Марта Теофилова Стоил Иванов

РЪКОВОДСТВО

за

РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

Университетско издателство
„Паисий Хилендарски“

ISBN 978-619-202-247-1

Предговор

Настоящото ръководство е учебно помагало, предназначено за всички студенти на ПУ „Паисий Хилендарски“, изучаващи учебната дисциплина *Линейна алгебра и аналитична геометрия*.

Ръководството съдържа четиринайсет глави, голяма част от които са структурирани в отделни параграфи. Всяка глава и всеки параграф започват с кратък обзор, който съдържа теоретичните сведения, необходими за решаването на предложените задачи. Голяма част от задачите са подробно решени, а останалите са снабдени с упътване и отговор.

При изготвянето на ръководството сме се ръководили от своя опит, натрупан при провеждането на лекции и упражнения по тази дисциплина. При избора на задачите и структурата на ръководството са използвани както класически, така и съвременни източници от водещи автори в областта.

В заключение, изказваме дълбока благодарност към рецензентите проф. д-р Пенка Рангелова и проф. д-р Стоил Миховски за конструктивните забележки и препоръки, които ни помогнаха да подобрим качеството на настоящото ръководство.

Авторите

Съдържание

Означения

В настоящото ръководство са използвани следните означения:

- $\{a_1, \ldots, a_n\}$ – множество, съставено от елементите $a_1, \ldots a_n$.
- $\mathbb{N}$ – множество на естествените числа.
- $\mathbb{Z}$ – множество (пръстен) на целите числа.
- $\mathbb{Q}$ – множество (поле) на рационалните числа.
- $\mathbb{R}$ – множество (поле) на реалните числа.
- $\mathbb{R}_+$ – множество от неотрицателни реални числа.
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ – множество на реалните числа без нулата.
- $\mathbb{C}$ – множество (поле) на комплексните числа.
- $\mathrm{Re} z$ – реална част на комплексното число z.
- $\mathrm{Im} z$ – имагинерна част на комплексното число z.
- $|z|$ – модул (големина) на комплексното число z.
- $\arg z$ – аргумент на комплексното число z.
- $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ – произволно нормирано поле с абсолютна стойност.
- $\mathbb{K}[z]$ – пръстен на полиномите над полето $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}^n$ – n-мерно векторно пространство над $\mathbb{K}$.
- I_n – множеството от индекси $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- $\sum_{i=1}^{n}$ – сума на n елемента, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
- $A = (a_{ij})$, където $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ – матрица от тип $m \times n$.
- $A \sim B$ – матрицата A е еквивалентна на матрицата B.
- $\det A$ или $|A|$ – детерминанта на матрицата A.
- $\mathsf{rang}\{a_1, \ldots, a_n\}$ – ранг на системата от вектори $\{a_1, \ldots, a_n\}$.
- $\mathsf{rang} A$ – ранг на матрицата A.
- $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ – множеството от всички матрици от тип $m \times n$ с елементи от полето $\mathbb{K}$.
- $M_n(\mathbb{K})$ – множеството от всички квадратни матрици от ред n с елементи от полето $\mathbb{K}$.
- $d(A, B)$ – разстояние от A до B.
- $\overrightarrow{AB}$ – насочена отсечка с начало A и край B.
- $\vec{a}$ или $\mathbf{a}$ – вектор a.
- $\dot{\mathbf{a}}$ – първа производна на вектора a.
- $\mathrm{proj}_{\vec{b}}\, \vec{a}$ – скаларна ортогонална проекция на вектора $\vec{a}$ върху вектора $\vec{b}$.
- $\overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{b}}\, \vec{a}$ – векторна ортогонална проекция на $\vec{a}$ върху ос, определена от посоката на $\vec{b}$.

- $\parallel$ – знак за колинеарност (успоредност). Например, ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, то ще пишем $\vec{a} \parallel \vec{b}$.
- $\uparrow\uparrow$ – знак за еднопосочна колинеарност на вектори.
- $\uparrow\downarrow$ – знак за разнопосочна колинеарност на вектори.
- $\nparallel$ – знак за неколинеарност. Например, ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не са колинеарни, то ще пишем $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.
- $\perp$ – знак за ортогоналност (перпендикулярност). Например, ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ортогонални, то ще пишем $\vec{a} \perp \vec{b}$.

1. **Комплексни числа**

Математика – това е езикът, на който е написана книгата на природата.

Галилео Галилей

От училищния курс по математика са добре познати следните числови множества:

(А) Множество $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ на естествените числа.
(Б) Множество $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ на целите числа.
(В) Множество $\mathbb{Q} = \{p/q \colon p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ на рационалните числа.
(Г) Множество $\mathbb{I}$ на ирационалните числа. Примери за ирационални числа са $\sqrt{2}$, π, e и т.н.
(Д) Множество на реалните числа е $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Забележка 1.1. Лесно се проверява, че $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Определение 1.1. Елементът i ще наричаме *имагинерна единица*, ако $i^2 = -1$.[1]

Определение 1.2. Нека $\mathbb{C}$ е множеството от всички елементи от вида $a + bi$, където $a, b \in \mathbb{R}$, а i е имагинерна единица. Тогава $\mathbb{C}$ се нарича *поле на комплексните числа*, ако за всеки два елемента $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ от $\mathbb{C}$ съществуват елементи $z_1 + z_2$ (*сума*) и $z_1 z_2$ (*произведение*) в $\mathbb{C}$ такива, че:

а) $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$;
б) $z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

Определение 1.3. Елементът $z = a + bi \in \mathbb{C}$ се нарича *комплексно число*[2] в алгебричен вид. Числата a и b се наричат съответно *реална* и *имагинерна* част на z и се означават с $a = \mathrm{Re} z$ и $b = \mathrm{Im} z$.

Забележка 1.2. Като се има предвид Определение 1.2, лесно се проверява, че $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Определение 1.4. Комплексното число $\overline{z} = a - bi$ се нарича *комплексно спрегнато* или *спрегнато* на $z = a + bi$.

---

[1] Символът е въведен от швейцарския математик и физик Леонард Ойлер (1707–1783).

[2] Терминът е въведен от немския математик Карл Фридрих Гаус (1777–1855).

Теорема 1.1. *Нека $z = a + bi$ и $\overline{z}$ е комплексно спрегнатото му число. Тогава са в сила равенствата*

$$z\,\overline{z} = a^2 + b^2 \quad \text{и} \quad z + \overline{z} = 2a.$$

Забележка 1.3. От Теорема 1.1 се вижда, че произведението и сумата на комплексно спрегнати числа са реални числа.

Определение 1.5. Нека $z = a + bi$ и $z \neq 0$, т.е. $a^2 + b^2 \neq 0$. Тогава елементът $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{C}$ се нарича *обратен* на z, ако $z\,\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z}\,z = 1$.

Като се имат предвид Определение 1.2 б), Теорема 1.1 и Определение 1.5, можем да дефинираме деление на комплексни числа.

Определение 1.6. Нека $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ ($z_2 \neq 0$). Тогава комплексното число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,i$$

наричаме *частно* на z_1 и z_2.

Ако Oxy е правоъгълна (декартова[1]) координатна система в равнината, то на всяко комплексно число $z = a + bi$ се съпоставя единствена точка от тази равнина с абсциса a и ордината b. Поради това Oxy много често се нарича *комплексна равнина* или *гаусова равнина*.

Определение 1.7. Нека разгледаме z като точка в комплексна равнина Oxy. Тогава дължината r на отсечката Oz наричаме *модул* на z и ще означаваме с $|z|$, а ъгъла φ, който Oz сключва с абсцисната ос, *аргумент* на z и ще означаваме с $\arg z$.

Забележка 1.4. Аргументът на комплексно число е дефиниран с точност до цяло кратно на 2π. Обикновено се избира стойност на аргумента $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Теорема 1.2. *Нека $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$, където $z = a + bi$. Тогава са в сила следните равенства:*

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = b/a \ (a \neq 0). \tag{1.1}$$

Забележка 1.5. Формулата $\operatorname{tg}\varphi = b/a$ е неприложима, в случай че $a = 0$, т.е. за $z = bi$. Затова трябва да се отбележи, че съгласно първите две равенства в (1.1), $\arg z = \frac{\pi}{2}$ за $b > 0$ и $\arg z = \frac{3\pi}{2}$ за $b < 0$. Числото $z = 0$ (в случая $b = 0$) няма аргумент.

[1]На името на Рене Декарт (*лат.* Ренатус Картезий) (1596–1650) – френски философ, математик и физик.

Забележка 1.6. От Теорема 1.2 се вижда, че всяко комплексно число може да се представи във вида

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

който се нарича *тригонометричен вид* на z.

Теорема 1.3 (Формули на Моавр[1])**.** *Нека $z \in \mathbb{C}$, $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$. Тогава за всяко $n \in \mathbb{N}$ са в сила равенствата*

$$\begin{aligned} z^n &= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \\ \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

където $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Забележка 1.7. Трябва да се отбележи, че първото равенство в (1.2) е валидно и при $n \in \mathbb{Z}$, а второто е следствие от първото.

Задача 1.1. *Да се пресметне:*
а) i^n, където $n \in \mathbb{Z}$; б) i^{2300}; в) i^{1215}; г) i^{854}; д) i^{1023}.

Решение. а) Без ограничения на общността може да приемем, че $n \in \mathbb{Z}_+$. Ще разгледаме два случая:

Случай 1. Нека $n = 2k$, където $k = 0, 1, \ldots$. Тъй като $|i| = 1$ и $\arg i = \pi/2$, то от първата формула в (1.2) получаваме

$$\begin{aligned} i^n &= i^{2k} = 1^{2k}(\cos k\pi + i\sin k\pi) = \cos k\pi \\ &= \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, 2, \ldots = 2m \\ -1 & \text{при } k = 1, 3, \ldots = 2m+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Случай 2. Нека $n = 2k+1$, където $k = 0, 1, \ldots$. Аналогично на първия случай, от (1.2) получаваме

$$\begin{aligned} i^n &= \cos\frac{2k+1}{2}\pi + i\sin\frac{2k+1}{2}\pi = i\sin\frac{2k+1}{2}\pi \\ &= \begin{cases} i & \text{при } k = 2m \\ -i & \text{при } k = 2m+1, \end{cases} \end{aligned}$$

където $m = 0, 1, \ldots$.

Като обединим двата случая, за $m = 0, 1, \ldots$ получаваме следното общо решение

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 4m \\ i & \text{при } k = 4m+1 \\ -1 & \text{при } k = 4m+2 \\ -i & \text{при } k = 4m+3. \end{cases}$$

[1] Абрахам дьо Моавр (1667–1754) – френски математик.

Отговори. б) 1; в) $-i$; г) -1; д) i.

Задача 1.2. *Дадени са числата*

$$z_1 = 2+i,\ z_2 = 1-2i,\ z_3 = 3-i,\ z_4 = 3+2i,\ z_5 = 1-3i.$$

Да се пресметнат:
а) z_1+z_2*; б)* $z_1\,z_3$*; в)* $z_1\,z_2/z_3$*; г)* $z_1\,z_5$*; д)* z_3/z_4*; е)* z_5/z_2*; ж)* z_4/z_5.

Решение. а) $z_1+z_2 = 2+i+1-2i = 3-i$;

в) $\dfrac{z_1\,z_2}{z_3} = \dfrac{(2+i)(1-2i)}{3-i} = \dfrac{2-4i+i-2i^2}{3-i} = \dfrac{4-3i}{3-i} =$
$= \dfrac{(4-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \dfrac{15-5i}{3^2+1^2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i.$

Отговори. б) $7+i$; г) $5-5i$; д) $7/13-9/13i$; е) $7/5-1/5i$;
ж) $-3/10+11/10i$.

Задача 1.3. *Да се представят в тригонометричен вид числата:*
а) 1*; б)* $-\sqrt{3}$*; в)* $2i$*; г)* $-3/2i$*; д)* $-1-i$*; е)* $-\sqrt{3}+i$*; ж)* $\sqrt{3}+i$*;*
з) $-1/2+1/2i$*; и)* $2/3-2\sqrt{3}/3i$.

Решение. а) От Определение 1.7 и Теорема 1.2 имаме $r=1$ и $\varphi = \arg 1 = 0$. Тогава, като се има предвид Забележка 1.6, получаваме $1 = \cos 0 + i\sin 0$;

д) От последното равенство в (1.1) имаме $\operatorname{tg}\varphi = 1$, което означава, че $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ или $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$. Тъй като $z=-1-i$ лежи в трети квадрант, то заключаваме, че $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$. От друга страна, третото равенство в (1.1) ни дава $r=\sqrt{2}$. Следователно

$$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Отговори. б) $\sqrt{3}(\cos\pi + i\sin\pi)$; в) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$;
г) $\dfrac{3}{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$; е) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$;
ж) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$; з) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$;
и) $\dfrac{4}{3}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

Задача 1.4. *Да се пресметне:*

а) $(1-i)^{31}$*; б)* $(1+i)^{22}$*; в)* $(\sqrt{3}+i)^{21}$*; г)* $(\sqrt{3}-i)^{16}$*;*

д) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$*; е)* $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{10}}$*; ж)* $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

Решение. От свойствата на степените получаваме:

$$\text{а) } (1-i)^{31} = (1-i)^{30}(1-i) = [(1-i)^2]^{15}(1-i) = (-2i)^{15}(1-i) = 2^{15}i(1-i) = 2^{15}(1+i);$$

$$\text{д) } \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \frac{[(1+i)^2]^2(1+i)}{(1-i)^2(1-i)} = \frac{(2i)^2(1+i)}{(-2i)(1-i)} = \frac{-4(1+i)}{-2(1+i)} = 2.$$

е) За решаването на този пример е удобно първо да представим числителя и знаменателя в тригонометричен вид и след това да използваме първата от формулите на Моавр (1.2). Така получаваме

$$\begin{aligned}\frac{(1+i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{10}} &= \frac{[2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})]^{15}}{[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})]^{10}} = \frac{2^{15}(\cos\frac{15\pi}{3}+i\sin\frac{15\pi}{3})}{2^5(\cos\frac{10\pi}{4}+i\sin\frac{10\pi}{4})} \\ &= \frac{2^{10}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi)}{\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}} = -\frac{2^{10}}{i} = 2^{10}i.\end{aligned}$$

Отговори. б) $-2^{11}i$; в) $-2^{21}i$; г) $-2^{15}(1+i\sqrt{3})$; ж) -1.

