $y_1 \cdot y_2$ уравнения (*) отрицательно. По теореме Виета произведение корней равно $y_1 \cdot y_2 = 4a^2 + 6a$. Следовательно, значения параметра a, удовлетворяющие условию задачи, являются решениями неравенства $4a^2 + 6a < 0$, т. е. $-1,5 < a < 0$. ***Ответ.*** $-1,5 < a < 0$.

Задачи для самостоятельного решения

2.4.1. Определите, при каких значениях параметра a сумма корней квадратного уравнения равна 0:
а) $x^2 - (a^2 - 5a + 6)x - a^2 + 5 = 0$; б) $x^2 + (a^2 + 4a - 5)x - a = 0$.

2.4.2. Определите, при каких значениях параметра a произведение корней квадратного уравнения $x^2 - 2x + (a^2 - 5a + 6) = 0$ равно 0.

2.4.3. Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $3x^2 - ax - b = 0$. Найдите значение выражений: а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$; в) $x_1^4 + x_2^4$.

2.4.4. Не вычисляя корней уравнения $2x^2 + bx + a^2 = 0$, найдите значение выражений:

а) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$; б) $x_2 x_1^3 + x_1 x_2^3$; в) $\dfrac{x_1}{x_2^2} + \dfrac{x_2}{x_1^2}$.

2.4.5. Известно, что квадратное уравнение имеет корни. Не решая уравнение, определите знаки корней: а) $x^2 + ax + \dfrac{3a^2}{16} = 0$;
б) $bx^2 + 2(b+1)x + 2b = 0$; в) $(m^2 - 5m + 6)x^2 + (3m - 5)x + 2 = 0$.

2.4.6. Определите все значения параметра a, при которых квадратное уравнение имеет корни, и определите знаки корней:
а) $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$; б) $3ax^2 + (4 - 6a)x + 3(a-1) = 0$;
в) $(a-3)x^2 - 2(3a-4)x + 7a - 6 = 0$; г) $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$.

2.4.7. Найдите сумму квадратов всех корней уравнения $x^2 - 3|x| + 1 = 0$.

2.4.8. Составьте квадратное уравнение с корнями $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$, где числа x_1, x_2 – корни уравнения $2x^2 - 7x + 4 = 0$.

2.4.9. Составьте квадратное уравнение, корни которого были бы на единицу больше корней квадратного уравнения $3x^2 + 6x - 10 = 0$.

2.4.10. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны квадратам корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

2.4.11. Найдите все действительные значения параметра a, при которых корни уравнения $(a-3)x^2 - 2ax + 6a = 0$ действительны и положительны.

2.4.12. Определите все значения параметра a, при которых квадратное уравнение имеет два действительных корня x_1 и x_2, удовлетворяющих заданному условию, если:

а) $x^2 + 3ax + a^2 = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$;

б) $x^2 - ax + a - 1 = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 = 17$;

в) $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ и $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$.

2.4.13. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2-m)x - m - 3 = 0$ наименьшая?

2.4.14. Определите значения параметра a, при которых сумма S квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей. Чему равна эта сумма?

2.4.15. а) При каких значениях параметра a корни уравнения $6x^2 + 3x - a = 0$ удовлетворяют условию $x_1 \cdot x_2^4 + x_2 \cdot x_1^4 = \frac{63}{8}$?

б) При каком положительном значении параметра a корни уравнения $2x^2 + ax - 18 = 0$ удовлетворяют условию $\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = \frac{65}{324}$?

2.4.16. При каких значениях параметра a имеет два корня уравнение: а) $x^4 - (3a-1)x^2 + 2a^2 - a = 0$; б) $x^4 - (4a-5)x^2 + 3a^2 - 5a = 0$?

§2.5. Решение квадратичных неравенств

При решении квадратичных неравенств используется следующее утверждение. ***Если дискриминант*** D ***квадратного трехчлена*** $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ ***положителен, то решение неравенства*** $x^2 + bx + c < 0$ ***есть множество*** $x \in (x_1; x_2)$***; решение неравенства*** $x^2 + bx + c \le 0$ ***– множество*** $x \in [x_1; x_2]$***, где*** x_1, x_2 ***– корни трехчлена. Решение неравенства*** $x^2 + bx + c > 0$ ***есть множество*** $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$***; решение неравенства*** $y = ax^2 + bx + c \ge 0$ ***– множество*** $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$. ***Если же*** $D < 0$***, то для всех*** $x \in \mathbb{R}$ ***выполняется неравенство*** $y = ax^2 + bx + c > 0$.

Замечание. При $a < 0$ умножением обеих частей неравенства на (-1) оно приводится к одному из неравенств, рассмотренных выше.

При решении квадратичных неравенств с коэффициентами, зависящими от параметра, иногда бывает полезно использовать метод графической интерпретации.

Пример 1. *Найти все значения параметра* a, *для которых неравенство* $ax^2 + (a-1)x + a - 3 < 0$ *выполняется при всех действительных значениях* x.

Решение. Если $a = 0$, то данное неравенство имеет вид $-x - 3 < 0$ и справедливо при $x \in (-3; +\infty)$. При $a \ne 0$ исходное неравенство является квадратичным и, может выполняться при всех $x \in \mathbb{R}$ в случае, если ветви параболы $y = ax^2 + (a-1)x + a - 3$ направлены вниз и она не пересекает ось абсцисс. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a < 0, \\ D = (a-1)^2 - 4a(a-3) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ 3a^2 - 10a - 1 > 0. \end{cases}$$

Решением последней системы неравенств являются все значения $a < \dfrac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$.