Задача 1.5. *Да се пресметне:*

а) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$; *б)* $\sqrt{-18i}$; *в)* $\sqrt{3-4i}$; *г)* $\sqrt{7+24i}$;

д) $\sqrt{-3+i\sqrt{7}}$; *е)* $\sqrt[3]{1}$; *ж)* $\sqrt[3]{8i}$; *з)* $\sqrt[4]{-1}$; *и)* $\sqrt[4]{-4}$.

Решение. а) Ще решим задачата по два начина. Първият е по-удобен за числа, които лесно се представят в тригонометричен вид.

Начин 1. Тригонометричният вид на числото е

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Тогава от втората формула на Моавр получаваме

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\right] = \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

Начин 2. Нека $\sqrt{1+i\sqrt{3}} = a+bi$, където $a,b\in\mathbb{R}$. Тогава получаваме

$$1+i\sqrt{3} = (a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi.$$

Тези равенства се удовлетворяват, тогава и само тогава, когато

$$\left|\begin{array}{l} a^2-b^2=1 \\ 2ab=\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Решенията на тази система са $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Следователно

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}} = \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

Отговори. б) $\pm(3-3i)$; в) $\pm(2-i)$; г) $\pm(4+3i)$;

д) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{14}}{2}i\right)$; е) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1$; ж) $\pm(\sqrt{3}+i), -2i$;

з) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right), \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$; и) $\pm(1+i), \pm(1-i)$.

Задача 1.6. *Да се решат уравненията:*

а) $x^2+x+1=0$;
б) $x^2+4x+13=0$;
в) $x^3-8=0$;
г) $x^2-(4+3i)x+1+7i=0$;
д) $ix^2+(1+5i)x+2+6i=0$;
е) $(1-i)x^2-(3+i)x+2i=0$;
ж) $x^4-3x^2+4=0$;
з) $x^2+(5-2i)x+5-5i=0$.

Отговори. а) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $-2 \pm 3i$; в) $2, -1 \pm i\sqrt{3}$; г) $3+i, 1+2i$;

д) $-2, -3+i$; е) $i, 1+i$; ж) $\pm\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}i\right), \pm\left(\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$;

з) $-2+i, -3+i$.

2. Полиноми и рационални функции

> Нито едно човешко изследване не може да се нарече истинска наука, ако не е минало през математически доказателства.
>
> *Леонардо да Винчи*

2.1. Полиноми.

Определение 2.1. Изразът

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{2.1}$$

където $a_i \in \mathbb{C}\,(i \in I_n)$, се нарича полином над полето $\mathbb{C}$ и ще означаваме с $P_n \in \mathbb{C}[x]$. Ако $a_n \neq 0$, то числото $n \in \mathbb{N}$ се нарича *степен на полинома*, коефициентът a_n се нарича *старши коефициент*, а коефициентът a_0 *свободен член*.

Определение 2.2. Полиномът P_n се нарича *нормиран*, ако $a_n = 1$.

Пример 2.1. От училищния курс по математика са добре познати полиномите:

а) $P_0(x) = a$ – константа;
б) $P_1(x) = ax + b$ – линейна функция;
в) $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ – квадратен тричлен;
г) $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ – кубична функция.

Определение 2.3. Всяко $\xi \in \mathbb{C}$, за което $P_n(\xi) = 0$, се нарича *нула* на полинома P_n или *корен* на уравнението $P_n(x) = 0$.

Теорема 2.1 (Основна теорема на алгебрата на комплексните числа)**.** *Всеки полином над полето на комплексните числа $\mathbb{C}$ се разлага на линейни множители във вида:*

$$P_n(x) = a_n (x - \xi_1)^{k_1} (x - \xi_2)^{k_2} \ldots (x - \xi_s)^{k_s},$$

където $\xi_1, \ldots, \xi_s$ са нулите на полинома с кратности съответно $k_1, \ldots, k_s$, като $k_1 + \cdots + k_s = n$.

Теорема 2.2 (Фактор теорема)**.** *Нека $\xi \in \mathbb{C}$ е нула на полинома* (2.1)*. Тогава*

$$P_n(x) = (x - \xi) Q_{n-1}(x),$$

където коефициентите на $Q_{n-1} = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_0$ *се определят от равенствата* $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = \xi b_{n-1} + a_{n-1}, \dots,$ $b_0 = \xi b_1 + a_1$.

Следствие 2.1. *Всеки ненулев полином* $P \in \mathbb{C}[x]$ *притежава толкова на брой нули, колкото е степента му.*

Теорема 2.3. *Нека* P_n *е нормиран полином с цели коефициенти и* $\xi \in \mathbb{Q}$ *е нула на* P_n. *Тогава* ξ *дели свободния член на* P_n.

Теорема 2.4. *За всеки два ненулеви полинома* P_n *и* Q_m *съществуват полиноми* G_{n-m} *и* R_s *такива, че*

$$P_n(x) = Q_m(x)G_{n-m}(x) + R_s(x),$$

където $0 \le s \le m - 1 < m \le n$.

Забележка 2.1. Полиномите G_{n-m} и R_s се наричат съответно *частно* и *остатък* от делението на P_n и Q_m.

Задача 2.1. *Да се намерят частното* G *и остатъкът* R *от делението на полиномите:*

а) $P(x) = 4x^3 + x^2 - 2x + 1$ *и* $Q(x) = x^2 + 2x - 2$;
б) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ *и* $Q(x) = x - 2$;
в) $P(x) = x^3 + 1$ *и* $Q(x) = x + 1$;
г) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 6x - 2$ *и* $Q(x) = x^3 + 2x + 1$;
д) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x + 1$ *и* $Q(x) = 2x^2 - 4x + 1$;
е) $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 1$ *и* $Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$;
ж) $P(x) = 6x^5 - x^4 + 10x^3 + 5x^2 - 9x$ *и* $Q(x) = 3x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Решение. а) Делението на полиномите P и Q ще извършим по следната схема, която е аналогична на добре познатата схема за деление на числа:

$$\begin{array}{rl}
 & 4x^3 + x^2 - 2x + 1 : (x^2 + 2x - 2) = \boxed{4x - 7} = G(x) \\
- & \underline{(4x^3 + 8x^2 - 8x)} \\
 & -7x^2 + 6x + 1 \\
- & \underline{(-7x^2 - 14x + 14)} \\
 & \boxed{20x - 13} = R(x)
\end{array}$$

Отговори. б) $G(x) = x^3 - 3x - 4$, $R(x) = -3$;

в) $G(x) = x^2 - x + 1$; г) $G(x) = x - 3$, $R(x) = x^2 - x + 1$;

д) $G(x) = x^2 - 1/2\,x + 1/2$, $R(x) = 3/2\,x + 1/2$;

е) $G(x) = 1/3\,x - 4/9$, $R(x) = -20/9\,x - 5/9$;

ж) $G(x) = 2x^2 - x + 5$, $R(x) = 5$.

Задача 2.2. *Да се разложат на линейни множители полиномите:*

а) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24$;
б) $P(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$;
в) $P(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$;
г) $P(x) = x^6 - 4x^4 - x^2 + 4$;
д) $P(x) = x^3 - 11x^2 + 38x - 40$;
е) $P(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;
ж) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 15x + 50$.

Решение. а) От Теорема 2.3 следва, че ако полиномът притежава рационални нули, то те са измежду делителите на -24. Ще намерим последователно нулите на полинома, като използваме *схемата на Хорнер*[1].

	1	2	−13	−38	−24	разлагане на $P(x)$ (вж. Теорема 2.2)
1	1	3	−10	−48	$\boxed{-72}$	$\Rightarrow$ 1 не е нула на полинома
−1	1	1	−14	−24	0	$P(x) = (x+1)(x^3 + x^2 - 14x - 24)$
−2	1	−1	−12	0		$P(x) = (x+1)(x+2)(x^2 - x - 12)$
−3	1	−4	0			$P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x-4)$

Отговори. б) $P(x) = (x-1)(x+1)(x-4)$;

в) $P(x) = (x-1)^2(x+3)^2$;

г) $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x+i)(x-i)$;

д) $P(x) = (x-2)(x-4)(x-5)$;

е) $P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+i)(x-i)$;

ж) $P(x) = (x+5)(x-2)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$.

2.2. **Рационални функции.**

Определение 2.4. Изразът

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \tag{2.2}$$

където P_n и Q_m са полиноми, се нарича *рационална функция*.

Забележка 2.2. Рационалната функция (2.2) се нарича *правилна*, ако $n < m$ и *неправилна*, ако $n \geq m$.

[1]Уилям Джордж Хорнер (1786–1837) – британски математик.

Забележка 2.3. От Теорема 2.4 се вижда, че всяка неправилна рационална функция има единствено представяне в сума от полином и правилна рационална функция.

Определение 2.5. Функцията

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \tag{2.3}$$

където $A, a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и $x \neq a$, се нарича *елементарна дроб от първи вид.*

Определение 2.6. Функцията

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \tag{2.4}$$

където $A, B, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и дискриминантата $\mathscr{D} = p^2 - 4q$ е отрицателна, се нарича *елементарна дроб от втори вид.*

Теорема 2.5. *Всяка правилна рационална функция има единствено разлагане в сума от елементарни дроби от първи и втори вид.*

Метод на неопределените коефициенти.

С помощта на Теорема 2.1 може да се докаже, че всеки нормиран полином $Q_m \in \mathbb{R}[x]$ може да се представи като произведение на неразложими множители, т.е.

$$Q_m(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\xi_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{r}(x^2+p_jx+q_j)^{l_j},$$

а рационалната функция (2.2) се представя като сума от елементарни дроби по следния начин:

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{A_{i1}}{x-\xi_i} + \frac{A_{i2}}{(x-\xi_i)^2} + \cdots + \frac{A_{ik_i}}{(x-\xi_i)^{k_i}}\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{B_{j1}x+C_{j1}}{x^2+p_jx+q_j} + \cdots + \frac{B_{jl_j}x+C_{jl_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}}\right). \end{aligned}$$

Задача 2.3. *Да се разложат в сума от елементарни дроби рационалните функции:*

а) $R(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x-10}$;

б) $R(x) = \dfrac{2x+14}{x^3-7x-6}$;

в) $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$;

г) $R(x) = \dfrac{x^2+2}{(x+1)(x-2)^2}$;

д) $R(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)(x-1)^2}$;

е) $R(x) = \dfrac{x^4}{x^3-1}$;

ж) $R(x) = \dfrac{x^6}{x^4-1}$;

з) $R(x) = \dfrac{x^6+x^5-x^2}{x^4-1}$.

Решение. а) Лесно се проверява, че $x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$. Тогава, като използваме метода на неопределените коефициенти, получаваме

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} &= \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5} = \frac{Ax+5A+Bx-2B}{(x-2)(x+5)} \\ &= \frac{(A+B)x+5A-2B}{(x-2)(x+5)}.\end{aligned}$$

Приравнявайки коефициентите пред съответните степени на x в числителите на най-лявата и най-дясната дроб, получаваме

$$\left|\begin{array}{l} A+B=2 \\ 5A-2B=3. \end{array}\right.$$

Тази система има единствено решение $A=1$ и $B=1$, което означава, че

$$R(x) = \frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+5}.$$

в) Като разложим знаменателя по всички степени на $x+1$, получаваме

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)^2} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2} \\ &= \frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}.\end{aligned}$$

Аналогично на предния пример, заключаваме, че последните равенства се удовлетворяват тогава и само тогава, когато

$$\left| \begin{array}{l} A + B = 0 \\ 2A + B + C = 0 \\ A = 1. \end{array} \right.$$

Тази система има единствено решение $A = 1$, $B = -1$ и $C = -1$, което означава, че

$$R(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Упътване. б) Разложете знаменателя на линейни множители по схемата на Хорнер. е) Чрез деление на полиномите представете $R(x)$ като сума от полином и правилна рационална функция.

Отговори. б) $R(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{x+1}$;

г) $R(x) = \dfrac{1}{3(x+1)} + \dfrac{2}{3(x-2)} + \dfrac{2}{(x-2)^2}$;

д) $R(x) = \dfrac{1}{4(x+1)} + \dfrac{3}{4(x-1)} + \dfrac{1}{2(x-1)^2}$;

е) $R(x) = x + \dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{x-1}{3(x^2+x+1)}$;

ж) $R(x) = x^2 + \dfrac{1}{4(x-1)} - \dfrac{1}{4(x+1)} + \dfrac{1}{2(x^2+1)}$;

з) $R(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{4(x-1)} + \dfrac{1}{4(x+1)} - \dfrac{x}{2(x^2+1)}$.

3. Детерминанти

> Във всяка наука истината е точно толкова, колкото е в нея математиката.
>
> *Имануел Кант*

Определение 3.1. Нека $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ е произволна *пермутация* (подредба) на числата $1, 2, \ldots, n$. Тогава числата α_i и α_j образуват *инверсия*, ако $\alpha_i > \alpha_j$ и α_i стои пред α_j. Броят на инверсиите в пермутацията $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ще означаваме с $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$.

Пример 3.1. $[1, 2, 3, 4] = 0$, $[2, 3, 1, 4] = 2$, $[4, 2, 3, 1] = 5$, $[3, 2, 1] = 3$, $[3, 1, 2] = 2$.

Определение 3.2. Алгебричната сума

$$\Delta_n = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \tag{3.1}$$

се нарича *детерминанта* от n-ти ред и ще означаваме с квадратната таблица

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение 3.3. Елементите $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуват *главния диагонал* на Δ_n, а елементите $a_{1n}, \ldots, a_{n1}$ образуват *втория диагонал* на Δ_n.

Пример 3.2. От Определение 3.2 получаваме:

а) детерминанта от втори ред

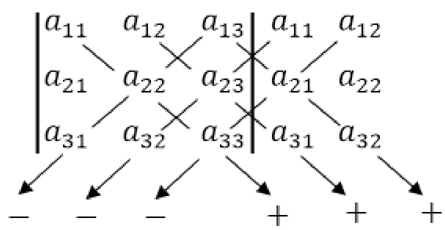
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \tag{3.2}$$

б) детерминанта от трети ред

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \tag{3.3}$$

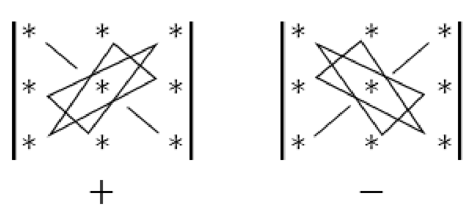
Правила за пресмятане на детерминанти от трети ред:

1) *Правило на Сарус.*[1] След детерминантата се преписват последователно първият и вторият ѝ стълб. Тогава събираемите, които участват със знак плюс в (3.3), са произведенията на елементите от главния диагонал и от двата диагонала, успоредни на него. Събираемите, които участват със знак минус в (3.3), са произведенията на елементите от втория диагонал и от двата диагонала, успоредни на него (Фигура 3.1).



Фигура 3.1. Правило на Сарус

2) *Правило на триъгълниците.* Съгласно това правило, събираемите, които участват със знак плюс в (3.3), са произведенията на елементите от главния диагонал и още две произведения, които се получават от елементите във върховете на двата триъгълника с основи, успоредни на главния диагонал. Събираемите, участващи със знак минус в (3.3), се получават по аналогичен начин от втория диагонал (Фигура 3.2).



Фигура 3.2. Правило на триъгълниците

[1]Пиер Фредерик Сарус (1798–1861) – френски математик.

Определение 3.4. Детерминантата Δ_{ij} от $(n-1)$-ви ред, получена от Δ_n чрез премахване на i-тия ред и j-тия стълб, се нарича *поддетерминанта* (*адюнгиран минор*) на елемента a_{ij}.

Определение 3.5. Детерминантата $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ се нарича *адюнгирано количество* на елемента a_{ij}.

Основни свойства на детерминантите:

(1) *Транспониране* на детерминанта се нарича преобразуване на детерминанта, при което се разменят местата на съответни редове и стълбове. Детерминантата, получена от Δ_n чрез транспониране, ще означаваме с Δ_n^T. Изпълнено е равенството $\Delta_n = \Delta_n^T$, което показва, че редовете и стълбовете на детерминантите са равноправни.

(2) Ако се разменят местата на два реда (стълба), то се получава детерминанта с противоположна стойност.

(3) Ако елементите на един ред (стълб) имат общ множител, той може да се изнесе като множител на детерминантата.

(4) Ако всички елементи на един ред (стълб) са равни на нула, то детерминантата е равна на нула.

(5) Ако съответните елементи на два реда (стълба) са пропорционални, то детерминантата е равна на нула.

(6) Ако към елементите на един ред (стълб) се прибавят съответните елементи на друг ред (стълб), умножени с произволно число, то детерминантата не променя стойността си.

(7) Ако всички елементи под (над) главния диагонал на една детерминанта са равни на нула, т.е. детерминантата е в *триъгълен вид*, то стойността ѝ е равна на произведението на елементите по главния диагонал.

(8) Сумата от произведенията на елементите на един ред (стълб) на дадена детерминанта със съответните адюнгирани количества на елементите на друг ред (стълб) е равна на нула.

(9) Пресмятането на детерминанта от n-ти ред може да се сведе до пресмятането на детерминанти от $(n-1)$-ви ред чрез формулата (*правило на Лаплас*[1])

$$\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \tag{3.4}$$

където A_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij}. Това представяне се нарича *развитие на детерминантата по i-тия ред*. Аналогично развитие може да се направи по всеки ред или стълб.

[1]Пиер-Симон Лаплас (1749–1827) – френски математик и астроном.

Задача 3.1 (Детерминанти от втори и трети ред)**.** *Да се пресметнат детерминантите:*

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$*; б)* $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$*; в)* $\begin{vmatrix} a & 2 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$*; г)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$*;*

д) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$*; е)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$*; ж)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$*; з)* $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -5 & 15 \end{vmatrix}$.

Решение. а) Като използваме Пример 3.2 а), получаваме

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 2(-1) = 5.$$

з) За пресмятането на детерминантата ще приложим свойство (3) към трети ред и след това правилото на Сарус:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -5 & 15 \end{vmatrix} &= 5.\left|\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{matrix} \\ &= 5[1.4.3 + (-2)(-2)1 + 0 \\ &- (-2)3.3 - 1(-2)(-1) - 0] = 160. \end{aligned}$$

Отговори. б) 10; в) $9a + 6$; г) 16; д) 1; е) 9; ж) 0.

Задача 3.2 (Детерминанти от четвърти и по-висок ред)**.** *Да се пресметнат детерминантите:*

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$*; б)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$*; в)* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$*;*

г) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$*; д)* $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$*;*

е) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -4 & -15 \end{vmatrix}$*; ж)* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$*;*

з) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. а) Ще решим задачата по три начина, в които ще използваме различни свойства на детерминантите.

Начин 1. При това решение ще използваме само свойство (9). Развивайки детерминантата по първи ред, от (3.4) получаваме

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} &= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 10 \\ 1 & 10 & 20 \end{vmatrix} \\ &+ 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 20 \end{vmatrix} - 1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \\ &= 4-6+4+1=3. \end{aligned}$$

Начин 2. При това решение ще използваме последователно свойства (6), (9) и (3):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 3 & 9 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 9 & 21 \end{vmatrix} \\ &= 3(35+22+30-25-28-33) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Начин 3. При това решение ще използваме последователно свойства (6) и (7):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 3 & 9 & 21 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1.1.1.3 = 3.$$

Отговори. б) 21; в) 20; г) -86; д) -5; е) -120; ж) 84; з) 6.

4. Матрици

Математиката притежава не само истината, но и върховната красота – красота студена и сурова, като тази на скулптурата.

Бертранд Ръсел

4.1. Действия с матрици.

Определение 4.1. Правоъгълна таблица от елементи от полето $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

се нарича *матрица над* $\mathbb{K}$ *от тип* $m \times n$. За краткост ще означаваме още с $A = (a_{ij})$, където $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Забележка 4.1. Множеството от всички матрици от тип $m \times n$ с елементи от полето $\mathbb{K}$ ще означаваме с $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ако $m = n$, то за краткост ще означаваме $M_n(\mathbb{K})$.

Определение 4.2. Матриците A и B ще наричаме *еквивалентни* и ще означаваме с $A \sim B$, ако се получават една от друга чрез елементарните преобразувания:

(I) размяна на местата на два реда (стълба);
(II) умножаване на елементите на даден ред (стълб) с число, различно от нула;
(III) прибавяне на елементите на даден ред (стълб) към съответните елементи на друг ред (стълб), умножени с едно и също число.

Определение 4.3. Нека $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Тогава матрицата $A^T = (a_{ji}) \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, получена от A чрез размяна на местата на съответни редове и стълбове, се нарича *транспонирана матрица* на A.

Някои забележителни матрици.

(А) Матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

се нарича *квадратна матрица от n-ти ред* (матрица от тип $n \times n$).

(Б) Квадратната матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

се нарича *триъгълна матрица*.

(В) Квадратната матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

се нарича *диагонална матрица*.

(Г) Квадратната матрица

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

се нарича *единична матрица* от n-ти ред.

(Д) Правоъгълната матрица

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

се нарича *нулева матрица*.

Действия с матрици.

I. Линейни действия с матрици

Определение 4.4. Нека $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Тогава матрицата

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

се нарича *сума* на матриците A и B.

Определение 4.5. Нека $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ и $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогава матрицата

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

се нарича *произведение* на матрицата A с λ.

II. Умножение на матрици

Определение 4.6. Нека $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ и $B = (b_{ij}) \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. Тогава матрицата от тип $m \times p$ с елементи c_{ij}, получени по правилото

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}, \tag{4.1}$$

т.е. матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1p}+\cdots+a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1p}+\cdots+a_{2n}b_{np} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}b_{11}+\cdots+a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12}+\cdots+a_{mn}b_{n2} & \cdots & a_{m1}b_{1p}+\cdots+a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

се нарича *произведение* на матриците A и B (в посочения ред) и ще означаваме с AB.

Забележка 4.2. Правилото за умножение на матрици (4.1) накратко се нарича *ред по стълб*, защото елементите от редовете на матрицата A умножават съответните елементи от стълбовете на B. Лесно се проверява, че за така дефинираното произведение не е в сила комутативният закон, т.е. $AB \neq BA$ за произволни A, B. Поради това, когато се говори за произведение (умножение) на матрици, е необходимо да се използват уточненията *умножение отляво* или *умножение отдясно*.

Пример 4.1. Нека $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Тогава от Определение 4.6 получаваме

$$AB = \begin{pmatrix} -1.1 + 1.3 & -1(-1) + 1.2 \\ 2.1 + 0.3 & 2(-1) + 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

и

$$BA = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.1 (Основни свойства)**.** *Нека A, B и C са квадратни матрици от n-ти ред и $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогава са в сила свойствата:*

1) $(AB)C = A(BC)$ – асоциативен закон;
2) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
3) $A(B + C) = AB + AC$ – ляв дистрибутивен закон;
4) $(A + B)C = AC + BC$ – десен дистрибутивен закон;
5) $AE_n = E_nA = A$.

Забележка 4.3. Свойствата 1)–4) са в сила и за правоъгълни матрици при условие, че означените произведения са възможни.

Задача 4.1. *Дадени са матриците*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad F = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Да се намерят матриците:
а) $A + B$; б) $3B$; в) $2A + 7B$; г) CD; д) DF; е) FD; ж) CDF; з) $AD + E_3$.

Решение. а) От Определение 4.4 получаваме

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) & 4 + 3 \\ -2 + 2 & 5 + (-4) \\ 6 + (-3) & 8 + (-5) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

б) От Определение 4.5 получаваме

$$3B = 3\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-1) & 3.3 \\ 3.2 & 3(-4) \\ 3(-3) & 3(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & -12 \\ -9 & -15 \end{pmatrix}.$$

г) От Определение 4.6 получаваме

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.1+2.0 & 1(-1)+2.2 & 1.1+2(-1) \\ -1.1+(-3)0 & -1(-1)+(-3)2 & -1.1+(-3)(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отговори. в) $\begin{pmatrix} -3 & 29 \\ 10 & -18 \\ -9 & -19 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -2 & 13 & -7 \\ 6 & 10 & -1 \end{pmatrix}$.

4.2. **Обратна матрица. Матрични уравнения.**

Лесно се вижда, че на всяка квадратна матрица може да се постави в съответствие детерминанта. Нека A е квадратна матрица. Тогава детерминантата на A ще означаваме с $\det A$ или $|A|$.

Определение 4.7. Квадратната матрица A се нарича *неособена* или *неизродена*, ако $\det A \neq 0$. В противен случай се нарича *особена* или *изродена*.

Определение 4.8. Нека A е неособена матрица. Тогава квадратната матрица A^{-1} се нарича *обратна* на A, ако

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Теорема 4.2 (Метод на адюнгираните количества)**.** *Всяка неособена матрица A притежава единствена обратна матрица*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

където A_{ij} са адюнгираните количества на елементите a_{ij} на $|A|$.

Следствие 4.1. *Нека матрицата* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *е неособена. Тогава*

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Метод на Гаус-Жордан[1] за намиране на обратна матрица:

1) Образуваме разширената матрица $(A|E_n)$.
2) Извършваме краен брой елементарни преобразувания само по редовете на $(A|E_n)$ така, че

$$(A|E_n) \sim \cdots \sim (E_n|B).$$

Тогава $B = A^{-1}$.

Забележка 4.4. Понятието *обратна матрица* ни дава възможност да решаваме матрични уравнения от вида

$$AX = B \quad \text{и} \quad YA = B,$$

където X и Y са неизвестни матрици. Наистина, ако A притежава обратна матрица A^{-1}, то от Определение 4.8 получаваме съответно $X = A^{-1}B$ и $Y = BA^{-1}$.

Задача 4.2. *Да се намерят обратните матрици на матриците:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 3 & -5 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix};$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad L = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & -4 \\ -1 & -4 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & -5 & -4 \end{pmatrix};$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ -3 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 6 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

[1]Вилхелм Жордан (1842–1899) – немски геодезист.

Решение. Тъй като $\det A = -1$, то A е неособена. За намирането на A^{-1} можем да използваме метода на адюнгираните количества, т.е. Следствие 4.1. Така от (4.3) получаваме

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ще намерим F^{-1} по два начина.