Ответ. $a < \dfrac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$.

Пример 2. *При каких значениях параметра* a *существует хотя бы одно общее решение неравенств*

$$x^2+4ax+3a^2>1+2a \text{ и } x^2+2ax<3a^2-8a+4\,?$$

Решение. Решим сначала уравнения $x^2+4ax+3a^2-2a-1=0$ и $x^2+2ax-3a^2+8a-4=0$. Корни первого $x_{1,2}=-2a\pm(a+1)$; корни второго $x_{3,4}=-a\pm 2(a-1)$. Коэффициенты при x^2 в данных неравенствах положительны, поэтому решением $x^2+4ax+3a^2-2a-1>0$ является множество значений x, лежащих на числовой прямой за корнями x_1 и x_2, а решением $x^2+2ax-3a^2+8a-4<0$ – интервал между x_3 и x_4. Корнями первого уравнения являются числа $-3a-1$ и $-a+1$, второго – числа $-3a+2$ и $a-2$.

Выясним, при каких значениях параметра a корень $-3a-1$ лежит на числовой прямой Ox правее корня $-a+1$. Для этого решим неравенство $-3a-1>-a+1$. Его решением будет $a<-1$. Соответственно, при $a>-1$ корни расположены в обратном порядке. Отметим, что не существует ни одного общего решения неравенств, если корни второго уравнения лежат между корнями первого. Найдем значения параметра, соответствующие отмеченному случаю, а затем исключим их.

Для этого решим совокупность двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a<-1, \\ -a+1\le -3a+2\le -3a-1, \\ -a+1\le a-2\le -3a-1, \end{cases} \\ \begin{cases} a>-1, \\ -3a-1\le -3a+2\le -a+1 \\ -3a-1\le a-2\le -a+1. \end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система не имеет решений. Решением второй являются $a\in[0,5;1,5]$. Исключая найденные значения, получаем ответ.

Ответ. $a\in(-\infty;0,5)\cup(1,5;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

2.5.1. На рис. 19 изображены графики двух квадратных трехчленов $y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $y_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$. Числа x_1, x_2 и x_3, x_4 – их корни соответственно. Используя числа x_1, x_2 и x_3, x_4, запишите ответы приведенных ниже систем и совокупностей неравенств.

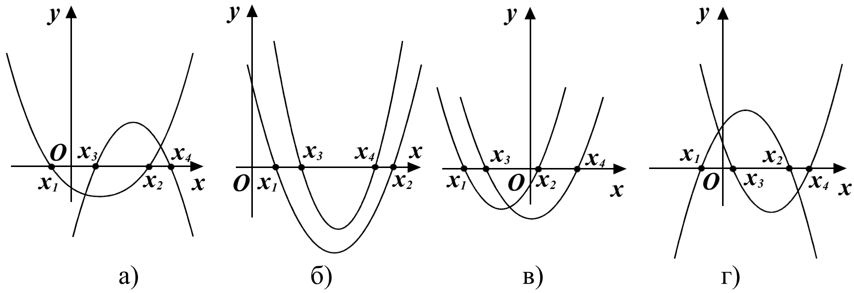

Рис. 19

Для рис. 19а. 1) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 < 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \ge 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \ge 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0; \end{cases}$

3) $\left[\begin{array}{l} a_1x^2 + b_1x + c_1 < 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \ge 0. \end{array} \right.$

Для рис. 19б. 4) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 < 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \ge 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \ge 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0; \end{cases}$

6) $\left[\begin{array}{l} a_1x^2 + b_1x + c_1 \ge 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0. \end{array} \right.$

Для рис. 19в. 7) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 < 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \ge 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \ge 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0; \end{cases}$

9) $\left[\begin{array}{l} a_1x^2 + b_1x + c_1 \ge 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0. \end{array} \right.$

Для рис. 19г. 10) $\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1<0, \\ a_2x^2+b_2x+c_2\ge 0; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1>0, \\ a_2x^2+b_2x+c_2\le 0; \end{cases}$

12) $\left[\begin{array}{l} a_1x^2+b_1x+c_1>0, \\ a_2x^2+b_2x+c_2\ge 0. \end{array} \right.$

Для каждого значения параметра a решите неравенства.

2.5.2. а) $x^2\ge a$; б) $x^2<a$; в) $x^2\le a^2-3a-4$;

г) $ax^2>4$; д) $(a^2-3a-4)x^2\le 4$;

е) $ax^2\ge a^2$; ж) $ax^2\le a^3-3a^2-4a$;

з) $(a^2-3a-4)x^2>a-4$; и) $(a^2-3a-4)x^2<4+3a-a^2$.

2.5.3. а) $x^2-2(a+1)x+4a>0$; б) $x^2+(a+1)x+\dfrac{a^2}{4}<0$.

2.5.4. а) $x^2-2(a-1)x+2a+1\ge 0$; б) $x^2+(2-a)x+4a-8\le 0$.

2.5.5. а) $(a^2-6a+5)x^2-(a-5)x\ge 0$;

б) $(a^2-3a-4)x^2-(a^3-16a)x<0$.

2.5.6. а) $ax^2+2x+1\ge 0$; б) $(a-1)x^2+2(a+1)x+a-2\le 0$.

2.5.7. Найдите все значения параметра m, для которых неравенство

$$mx^2-4x+3m+1>0$$

будет выполнено при всех $x>0$.

2.5.8. Найдите все значения параметра a, для которых при всех $x\in\mathbb{R}$ будет выполнено неравенство.

а) $(a+4)x^2-2ax+2a-6<0$;

б) $(a-3)x^2-2ax+3a-6>0$.