Начин 1. Тъй като $\det F = 2$, то F е неособена. Тогава за намирането на F^{-1} можем да приложим Теорема 4.2. За адюнгираните количества получаваме:

$$F_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad F_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad F_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$F_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad F_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad F_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$F_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad F_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8; \quad F_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7.$$

Тогава от (4.2) получаваме

$$F^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 2 & -4 & 8 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Начин 2. Ще използваме метода на Гаус-Жордан за намиране на обратна матрица. Разширяваме матрицата F с единичната квадратна матрица E от същия ред като F, т.е. трети, след което извършваме елементарни преобразувания само по редовете на цялата матрица $(F|E)$ така, че E да премине на мястото на F. Съгласно използвания метод, матрицата, получена вдясно (на мястото на E), ще бъде F^{-1}.

$$
\begin{aligned}
(F|E) &= \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot (-1/2) \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right) = (E|F^{-1}).
\end{aligned}
$$

Отговори.

$$
B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\ C^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & 11/3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};
$$

$$
D^{-1} \quad \text{не съществува} \quad ; G^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix};
$$

$$
H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}; \quad J^{-1} = \begin{pmatrix} 23/3 & -2 & -4/3 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ -8/3 & 1 & 1/3 \end{pmatrix};
$$

$$
K^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -2 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};
$$

$$
L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -10 & 1 & -4 & -8 \\ 13 & -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}; \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix};
$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 8 & -5 & 12 \\ 1 & 5 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.3. *Да се намери неизвестната матрица X от уравнението:*

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & -7 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$;

г) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

д) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

е) $X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Въвеждаме означението

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогава, като използваме някой от методите, представени в Задача 4.2, намираме

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножавайки отляво двете страни на уравнението с A^{-1}, получаваме:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & -7 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отговори. б) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

г) $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; д) $X = \begin{pmatrix} -7/2 & 1/2 & 5/2 \\ -7/2 & -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$;

е) $X = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$; ж) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Забележка 4.5. За решаването на г), д) и е) е необходимо двете страни на уравненията да се умножат отдясно. При решаването на ж) трябва да се умножава отляво и отдясно.

5. **Линейни пространства. Линейна зависимост**

Математиката е най-красивото и мощно създание на човешкия дух.

Стефан Банах

5.1. **Ранг на матрица и ранг на система от вектори.**

Определение 5.1. Множество L се нарича *линейно (векторно) пространство* над полето $\mathbb{K}$, ако за всеки два елемента $x, y \in L$ и число $\lambda \in \mathbb{K}$ еднозначно са определени *сума* $x + y \in L$ и *произведение с число* $\lambda x \in L$ такива, че за всяко $x, y, z \in L$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ са в сила свойствата:

1) $x + y = y + x$ (комутативност);
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (асоциативност);
3) съществува елемент $\mathbf{0} \in L$, наречен *нула*, такъв че $x + \mathbf{0} = x$;
4) съществува елемент $-x \in L$, наречен *противоположен* на x, такъв че $x + (-x) = \mathbf{0}$;
5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
8) $1.x = x$.

Елементите на едно линейно пространство ще наричаме *вектори*.

Пример 5.1. Примери за линейни пространства са:

- множеството на реалните числа $\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$;
- множеството на комплексните числа $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$;
- множеството на всички наредени n-торки реални (комплексни) числа $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) над $\mathbb{R}$;
- множеството на матриците $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ над $\mathbb{R}$.

Проверете и дайте други примери!

Определение 5.2. Нека L е линейно пространство над полето $\mathbb{K}$. Тогава векторът $y \in L$ се нарича *линейна комбинация* на векторите $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$, ако

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

където $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Определение 5.3. Нека L е линейно пространство. Тогава векторите $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$ се наричат *линейно зависими*, ако съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, поне едно от които е различно от нула и такива, че е в сила равенството

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \mathbf{0}.$$

В противен случай векторите се наричат *линейно независими.*

Забележка 5.1. От Определение 5.3 следва, че всяка система, съдържаща нулевия вектор, е линейно зависима.

Определение 5.4. Нека L е линейно пространство. Тогава наредената система от линейно независими вектори $e_1, e_2, \dots, e_n \in L$ се нарича *база* на L, ако всеки вектор x от L може да се представи като линейна комбинация от векторите $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Определение 5.5. Нека $x \in L$. Тогава коефициентите в линейното представяне

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n,$$

относно базата $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ на L, са еднозначно определени и се наричат *координати* на вектора x в базата e и ще записваме $x = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Определение 5.6. Ако всички бази на едно линейно пространство L се състоят от краен брой вектори, то L се нарича *крайномерно.* В противен случай L се нарича *безкрайномерно.*

Забележка 5.2. Може да се докаже, че всички бази на едно крайномерно линейно пространство се състоят от равен брой вектори. Този брой се нарича *размерност* на пространството.

Забележка 5.3. Лесно може да се докаже, че наредените n-торки

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

образуват една база на линейното пространство $\mathbb{R}^n$. Тази база се нарича *стандартна* (*естествена, канонична*) *база* на $\mathbb{R}^n$. Компонентите на произволна наредена n-торка $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ съвпадат с координатите ѝ относно стандартната база. Стандартната база на линейното пространство $M_n(\mathbb{R})$ се дефинира по аналогичен начин. Така например матриците

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

образуват стандартната база на $M_2(\mathbb{R})$.

Определение 5.7. Максималният брой линейно независими вектори в една система от вектори $\{a_1, \dots, a_n\}$ се нарича *ранг* на системата и ще означаваме с $\mathsf{rang}\{a_1, \dots, a_n\}$.

Определение 5.8. Максималният брой линейно независими редове (или стълбове) в една матрица $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ се нарича *ранг* на матрицата A и ще означаваме с $\mathsf{rang}A$.

Определение 5.9. Матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

където $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, се нарича *трапецовидна матрица* или *матрица с трапецовидна форма.*

Теорема 5.1. *Рангът на трапецовидната матрица (5.1) е равен на броя на ненулевите ѝ редове, т.е.* $\mathsf{rang}A = r$.

Теорема 5.2. *Извършването на елементарни преобразувания по редовете и стълбовете на една матрица не променя нейния ранг.*

Забележка 5.4. Не е трудно да се докаже, че Определение 5.8 е еквивалентно на Определение 5.7. Това означава, че ранг на система от вектори се намира по същия начин като ранг на матрица.

Забележка 5.5. Една детерминанта е равна на нула, точно когато системата от редовете ѝ (стълбовете ѝ) е линейно зависима.

Задача 5.1. *Проверете дали е линейно зависима и определете ранга на системата вектори:*

а) $a_1 = (2, 1, 3)$, $a_2 = (1, 0, -5)$, $a_3 = (-4, -1, 7)$;
б) $a_1 = (1, 1, -1)$, $a_2 = (0, 2, 1)$, $a_3 = (1, 0, -2)$;
в) $a_1 = (1, 2, -1)$, $a_2 = (2, 1, 0)$, $a_3 = (0, 3, -2)$;
г) $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, 0)$;
д) $a_1 = (-1, 2, 2)$, $a_2 = (1, -1, 2)$, $a_3 = (1, 1, 2)$;
е) $a_1 = (1, 2, 1, -1)$, $a_2 = (3, 1, -2, 1)$, $a_3 = (9, 8, -1, -1)$;
ж) $a_1 = (1, 0, -1, 1, 1)$, $a_2 = (3, 1, 2, -4, 2)$, $a_3 = (2, -1, -3, 1, -2)$, $a_4 = (-2, 5, 11, -5, 13)$;
з) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

и) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

к) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$;

л) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Образуваме матрица, по редовете на която са разположени векторите от системата. След това, извършвайки елементарни преобразувания по редовете и стълбовете на тази матрица, намираме трапецовидната (или триъгълната) ѝ форма.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тъй като получаваме нулев ред, то системата е линейно зависима. Ненулевите редове са два, което означава, че $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 2$.

Тъй като координатите на векторите a_1, a_2 и a_3 формират квадратна матрица, то изследването за линейна зависимост може да бъде извършено и чрез пресмятане на детерминантата на тази матрица и използване на Забележка 5.5.

з) Ще решим задачата по два начина.

Начин 1. При това решение ще използваме директно Определение 5.3 и Определение 5.7. Нека $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ са реални числа. Тъй като A_1, A_2, A_3 принадлежат на векторното пространство $M_2(\mathbb{R})$, то съгласно Определение 5.3, за да установим дали системата е линейно зависима, трябва да изследваме уравнението

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

След извършване на действията в лявата страна на уравнението получаваме

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

което е еквивалентно на системата

$$\left|\begin{array}{l}\lambda_1 = 0\\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0.\end{array}\right.$$

Очевидно тази система има единствено решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Следователно системата е линейно независима. Тогава от Определение 5.7 заключаваме, че $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3\} = 3$.

Начин 2. Запазвайки съответствието на елементите, записваме матриците A_1, A_2 и A_3 като „матрици ред“ по следния начин: $(1, 2, 0, 1)$, $(0, 1, 2, 0)$ и $(0, 1, 1, 1)$, след което постъпваме аналогично на а):

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \urcorner^{-1} \\ \leftarrow_{+}\end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Тъй като не може да се получи нулев ред, то заключаваме, че системата е линейно независима с $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3\} = 3$.

Отговори. б) линейно независима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 3$;
в) линейно зависима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 2$;
г) линейно независима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 3$;
д) линейно независима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 3$;
е) линейно зависима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 2$;
ж) линейно зависима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = 3$;
и) линейно независима, $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3\} = 3$;
к) линейно зависима, $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3\} = 2$;
л) линейно независима, $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3, A_4\} = 4$.

5.2. **Смяна на база на линейно пространство.**

Нека $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ е база на линейното пространство L и $e' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ е система от вектори на L. Тогава векторите от e' са линейни комбинации на базисните вектори, т.е.

$$\begin{aligned} e'_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \ldots + t_{n1}e_n,\\ e'_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{n2}e_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ e'_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n, \end{aligned} \tag{5.2}$$

където $t_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ са координатите на векторите от e' в базата e.

Определение 5.10. Матрицата T, чиито стълбове съдържат координатите на векторите $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ в базата e, т.е. матрицата

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

се нарича *матрица на прехода* от базата e към системата от вектори e', определени чрез (5.2).

Забележка 5.6. С помощта на матрицата T равенствата (5.2) могат да бъдат записани в еквивалентната матрична форма

$$e' = e\ T,$$

където e и e' са съответно матриците-редове

$$e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}, \quad e' = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 5.3. *Нека e е база на линейното пространство L. Тогава системата от вектори e', зададена чрез (5.2), е база на L, точно когато матрицата T на прехода от e към e' е неособена, т.е. $\det T \neq 0$. В този случай T^{-1} е матрицата на обратния преход, т.е. на прехода от базата e' към базата e (матрично записваме $e = e'\ T^{-1}$).*

Теорема 5.4 (Изменение на координатите на вектор при смяна на базата)**.** *Нека означим с x и x' съответно стълбовете от координатите на произволен вектор от линейното пространство L в базите e и e'. Тогава зависимостта между x и x' се изразява чрез равенството*

$$x' = T^{-1}x. \tag{5.4}$$

Задача 5.2. *В линейното пространство L с база $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ разглеждаме множеството от вектори $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, определени с равенствата*

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 + 2e_2 + 3e_3, \\ e'_2 &= e_1 - e_2 + 2e_3, \\ e'_3 &= -2e_1 + e_2 - 4e_3. \end{aligned} \tag{5.5}$$

а) Намерете матрицата T на прехода от e към e'.
б) Докажете, че векторите e' образуват база на L.
в) Ако векторът v има в базата e координати $(1, -2, 3)$, то намерете координатите на v в базата e'.

Решение. а) Съгласно Определение 5.10, матрицата на прехода от базата e към системата от вектори e' има вида

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

б) Тъй като $\det T = -1 \neq 0$, то от Теорема 5.3 следва, че векторите от системата e' са база на L.

в) Намираме обратната матрица на матрицата на прехода T, както следва

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -11 & -2 & 5 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогава, като вземем предвид Теорема 5.4, намираме стълба x' с координатите на вектора v в базата e'

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -11 & -2 & 5 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Следователно $v = (1, 8, 4)$ в базата e'.

Задача 5.3. *Дадени са векторите $a_1 = (2, 1, 1)$, $a_2 = (-1, 3, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1)$, $b_1 = (1, 1, 2)$, $b_2 = (-1, 1, -1)$ и $b_3 = (2, 3, 4)$.*

а) Докажете, че $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ са бази на $\mathbb{R}^3$.

б) Намерете матрицата на прехода от базата a към базата b.

в) Ако векторът $v = (-1, 0, 2)$ в базата a, то намерете координатите на v в базата b.

Решение. а) Нека A и B са съответно матриците на прехода от стандартната база $e = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ на $\mathbb{R}^3$ към системите от вектори a и b, т.е. A и B са матриците, чиито стълбове са образувани от компонентите на векторите от a и b:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Понеже $\det A = 2 \neq 0$ и $\det B = -1 \neq 0$, то векторите от системите a и b са бази на $\mathbb{R}^3$.

б) Тъй като A и B са матриците на прехода от e съответно към a и b, то са в сила матричните равенства: $a = e\ A$ и $b = e\ B$. От първото равенство получаваме $e = a\ A^{-1}$ и заместваме във второто, откъдето получаваме $b = a(A^{-1}B)$. Следователно матрицата

$C = A^{-1}B$ е матрицата на прехода от базата a към базата b. За намирането на C пресмятаме

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} & -4 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}.$$

в) Ще намерим търсените координати по два начина.

Начин 1. Тъй като по условие координатите на вектора v в базата a са $(-1, 0, 2)$, то от Определение 5.5 получаваме

$$v = -1a_1 + 0a_2 + 2a_3 = -(2, 1, 1) + 2(1, 1, 1) = (0, 1, 1). \tag{5.7}$$

Известно е, че компонентите на всеки вектор в $\mathbb{R}^3$ съвпадат с координатите на този вектор относно стандартната база на $\mathbb{R}^3$. Следователно $v = (0, 1, 1)$ в базата e.

Тъй като B е матрицата на прехода от базата e към базата b, то координатите x' на вектора v в базата b се получават от (5.4), т.е.

$$x' = B^{-1}x = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

където с x сме означили стълба, съдържащ координатите на v в базата e. Следователно $v = (3, 1, -1)$ в базата b.

Начин 2. Първо намираме обратната матрица на матрицата на прехода от базата a към базата b, т.е. матрицата $C^{-1} = (A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A$. Тогава от (5.4) получаваме

$$x' = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -4 \\ -3 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Задача 5.4. *Дадени са системите от вектори $a = \{a_1, a_2\}$ и $b = \{b_1, b_2\}$, където $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (1, 1)$, $b_1 = (-1, 1)$ и $b_2 = (2, -3)$.*

а) Намерете матриците A и B на прехода от стандартната база $e = \{(1, 0), (0, 1)\}$ съответно към a и b.

б) Намерете матрицата C на прехода от a към b.

в) Ако векторът $v = (4, -5)$ в базата a, то намерете координатите на v в базата b.

Отговори. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$; в) $v = (-3, -2)$ в базата b.

6. Системи линейни уравнения

Математиката е вратата и ключът към всички науки.

Роджър Бейкън

6.1. Системи нехомогенни уравнения.

Определение 6.1. Съвкупността от m уравнения

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right. \tag{6.1}$$

с n неизвестни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *коефициенти* a_{ij} и *свободни членове* b_i $(i \in I_m, j \in I_n)$ се нарича *система линейни уравнения.*

Определение 6.2. Всяка наредена n-торка $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, удовлетворяваща всички уравнения от системата (6.1), се нарича *решение* на системата.

Определение 6.3. Системата (6.1) се нарича:

I) *Съвместима*, ако има поне едно решение. По-точно:
   1) *определена*, ако има единствено решение;
   2) *неопределена*, ако има безброй много решения.

II) *Несъвместима*, ако няма решение.

Определение 6.4. Матриците $A = (a_{ij})$ и $A|B = (a_{ij}|b_i)$ се наричат съответно *основна* и *разширена матрица* на системата (6.1).

Теорема 6.1 (Теорема на Руше[1])**.** *Системата линейни уравнения* (6.1) *е съвместима тогава и само тогава, когато рангът на основната е равен на ранга на разширената ѝ матрица, т.е.* $\mathsf{rang}A = \mathsf{rang}(A|B)$.

Теорема 6.2. *Системата линейни уравнения* (6.1) *е определена тогава и само тогава, когато рангът на основната ѝ матрица е равен на броя на неизвестните, т.е.* $\mathsf{rang}A = n$.

Следствие 6.1. *Системата линейни уравнения* (6.1) *е неопределена тогава и само тогава, когато* $\mathsf{rang}A = \mathsf{rang}(A|B) < n$.

[1]Йожен Руше (1832–1910) – френски математик.

Следствие 6.2. *Една система от n линейни уравнения с n неизвестни е определена тогава и само тогава, когато детерминантата на основната ѝ матрица е различна от нула.*

Теорема 6.3 (Формули на Крамер[1]). *Нека в системата линейни уравнения* (6.1) $m = n$ *и* $\det A \neq 0$. *Тогава единственото решение на системата* (6.1) *се получава чрез формулите:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{6.2}$$

където $\Delta = \det A$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \cdots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Забележка 6.1. Нека е дадена система от n линейни уравнения с n неизвестни, за която детерминанта на основната матрица $\Delta = 0$. Тогава системата е:

1) неопределена, точно когато $\Delta_i = 0$ за всяко $i \in I_n$;
2) несъвместима, точно когато $\Delta_i \neq 0$ за някое $i \in I_n$.

Задача 6.1. *Да се изследват и решат системите:*

а) $\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -2 \end{array} \right.$; *б)* $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 27 \end{array} \right.$;

в) $\left| \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 21 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 29 \end{array} \right.$; *г)* $\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -6 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{array} \right.$;

д) $\left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{array} \right.$; *е)* $\left| \begin{array}{l} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -13 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{array} \right.$;

ж) $\left| \begin{array}{l} 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 18 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{array} \right.$; *з)* $\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 14 \\ 4x_2 + 7x_4 = 15 \end{array} \right.$;

[1]Габриел Крамер (1704–1752) – швейцарски математик и физик.

и) $\left|\begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3 \\ 7x_1 - 15x_2 + 11x_3 - 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \end{array}\right.$; *к)* $\left|\begin{array}{l} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}\right.$;

л) $\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{array}\right.$; *м)* $\left|\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 14x_3 - 7x_4 = 18 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 19 \end{array}\right.$;

н) $\left|\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{array}\right.$;

о) $\left|\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 - x_5 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 16 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 - 12x_5 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 8x_5 = 12 \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 16 \end{array}\right.$.

Решение. а) Ще решим задачата по четири начина.

Начин 1 (Метод на Гаус). Нека A и $A|B$ са съответно основната и разширената матрици на системата а). Като се имат предвид Определение 5.8 и Забележка 5.4, установяваме че $\mathsf{rang}A = \mathsf{rang}(A|B) = 3$, колкото е броят на неизвестните в системата. Тогава от Теорема 6.1 следва, че системата е съвместима, а от Теорема 6.2 следва, че системата е определена.

За да намерим решението на системата, ще преобразуваме разширената ѝ матрица до трапецовидна форма:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Последната матрица е разширената матрица на системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_2 = -6. \end{array}\right.$$

Чрез заместване от третото към първото уравнение получаваме $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ и $x_1 = 4$, т.е. единствено решение на системата е наредената тройка $(4, -2, 1)$.

Начин 2 (Метод на Гаус-Жордан). Продължаваме да преобразуваме матрицата от предходния метод, докато превърнем основната матрица A в единична матрица E:

$$
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot(1/3) \end{array} \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).
$$

Най-десният стълб в последната матрица е решението на системата, т.е. $x_1 = 4$, $x_2 = -2$ и $x_3 = 1$.

Начин 3 (Метод на Крамер). Тъй като детерминантата на основната матрица

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,
$$

то от Следствие 6.2 заключаваме, че системата е определена.

За да решим системата, ще използваме Теорема 6.3. За целта пресмятаме детерминантите

$$
\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -12, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 6,
$$

$$
\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -3.
$$

Така от формулите на Крамер (Теорема 6.3) получаваме

$$
x_1 = \frac{-12}{-3} = 4, \quad x_2 = \frac{6}{-3} = -2, \quad x_3 = \frac{-3}{-3} = 1,
$$

т.е. решението на системата е наредената тройка $(4, -2, 1)$.

Начин 4 (чрез матрично уравнение). Системата а) е еквивалентна на матричното уравнение

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}
$$

чието единствено решение е $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (вж. Задача 4.3).

ж) Тази задача ще решим по метода на Гаус. Записваме разширената матрица на системата, като разменяме местата на първия и четвъртия ред, след което привеждаме към трапецовидна форма:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 6 & 15 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 6 & 18 \\ 3 & -3 & -1 & -4 & 26 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2),\ \cdot(-3),\ \cdot(-3) \\ + \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 13 & -11 \\ 0 & -7 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -9 & -4 & -7 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 7/3,\ \cdot 3 \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & 25/3 & 100/3 & -50/3 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot 3/25 \\ \mid \cdot 1/8 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оттук се вижда, че рангът на основната и разширената матрица е равен на 3, което е по-малко от броя на неизвестните ($n = 4$). Тогава от Теорема 6.1 следва, че системата е съвместима, а от Следствие 6.1 следва, че системата е неопределена. Решенията на системата зависят от $4 - 3 = 1$ на брой реални параметъра (свободни неизвестни). От друга страна, последната матрица, получена по метода на Гаус, е разширената матрица на системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_2 + 4x_3 + 13x_4 = -11 \\ x_3 + 4x_4 = -2 \end{array} \right. .$$

Като положим x_4 за параметър, т.е. $x_4 = p$, за общо решение на системата получаваме $(p + 7, p - 1, -4p - 2, p)$, където $p \in \mathbb{R}$.

к) По метода на Гаус последователно получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -6 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -7 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -14 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

От последната матрица се вижда, че $\mathsf{rang} A = 2$, а $\mathsf{rang}(A|B) = 3$, което съгласно Теорема 6.1 означава, че системата е несъвместима, т.е. няма решение.

Отговори. б) определена, $(6, -11, 6)$; в) определена, $(2, 3, 5)$; г) определена, $(1, 1, -1)$; д) определена, $(1, 2, -1)$; е) несъвместима; з) определена, $(2, 2, 0, 1)$; и) определена, $(-1, 2, 3, -2)$;
л) определена, $(-2, 2, -3, 3)$; м) неопределена, $(p, 2p-7q+1, q, 5q-3)$, $p, q \in \mathbb{R}$; н) неопределена, $\left(\dfrac{1+2p}{3}, p, 1, -1\right)$, $p \in \mathbb{R}$; о) неопределена, $(p+q+1, 2q-3p+2, 3q-p-1, p, q)$, $\quad p, q \in \mathbb{R}$.

Задача 6.2. *Намерете стойностите на реалните числа a и b така, че системата линейни уравнения*

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{array}\right.$$

да бъде: а) определена; б) неопределена; в) несъвместима.

Решение. Ще решим задачата по два начина.

Начин 1 (с формули на Крамер). Тъй като основната матрица на дадената система е квадратна, можем да използваме Следствие 6.2 и Забележка 6.1.

а) Пресмятаме детерминантата на основната матрица на системата и получаваме $\Delta = a - 2$. Съгласно Следствие 6.2, системата е определена, точно когато $\Delta \neq 0$, т.е. $a \neq 2$ ($b \in \mathbb{R}$).

б) Пресмятаме детерминантите

$$\Delta_1 = 3a - 2b + 4, \quad \Delta_2 = b - a - 3 \quad \text{и} \quad \Delta_3 = b - 5.$$

Съгласно Забележка 6.1, системата е неопределена, точно когато $\Delta = \Delta_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, т.е. за $a = 2$ и $b = 5$.

в) Отново от Забележка 6.1 заключаваме, че системата е несъвместима, точно когато $\Delta = 0$ и $\Delta_i \neq 0$ за някое $i = 1, 2, 3$, т.е. $a = 2$ и $b \neq 5$.

Начин 2 (по метод на Гаус). Намираме трапецовидната форма на разширената матрица на системата:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & a & b \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a-3 & b-6 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & b-5 \end{array}\right).$$

Тогава:

а) Съгласно Теорема 6.2, системата е определена, точно когато $\mathsf{rang}A = 3$, т.е. $a \neq 2$ $(b \in \mathbb{R})$.

б) Съгласно Теорема 6.1 и Следствие 6.1, системата е неопределена, точно когато $\mathsf{rang}A = \mathsf{rang}(A|B) = 2$, т.е. $a = 2$ и $b = 5$.

в) Съгласно Теорема 6.1, системата е несъвместима, точно когато $\mathsf{rang}A = 2$ и $\mathsf{rang}(A|B) = 3$, т.е. $a = 2$, $b \neq 5$.

Решаване на матрични уравнения чрез системи линейни уравнения:

Задача 6.3. *Намерете неизвестната матрица X от матричното уравнение:*

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}.$

б) $X \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

в) $X \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}.$

Решение. а) Нека въведем означенията:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Тогава даденото уравнение може да се запише във вида

$$AX = B. \tag{6.3}$$

Тъй като $\det A = 0$, което означава, че не съществува обратна матрица A^{-1}, то не можем да използваме подхода от Задача 4.3. Вместо това ще сведем даденото матрично уравнение до система линейни уравнения за елементите на неизвестната матрица X. Тъй като A и B са квадратни матрици от втори ред и е изпълнено (6.3), то X също трябва да бъде квадратна матрица от втори ред. Следователно X има вида

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Тогава, извършвайки матричното умножение в лявата страна на (6.3) и приравнявайки съответните елементи на матриците AX и B, достигаме до следната система линейни уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_4 = -5 \\ 2x_2 + 4x_4 = -10. \end{array} \right.$$

Тъй като първото уравнение е еквивалентно на второто, а третото е еквивалентно на четвъртото, то системата е еквивалентна на

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_4 = -5. \end{array} \right. \tag{6.4}$$

Очевидно системата (6.4) е неопределена и нейното общо решение зависи от 2 реални параметъра. Полагаме $x_3 = p$ и $x_4 = q$, където $p, q \in \mathbb{R}$. Тогава за останалите неизвестни получаваме $x_1 = 3 - 2p$ и $x_2 = -5 - 2q$. Следователно матриците X, които са решения на даденото матрично уравнение, имат вида

$$X = \begin{pmatrix} 3-2p & -5-2q \\ p & q \end{pmatrix}, \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

б) Даденото уравнение записваме във вида $XA = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отново установяваме, че $\det A = 0$. Постъпвайки аналогично на подточка а), достигаме до следната система линейни уравнения за неизвестните елементи на матрицата X:

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ -3x_1 - 6x_2 = 1 \\ 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ -3x_3 - 6x_4 = -1. \end{array}\right.$$

Можем да разгледаме първите две уравнения като система относно неизвестните x_1 и x_2 и последните две като система за x_3 и x_4. И за двете системи установяваме, че са несъвместими. Следователно не съществува матрица X, която да удовлетворява даденото матрично уравнение.

Отговори. в) $X = \begin{pmatrix} 2-2p & p \\ 4-2q & q \end{pmatrix}$, $p, q \in \mathbb{R}$.

6.2. **Системи хомогенни уравнения.**

Определение 6.5. Система от вида

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right. \tag{6.5}$$

се нарича *система хомогенни линейни уравнения.*

Забележка 6.2. Системата (6.5) е винаги съвместима, тъй като има поне едно решение: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (нулево решение). Следователно системата (6.5) е определена, точно когато има само нулевото (тривиално) решение и е неопределена, точно когато има и ненулеви (нетривиални) решения.

Теорема 6.4. *Множеството от решенията на системата хомогенни линейни уравнения (6.5) е линейно пространство с размерност $n - r$, където n е броят на неизвестните в системата, а r е рангът на основната матрица на системата.*

Определение 6.6. Всяка база на линейното пространство от решенията на неопределена система хомогенни линейни уравнения се нарича нейна *фундаментална* (*базисна*) *система решения.*

Забележка 6.3. Всички решения на неопределена система хомогенни линейни уравнения са линейни комбинации на векторите от произволна нейна фундаментална система решения.

Задача 6.4. *Решете системите хомогенни линейни уравнения и намерете по една тяхна фундаментална система решения:*

$$
а)\left|\begin{array}{l}x_1+x_2+x_3-3x_4=0\\ x_1-x_2+x_3-x_4+2x_5=0\\ 2x_1+x_2-3x_4-x_5=0\\ 3x_1-2x_2+x_3-2x_4+3x_5=0\end{array}\right. ;\quad б)\left|\begin{array}{l}x_1+2x_2-x_4=0\\ 2x_1+3x_2-4x_3-5x_4=0\\ 2x_1+4x_2-2x_4=0\end{array}\right. ;
$$

$$
в)\left|\begin{array}{l}x_1+3x_2-2x_3+2x_5=0\\ 2x_1+6x_2-5x_3-2x_4+4x_5-3x_6=0\\ 2x_1+6x_2+8x_4+4x_5+18x_6=0\\ 5x_3+10x_4+15x_6=0\end{array}\right. ;
$$

$$
г)\left|\begin{array}{l}3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0\\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0\\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0\\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5=0.\end{array}\right. .
$$

Решение. Тъй като извършването на елементарни преобразувания по редовете няма да измени нулевия стълб от свободни членове, то при решаването на системи хомогенни линейни уравнения по метода на Гаус вместо да работим с разширената матрица на системата, можем да работим само с нейната основна матрица.

а) Преобразуваме основната матрица на системата по метода на Гаус

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & -3 & -1\\ 3 & -2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix} \sim
$$
$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -2 & 3 & -1\\ 0 & -5 & -2 & 7 & 3\end{pmatrix} \;|\cdot -1/2 \sim
$$
$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & 3 & -1\\ 0 & -5 & -2 & 7 & 3\end{pmatrix} \sim \tag{6.6}
$$
$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.
$$

Тъй като $\mathsf{rang}A = 3$, а броят на неизвестните е $n = 5$, то системата е неопределена и има ненулеви решения, зависещи от 2 параметъра. Последната матрица в (6.6) е основна матрица на системата хомогенни линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{array} \right. \tag{6.7}$$

Като положим $x_4 = p$ и $x_5 = q$, от (6.7) получаваме следното общо решение на системата

$$(p, p+q, p-q, p, q) \qquad p, q \in \mathbb{R}. \tag{6.8}$$

За да намерим една фундаментална система решения на дадената система уравнения, трябва да намерим една база на двумерното линейно пространство от наредени петорки от вида (6.8). Това ще направим, като дадем две двойки от независими стойности на двата параметъра p и q. По този начин се получават два вектора (вж. Таблица 1), които са база на линейното пространство от решенията на системата, и съгласно Определение 6.6 образуват една фундаментална система решения на системата уравнения.

Таблица 1. Базисни вектори за пример а)

p	q	v_i
1	0	$v_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$
0	1	$v_2 = (0, 1, -1, 0, 1)$

в) По метода на Гаус достигаме до следната трапецовидна форма на основната матрица на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Тази матрица е основна матрица на системата хомогенни линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 0 \\ x_6 = 0. \end{array} \right. \tag{6.10}$$

Тъй като $\mathsf{rang}A = 3$, а броят на неизвестните е $n = 6$, то общото решение на системата зависи от 3 параметъра. Като положим $x_2 = p$, $x_4 = q$ и $x_5 = s$, получаваме общото решение

$$(-3p - 4q - 2s, p, -2q, q, s, 0), \qquad p, q, s \in \mathbb{R}.$$

Аналогично на подточка а) намираме една фундаментална система решения, както е показано на Таблица 2.

Таблица 2. Базисни вектори за пример в)

p	q	s	v_i
1	0	0	$v_1 = (-3, 1, 0, 0, 0, 0)$
0	1	0	$v_2 = (-4, 0, -2, 1, 0, 0)$
0	0	1	$v_3 = (-2, 0, 0, 0, 1, 0)$

Отговори. б) $(8p+7q, -4p-3q, p, q)$, $p, q \in \mathbb{R}$. Една фундаментална система решения е $v_1 = (8, -4, 1, 0)$ и $v_2 = (7, -3, 0, 1)$;

г) $\left(-\frac{2p+4q+8s}{3}, p, 3+3s, q, s\right)$, $p, q, s \in \mathbb{R}$. Една фундаментална система решения е $v_1 = (-2/3, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (-4/3, 0, 1, 1, 0)$ и $v_3 = (-8/3, 0, 3, 0, 1)$.

Задача 6.5. *Дадена е матрицата* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Да се намерят всички матрици* $B \in M_2(\mathbb{R})$, *за които* $AB = BA$ *(в този случай казваме, че матриците* A *и* B *комутират).*

Решение. Нека $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Тогава

$$AB = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 & 3x_2 + 4x_4 \end{pmatrix} \text{ и } BA = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 & 2x_1 + 4x_2 \\ x_3 + 3x_4 & 2x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

Като приравним съответните елементи на матриците AB и BA, достигаме до системата хомогенни линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \end{array} \right.$$

от която получаваме $x_4 = x_1 + x_3$ и $x_3 = 3/2x_2$. Ако положим $x_1 = p$ и $x_2 = 2q$, то получаваме

$$B = \begin{pmatrix} p & 2q \\ 3q & p + 3q \end{pmatrix} \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

Ще отбележим, че множеството на матриците, които са решение на задачата, е двумерно линейно пространство.

7. Линейни действия със свободни вектори

Той нямаше достатъчно фантазия, за да бъде математик, затова стана поет.

Давид Хилберт

7.1. **Свободни вектори.**

Определение 7.1. Наредена двойка точки (A, B) се нарича *насочена отсечка* и се означава с $\overrightarrow{AB}$. Точката A се нарича начало, а B край на $\overrightarrow{AB}$.

Определение 7.2. Ако краят и началото на дадена насочена отсечка съвпадат, то тя се нарича *нулева*.

Определение 7.3. Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат *колинеарни* (означава се $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$), ако правите AB и CD съвпадат или са успоредни. В такъв случай, ако лъчите $AB^{\to}$ и $CD^{\to}$ са еднопосочно успоредни, за насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се казва, че са *еднопосочно колинеарни* (означава се $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), а ако лъчите $AB^{\to}$ и $CD^{\to}$ са разнопосочно успоредни, то $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат *разнопосочно колинеарни* (означава се $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$).

Определение 7.4. Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ се наричат *компланарни*, ако правите AB, CD и EF лежат в една равнина или са успоредни на една равнина.

Определение 7.5. Ненулевите насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат *равни* и записваме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ако са изпълнени следните две условия:
1) отсечките AB и CD имат равни дължини;
2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са еднопосочно колинеарни.

Определение 7.6. Множеството от всички равни насочени отсечки се нарича *свободен вектор*. Ако насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ е елемент на свободния вектор $\vec{a}$, то $\overrightarrow{AB}$ се нарича *представител на* $\vec{a}$ и записваме $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Забележка 7.1. Занапред, за краткост, *свободните вектори* ще наричаме просто *вектори*.

Определение 7.7. Множеството от всички нулеви насочени отсечки се нарича *нулев вектор* и ще означаваме с $\vec{o}$ или $\mathbf{0}$.

Теорема 7.1. *Ако A е произволна точка, а $\vec{a}$ е произволен вектор, то съществува единствена точка B такава, че $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.*

Забележка 7.2. Построяването на представителя $\overrightarrow{AB}$ на $\vec{a}$ се нарича *пренасяне* на вектора $\vec{a}$ в точката A.

Определение 7.8. Под *дължина на насочената отсечка* $\overrightarrow{AB}$ разбираме дължината на отсечката AB. Под *дължина на свободния вектор* $\vec{a}$ разбираме дължината на произволен негов представител и означаваме с $|\vec{a}|$.

Забележка 7.3. Дължината на нулевия вектор е числото нула, т.е. $|\vec{o}\,| = 0$.

Определение 7.9. Ако $\vec{a}$ е вектор с представител насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, то свободният вектор с представител $\overrightarrow{BA}$ се нарича *противоположен вектор на* $\vec{a}$ и се означава с $(-\vec{a})$.

Забележка 7.4. От Определение 7.9 следва, че за произволна насочена отсечка $\overrightarrow{AB}$ е в сила равенството

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}. \tag{7.1}$$

7.2. **Събиране на вектори и умножение на вектор с число.**

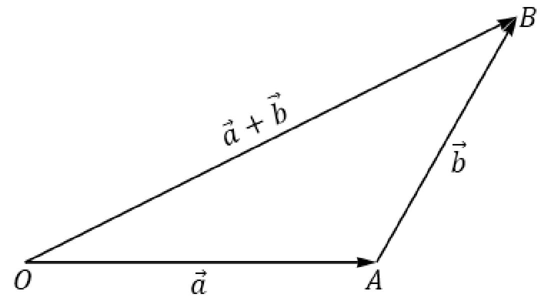
Определение 7.10. *Събиране на вектори* е действие, при което на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се съпоставя векторът $\vec{a} + \vec{b}$, наречен тяхна *сума* и определен по някое от правилата:

(I) Правило на триъгълника. Нека OAB е триъгълник, в който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Тогава $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ (Фиг. 7.1).

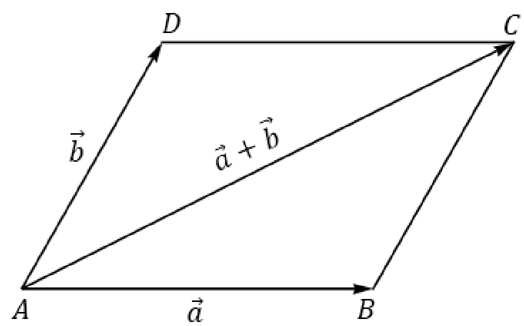
(II) Правило на успоредника. Нека $ABCD$ е успоредник, в който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Тогава $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (Фиг. 7.2).

Забележка 7.5. Правилото на триъгълника и правилото на успоредника са еквивалентни.

Определение 7.11. Сумата на векторите $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$ се нарича *разлика* на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и се означава с $\vec{a} - \vec{b}$.



Фигура 7.1. Събиране на вектори по правилото на триъгълника



Фигура 7.2. Събиране на вектори по правилото на успоредника

Теорема 7.2 (Тъждество на Шал[1])**.** *За произволни три точки A, B и C в пространството е изпълнено равенството*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \tag{7.2}$$

Забележка 7.6. Като се има предвид (7.1), тъждеството на Шал може да бъде записано в следния еквивалентен вид

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}. \tag{7.3}$$

Определение 7.12. *Умножение на вектор с реално число* е действие, при което на вектора $\vec{a}$ и числото $\lambda \in \mathbb{R}$ се съпоставя векторът $\lambda\vec{a}$ по следния начин:

1) ако $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{o}$, то $\lambda\vec{a} = \vec{o}$;

[1]Мишел Флореал Шал (1793–1880) – френски математик.

2) ако $\lambda \neq 0$ и $\vec{a} \neq \vec{o}$, то векторът $\lambda\vec{a}$ е колинеарен на $\vec{a}$, като двата вектора са еднопосочно колинеарни при $\lambda > 0$ и разнопосочно колинеарни при $\lambda < 0$. Освен това $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$.

Теорема 7.3. *Линейните действия със свободни вектори притежават следните свойства:*

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *(комутативност при събиране);*

2) $(\vec{a} + \vec{b}\,) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}\,)$ *(асоциативност при събиране);*

3) Съществува единствен нулев вектор $\vec{o}$ *такъв, че* $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$ *за всеки вектор* $\vec{a}$*;*

4) За всеки вектор $\vec{a}$ *съществува единствен противоположен вектор* $(-\vec{a})$ *такъв, че* $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$*;*

5) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}\,) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$*;*

6) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$*;*

7) $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$*;*

8) $1.\vec{a} = \vec{a}$*,*

където $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *са произволни свободни вектори, а* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*.*

Забележка 7.7. Множеството на свободните вектори, снабдено с линейните действия събиране на вектори и умножение на вектор с реално число, е реално векторно пространство, наречено *геометрично векторно пространство.*

Теорема 7.4. *В сила са следните твърдения:*

1) Един свободен вектор е линейно зависим, точно когато той е нулевият.

2) Два свободни вектора са линейно зависими, точно когато са колинеарни.

3) Три свободни вектора са линейно зависими, точно когато са компланарни.

4) Всеки четири свободни вектора са линейно зависими.

Забележка 7.8. Размерността на геометричното векторно пространство е равна на три и всеки три некомпланарни вектора образуват база на това пространство.

Забележка 7.9. Всяка права е едномерно векторно подпространство на геометричното векторно пространство. Произволна база върху права се състои от един ненулев вектор, който е колинеарен с правата.

Забележка 7.10. Всяка равнина е двумерно векторно подпространство на геометричното векторно пространство. Произволна база на равнина се състои от два неколинеарни свободни вектора, които са компланарни с тази равнина.

Задача 7.1. *В $\triangle\ ABC$ точките M и N са среди съответно на страните AC и BC (MN е средна отсечка в $\triangle\ ABC$). Докажете, че $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ и представете $\overrightarrow{AB}$ като линейна комбинация на $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CN}$.*

Решение. Съгласно тъждеството на Шал (7.3) можем да запишем

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM}. \tag{7.4}$$

Тъй като M и N са среди съответно на страните AC и BC, са в сила равенства: $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. След заместване на последните две равенства в (7.4) и преобразуване достигаме до

$$\overrightarrow{MN} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \tag{7.5}$$

От (7.4) и (7.5) получаваме $\overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM})$.

Задача 7.2. *Нека точката M лежи на отсечката AB, като я дели вътрешно в отношение $AM : MB = m : n$. Докажете, че*

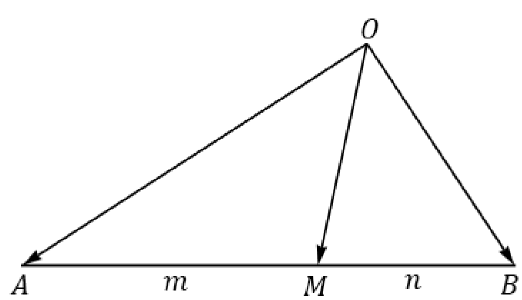
$$\overrightarrow{OM} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}, \tag{7.6}$$

където точката O е произволна. Като следствие от равенството (7.6), докажете, че M е среда на отсечката AB, точно когато

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right). \tag{7.7}$$

Решение. Съгласно тъждеството на Шал (7.2) за точките O, M и A е изпълнено

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}. \tag{7.8}$$



Фигура 7.3. Чертеж към Задача 7.2

От условието на задачата е известно, че $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$. Тогава

$$AM = \frac{m}{m+n} AB.$$

Последното равенство е в сила и за насочените отсечки $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$, тъй като те са еднопосочно колинеарни, т.е.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB}.$$

Поради (7.3) за насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ имаме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Като комбинираме последните две равенства, достигаме до

$$\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}).$$

Сега заместваме получения израз за $\overrightarrow{AM}$ от горното равенство в (7.8) и намираме

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\
&= \left(1 - \frac{m}{m+n}\right) \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OB} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}.
\end{aligned}$$

Точката M е среда на отсечката AB, точно когато я дели на две равни части, т.е. при $m = n$. Заместваме последното условие в (7.6) и достигаме до търсената формула

$$\overrightarrow{OM} = \frac{m\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)}{2m} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Задача 7.3. *Нека $\triangle\, ABC$ е произволен и O е произволна точка. Докажете, че G е медицентър на $\triangle\, ABC$, точно когато*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right). \tag{7.9}$$

Решение. Нека точката M е средата на отсечката AB, т.е. CM е медиана в $\triangle\, ABC$. Тогава G е медицентър на $\triangle\, ABC$, точно когато G лежи на CM и $CG : CM = 2 : 3$. Тъй като насочените отсечки $\overrightarrow{CG}$ и $\overrightarrow{CM}$ са еднопосочно колинеарни, то е в сила $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$. Понеже M е средата на AB, то съгласно (7.7), последното равенство е еквивалентно на $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$, откъдето следва, че G е медицентър на $\triangle\, ABC$, точно когато

$$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}). \tag{7.10}$$

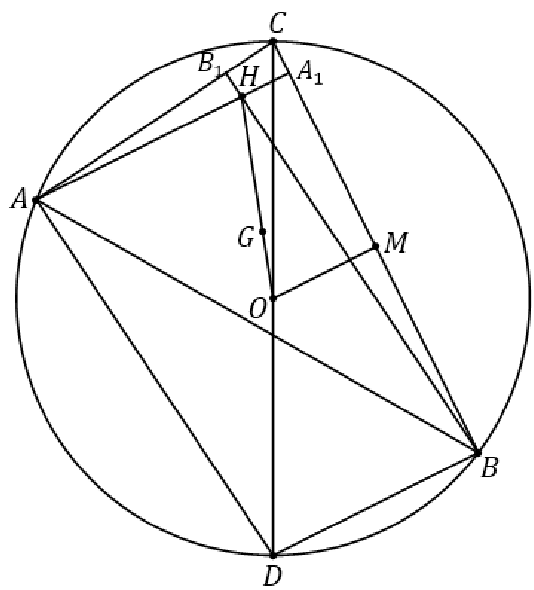
Към двете страни на (7.10) прилагаме тъждеството на Шал и получаваме еквивалентното му равенство

$$\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}).$$

Като извършим линейните действия в последното равенство и от него изразим $\overrightarrow{OG}$, достигаме до (7.9).

Задача 7.4. *Нека точките H и O са съответно ортоцентърът на $\triangle\ ABC$ и центърът на описаната около него окръжност. Докажете, че е изпълнено равенството (формула на Хамилтон[1])*

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \tag{7.11}$$



Фигура 7.4. Чертеж към Задача 7.4

Решение. Нека AA_1 и BB_1 са височини в $\triangle\ ABC$ (вж. Фиг. 7.4). Построяваме диаметъра CD. Следователно $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC = 90^\circ$. Тогава $AD \parallel BH$ и $AH \parallel DB$, откъдето следва, че $ADBH$ е успоредник. Съгласно определението за равенство на насочени отсечки е изпълнено $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DB}$. Нека M е средата на страната BC. Тогава OM е средна отсечка в $\triangle\ ABC$ и следователно

$$\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{OM} = 2.\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

[1] Уилям Роуън Хамилтон (1805–1865) – ирландски математик, физик и астроном.

Така установихме, че $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Като приложим тъждеството на Шал към лявата страна на последното равенство, получаваме $\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, откъдето следва (7.11).

Забележка 7.11. Отбелязваме, че съгласно (7.9) и (7.11), за медицентъра G, ортоцентъра H и центъра на описаната окръжност O на произволен триъгълник е в сила зависимостта $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$, откъдето следва, че тези три точки лежат върху една права, известна като *права на Ойлер* и $OG : GH = 1 : 2$ (Фиг. 7.4).

Задача 7.5. *Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник, точките M и N са среди съответно на страните AB и CD, а точката G е медицентър на $\triangle\ BCD$. Докажете, че точките A, G и средата P на отсечката MN лежат върху една права и намерете отношението $AP : PG$.*

Решение. Достатъчно е да покажем, че $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AG}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и да намерим неизвестния коефициент на колинеарност λ. Тъй като P е средата на MN, то съгласно (7.7) имаме

$$\overrightarrow{AP} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}). \tag{7.12}$$

Точката M е средата на AB и следователно $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Точката N е средата на CD, затова $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. Като заместим последните две равенства в (7.12), достигаме до

$$\overrightarrow{AP} = \tfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}). \tag{7.13}$$

Съгласно (7.9) за медицентъра G на $\triangle\ BCD$ и точка A е в сила

$$\overrightarrow{AG} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}). \tag{7.14}$$

От (7.13) и (7.14) следва, че $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$, което показва, че точките A, P и G са колинеарни и $AP : PG = 3 : 1$.

Задача 7.6. *В успоредника $ABCD$ точките M и N са среди съответно на страните CD и AD. Отсечките AM и BN се пресичат в точката P. Намерете отношенията $AP : PM$ и $BP : PN$.*

Решение. Задачата ще решим по *метода на базите*. За база в равнината на успоредника $ABCD$ избираме два неколинеарни вектора, например $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Ще представим една насочена отсечка, съдържаща точката P, например $\overrightarrow{AP}$, по два начина като линейна комбинация на избраните базисни вектори. Във всяко от представянията ще въведем по един неизвестен коефициент на колинеарност (търсените отношения). Тъй като разлагането на произволен вектор спрямо база е еднозначно определено, коефициентите пред еднаквите вектори в двете линейни комбинации ще бъдат равни. Така ще получим определена система от две линейни уравнения за двата неизвестни коефициента на колинеарност.

Тъй като точките A, P и M са колинеарни, то $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AM}$. Като приложим формулата за среда на отсечка и правилото на успоредника за събиране на вектори, намираме

$$\overrightarrow{AP} = \tfrac{x}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) = \tfrac{x}{2}(\vec{a} + 2\vec{b}). \tag{7.15}$$

От колинеарността на точките B, P и N следва, че $\overrightarrow{BP} = y\overrightarrow{BN}$. Тогава $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{y}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD})$, откъдето

$$\overrightarrow{AP} = \vec{a} + \tfrac{y}{2}(\vec{b} - 2\vec{a}\,) = (1-y)\vec{a} + \tfrac{y}{2}\vec{b}. \tag{7.16}$$

Чрез приравняване на съответните коефициенти пред еднаквите базисни вектори в (7.15) и (7.16) получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} \frac{x}{2} = 1 - y \\ x = \frac{y}{2} \end{array}\right.$$

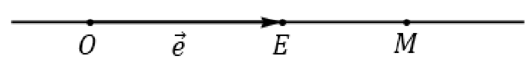
с решение $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{4}{5}$. Следователно $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BP} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BN}$, откъдето търсените отношения са $AP : PM = 2 : 3$ и $BP : PN = 4 : 1$.

8. **Вектори в координатни системи**

> Навсякъде, както и в математиката, за даден проблем има много и различни решения.
>
> *Джон Наш*

8.1. **Координатни системи.**

Определение 8.1 (Едноосна КС). *КС върху права* се задава чрез точка O от правата и ненулев вектор $\vec{e}$, колинеарен с правата, и се означава с $K = O\vec{e}$. Точката O се нарича *координатно начало*. Векторът $\vec{e}$ е база на правата и се нарича *координатен вектор*. По този начин правата може да се разглежда като *координатна ос*, като положителната посока и единицата за дължина върху нея се определят съответно от посоката и дължината на вектора $\vec{e}$ (Фиг. 8.1).



Фигура 8.1. Едноосна координатна система

Определение 8.2. Ако $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$, то за произволна точка M от правата, определена от O и $\vec{e}$, е в сила

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OE} = x\vec{e}. \tag{8.1}$$

Числото $x \in \mathbb{R}$ се нарича *координата* на точката M относно $K = O\vec{e}$ и се записва $M(x)$.

Забележка 8.1. От Определение 8.2 се вижда, че $x > 0$, когато $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OE}$ са еднопосочно колинеарни и $x < 0$, когато $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OE}$ са разнопосочно колинеарни.

Съгласно (8.1), имаме $O(0)$ и $E(1)$ относно $K = O\vec{e}$.

Теорема 8.1. *Нека $M(x)$ и $N(y)$ относно K. Тогава единствената координата на насочената отсечка $\overrightarrow{MN}$ относно K е $y - x$, т.е.*

$$\overrightarrow{MN} = (y - x).$$

Определение 8.3 (Просто отношение на три точки върху права). Нека A, B и C са три различни точки от една права. Тогава коефициентът на колинеарност $\lambda \in \mathbb{R}$ между насочените отсечки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$, определен от равенството

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BC}, \tag{8.2}$$

се нарича *просто отношение на точките* A, B и C, взети в този ред, и се означава с (ABC).

Забележка 8.2. От (8.2) следва, че $\lambda > 0$, ако $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ са еднопосочно колинеарни (точката C е външна за отсечката AB) и $\lambda < 0$, ако $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ са разнопосочно колинеарни (точката C е вътрешна за отсечката AB).

Теорема 8.2. *Нека $A(x)$, $B(y)$ и $C(z)$ лежат на една права. Тогава е в сила равенството*

$$(ABC) = \frac{z - x}{z - y} \qquad (y \neq z). \tag{8.3}$$

Забележка 8.3. Точката C е среда на отсечката AB, точно когато

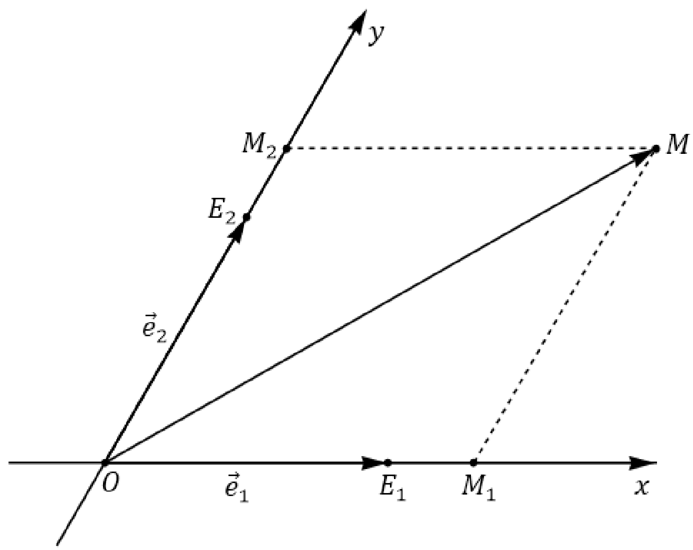
$$(ABC) = -1.$$

Определение 8.4 (Равнинна КС). *КС в равнина* се задача чрез точка O от равнината и база $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ на същата равнина и се означава с $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Точката O се нарича *координатно начало*, а векторите $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ се наричат *координатни вектори*. Точката O и векторът $\vec{e}_1$ определят първата координатна ос, наречена *абсцисна ос*, а O и $\vec{e}_2$ определят втората координатна ос, наречена *ординатна ос* (Фиг. 8.2).

Определение 8.5. Ако $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$ и $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$, то за произволна точка M от равнината, определена от O, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, е в сила

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OE_1} + y\overrightarrow{OE_2} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \tag{8.4}$$

където $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ са координатите на $\overrightarrow{OM}$ в базата $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Насочената отсечка $\overrightarrow{OM}$ се нарича *радиус-вектор* на точката M, а числата от наредената двойка (x, y) се наричат *координати* на точката M относно координатната система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и се означава $M(x, y)$. Числото x се нарича *абсциса* на M, а y – *ордината* на M.



Фигура 8.2. Равнинна координатна система

Забележка 8.4. Координатната система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ по традиция се означава с Oxy.

Определение 8.6. Точките M_1 и M_2 съответно от абсцисната и ординатната ос, определени от равенствата $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OE_2}$, се наричат *проекции* на точката M върху координатните оси.

Съгласно (8.4), $O(0,0)$, $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$, $M_1(x,0)$, $M_2(0,y)$.

Теорема 8.3. *Ако $M(x_1,y_1)$ и $N(x_2,y_2)$ относно $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$, то координатите на насочената отсечка $\overrightarrow{MN}$ се определят по правилото*

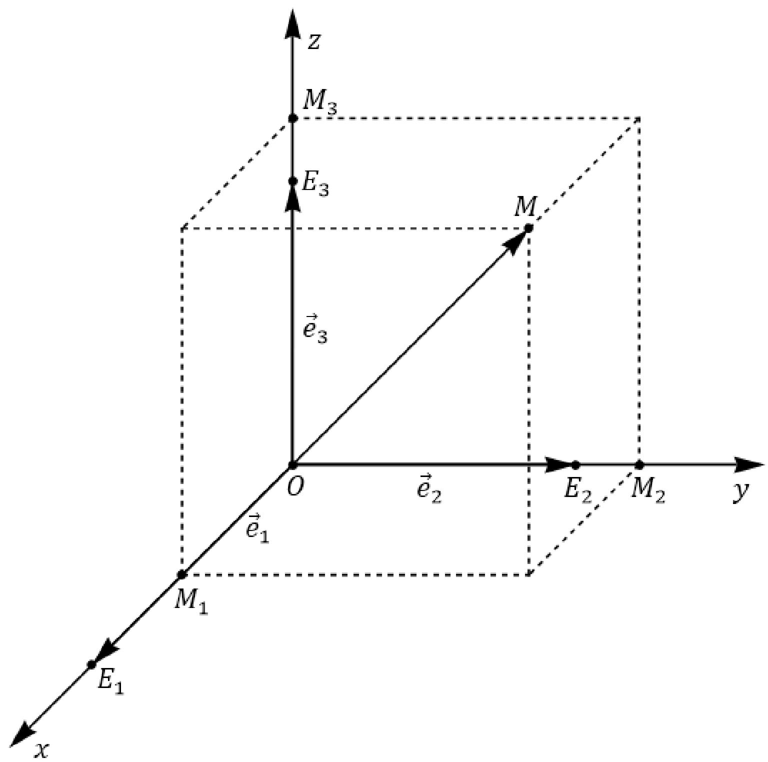
$$\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1). \tag{8.5}$$

Определение 8.7 (Пространствена КС). *КС в пространството* се задава чрез точка O и база $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ на пространството и се означава с $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Точката O и векторът $\vec{e}_1$ определят *абсцисната ос*, O и $\vec{e}_2$ определят *ординатнана ос*, а O и $\vec{e}_3$ определят *апликатната ос* (Фиг. 8.3).

Определение 8.8. Ако $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$ и $\overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3$, то за произволна точка M от пространството е изпълнено

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OE_1} + y\overrightarrow{OE_2} + z\overrightarrow{OE_3} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \tag{8.6}$$

където (x, y, z) са координатите на радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на M в базата $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Числата от наредената тройка (x, y, z) се наричат *координати* на точката M относно $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и се означава с $M(x, y, z)$. Числото x се нарича *абсциса* на M, y – *ордината* на M, а z – *апликата* на M.



Фигура 8.3. Пространствена координатна система

Забележка 8.5. Координатната система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ по традиция се означава с $Oxyz$.

Определение 8.9. Точките M_1, M_2 и M_3, определени от равенствата $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OE_2}$ и $\overrightarrow{OM_3} = z\overrightarrow{OE_3}$, се наричат *проекции* на точката M върху координатните оси.

Съгласно (8.6), $O(0, 0, 0)$, $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$, $E_3(0, 0, 1)$.

Теорема 8.4. *Ако $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$ относно $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, то координатите на насочената отсечка $\overrightarrow{MN}$ се определят по правилото*

$$\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{8.7}$$

Определение 8.10. В зависимост от дължините на координатните вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ и ъгъла, който те сключват, се разглеждат следните специални КС:

1) *ортогонална*, ако $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ са взаимно перпендикулярни;
2) *нормирана*, ако $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$.

Забележка 8.6. Ако една КС е едновременно ортогонална и нормирана, тя се нарича *ортонормирана* или *декартова.*

Определение 8.11. Пространствена координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ се нарича:

а) *дясно ориентирана* (*положително ориентирана*), ако за наблюдател, изправен по посоката на вектора $\vec{e}_3$, завъртането на вектора $\vec{e}_1$, докато стане еднопосочно колинеарен на $\vec{e}_2$, се извършва по посока, обратна на посоката на въртене на часовниковата стрелка, при ъгъл на въртене $\alpha \in (0, 180^\circ)$.

б) *ляво ориентирана* (*отрицателно ориентирана*), ако за наблюдател в същата позиция завъртането на $\vec{e}_1$ до еднопосочна колинеарност с $\vec{e}_2$ е по посока на часовниковата стрелка.

Забележка 8.7. Определянето на ориентацията на координатна система в равнината се извършва, като се определи посоката, в която трябва да бъде завъртян първият координатен вектор $\vec{e}_1$, докато стане еднопосочно колинеарен на втория вектор $\vec{e}_2$, при ъгъл на въртене $\alpha \in (0, 180^\circ)$. Ако тази посока е обратна на посоката на въртене на часовниковата стрелка, координатната система се нарича *дясно ориентирана.* Ако тази посока съвпада с посоката на въртене на часовниковата стрелка, координатната система се нарича *ляво ориентирана.*

Забележка 8.8. Най-удобна за използване е дясно ориентирана ортонормирана КС.

В следващите твърдения даваме някои често използвани формули в координатен вид.

Теорема 8.5. *Ако $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и точката M дели отсечката AB в отношение $AM : MB = m : n$, то*

$$M\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}, \frac{nz_1 + mz_2}{m+n}\right). \tag{8.8}$$

Следствие 8.1. *Ако $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и точката M е среда на отсечката AB, то*

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right). \tag{8.9}$$

Теорема 8.6. *Ако $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$ са върхове на триъгълник, то координатите на медицентъра G на $\triangle ABC$ се определят по правилото*

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right). \tag{8.10}$$

Задача 8.1. *Намерете координатите на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, ако:*

а) $A(1,2)$, $B(3,1)$;
б) $A(1,1,-1)$, $B(3,0,-1)$;
в) $A(2,-3,3)$, $B(0,-2,-2)$;
г) $A(-2,4,5)$, $B(3,-4,-8)$.

Решение. а) Съгласно (8.5) намираме $\overrightarrow{AB} = (3,1) - (1,2) = (2,-1)$.
б) Съгласно (8.7) пресмятаме

$$\overrightarrow{AB} = (3,0,-1) - (1,1,-1) = (2,-1,0).$$

Отговори. в) $\overrightarrow{AB} = (-2,1,-5)$; г) $\overrightarrow{AB} = (5,-8,-13)$.

Задача 8.2. *Намерете координатите на точката B, ако:*

а) $\overrightarrow{AB} = (3,5)$, $A(-3,7)$;
б) $\overrightarrow{AB} = (1,-3,5)$, $A(-5,6,2)$;
в) $\overrightarrow{AB} = (10,-5,0)$, $A(-3,6,7)$.

Решение. б) Нека $B(x,y,z)$. Тогава от (8.7) получаваме

$$\overrightarrow{AB} = (x+5, y-6, z-2).$$

Това означава, че

$$x+5=1, \quad y-6=-3 \quad \text{и} \quad z-2=5,$$

откъдето следва, че $B(-4,3,7)$.

Отговори. а) $B(0,12)$; в) $B(7,1,7)$.

Задача 8.3. *Намерете координатите на векторите $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, ако:*

а) $\vec{a} = (1,2)$, $\vec{b} = (-1,3)$;
б) $\vec{a} = (2,1,-1)$, $\vec{b} = (-1,0,2)$.

Решение. Съгласно правилата за извършване на линейни действия с наредени n-торки, пресмятаме: а) $\vec{m} = (1-1, 2+3) = (0,5)$, $\vec{n} = (1+1, 2-3) = (2,-1)$, $\vec{p} = (2-3, 4+9) = (-1,13)$.

Отговори. б) $\vec{m} = (1,1,1)$, $\vec{n} = (3,1,-3)$, $\vec{p} = (1,2,4)$.

Задача 8.4. *Намерете стойностите на реалния параметър λ, за които векторите $\vec{a} = (\lambda, 1 - \lambda)$ и $\vec{b} = (\lambda^2 - 2\lambda, \lambda^2 - 2\lambda + 1)$ са еднопосочно колинеарни.*

Решение. Ще намерим стойностите на λ, за които векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, и за всяка от тези стойност ще установим дали имаме еднопосочна или разнопосочна колинеарност. Търсените стойности на λ са онези, за които координатите на двата вектора са пропорционални, т.е. за които $\frac{\lambda^2-2\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda^2-2\lambda+1}{1-\lambda}$. Последното условие е еквивалентно на уравнението $\lambda(\lambda - 1)(2\lambda - 3) = 0$, чиито корени са $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = \frac{3}{2}$. За $\lambda = 0$ е изпълнено $\vec{a} = \vec{b} = (0, 1)$. Следователно за тази стойност на λ векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни. За $\lambda = 1$ и $\lambda = \frac{3}{2}$ получаваме съответно $\vec{a} = -\vec{b} = (1, 0)$ и $\vec{a} = -2\vec{b} = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, което показва, че в тези два случая векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са разнопосочно колинеарни. Следователно отговорът на задачата е $\lambda = 0$.

Задача 8.5. *Намерете стойностите на реалния параметър λ, за които векторите $\vec{a} = (\lambda, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, \lambda, 1)$ и $\vec{c} = (\lambda^2, 1, 1)$ са компланарни.*

Решение. Дадените вектори са компланарни, точно когато между координатите им има линейна зависимост. Съгласно свойствата на детерминантите, последното условие е изпълнено, точно когато

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Горното условие е еквивалентно на уравнението $\lambda(2\lambda - 1) = 0$, чиито решения са $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. За тези стойности на λ трите вектора са компланарни, като удовлетворяват съответно следните линейни комбинации $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} = 2(\vec{c} - \vec{b})$.

Задача 8.6. *Докажете, че точките A, B и C са колинеарни и намерете простото отношение (ABC), ако:*

а) $A(1, 2, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, 1, 0)$;
б) $A(3, 4, 2)$, $B(2, 6, -1)$, $C(1, 8, -4)$;
в) $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 3)$, $C(5, -2, 0)$.

Решение. а) Намираме координатите на насочените отсечки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$, както следва $\overrightarrow{AC} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, -1)$. Следователно $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$, откъдето следва, че точките A, B и C са колинеарни. Съгласно (8.2), имаме $(ABC) = -1$, т.е. C е средата на AB.

Отговори. б) $\overrightarrow{AC} = (-2, 4, -6)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, 2, -3)$, $(ABC) = 2$;
в) $\overrightarrow{AC} = (6, -2, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (9, -3, -3)$, $(ABC) = \frac{2}{3}$.

Задача 8.7. *Докажете, че точките A, B и C са върхове на триъгълник и намерете координатите на средата M на страната AB и медицентъра G на $\triangle\, ABC$, ако:*

а) $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, $C(0, 5)$;
б) $A(1, 2, 3)$, $B(3, 0, -1)$, $C(-4, 1, 4)$.

Решение. а) Намираме координатите на две насочени отсечки, съставени от точките A, B и C, например $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$ и $\overrightarrow{AC} = (-2, 4)$. По този начин установяваме, че координатите на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не са пропорционални и следователно трите точки не лежат върху една права, т.е. са върхове на триъгълник. Като използваме (8.9) и (8.10), пресмятаме съответно координатите на средата M на AB и медицентъра G на $\triangle\, ABC$, както следва:

$$M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (3, 2), \quad G\left(\frac{2+4}{3}, \frac{1+3+5}{3}\right) = (2, 3).$$

Отговори. б) $M(2, 1, 1)$, $G(0, 1, 2)$.

Задача 8.8. *Дадени са точките $A(-1, 3)$ и $B(2, 1)$. Намерете координатите на точките C и D от равнината такива, че фигурата $ABCD$ да бъде успоредник с диагонали AC и BD, успоредни съответно на координатните оси Ox и Oy.*

Решение. Нека $C(x, y)$ и $D(z, t)$. Съгласно условието, имаме

$$\overrightarrow{AC} = (x+1, y-3) \parallel Ox \parallel \vec{e}_1(1, 0) \text{ и } \overrightarrow{BD} = (z-2, t-1) \parallel Oy \parallel \vec{e}_2(0, 1).$$

Следователно координатите на $\overrightarrow{AC}$ и $\vec{e}_1$, както и на $\overrightarrow{BD}$ и $\vec{e}_2$ са пропорционални. Използвайки свойствата на пропорциите, получаваме $0(x+1) = 1(y-3)$ и $1(z-2) = 0(t-1)$, откъдето намираме $y = 3$, $z = 2$. Тъй като $ABCD$ е успоредник, то е изпълнено $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. От последното условие получаваме равенството $(3, -2) = (x-2, 3-t)$. Следователно $x = t = 5$. Така намерихме $C(5, 3)$ и $D(2, 5)$.

Задача 8.9. *Дадени са точките $A(1, -3, 2)$, $B(8, 0, 4)$, $C(4, 8, 3)$. Намерете точка D такава, че фигурата $ABCD$ да бъде успоредник и пресметнете координатите на пресечната точка на диагоналите му.*

Решение. Нека означим $D(x, y, z)$. За да бъде фигурата $ABCD$ успоредник, е необходимо и достатъчно $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (или $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$), като при това четирите точки не бива да бъдат колинеарни. Пресмятаме $\overrightarrow{AB} = (7,3,2)$ и $\overrightarrow{DC} = (4-x, 8-y, 3-z)$. След приравняване на съответните координати на двете насочени отсечки намираме $D(-3,5,1)$. Тъй като $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC} = (3,11,1)$ не са колинеарни, то $ABCD$ е успоредник. Пресечната точка на диагоналите му P разполовява и двата диагонала. Координатите на $P(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ получаваме чрез (8.9).

Задача 8.10. *Определете взаимното положение на правите AB и CD в равнината и в случай че се пресичат, намерете координатите на пресечната им точка, ако:*

а) $A(3,-3)$, $B(-1,-1)$, $C(4,0)$, $D(7,2)$;
б) $A(1,4)$, $B(3,2)$, $C(3,-2)$, $D(5,-4)$;
в) $A(2,-1)$, $B(5,0)$, $C(8,1)$, $D(-1,-2)$.

Решение. Взаимното положение на правите AB и CD, лежащи в една равнина, определяме в зависимост от това дали насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са колинеарни или не. Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са неколинеарни, то правите се пресичат. Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са колинеарни, правите са успоредни или съвпадат. За да разграничим последните два случая, проверяваме дали точките A, B, C и D лежат върху една права.

а) Пресмятаме $\overrightarrow{AB} = (-4,2)$ и $\overrightarrow{CD} = (3,2)$. Тъй като двете насочени отсечки са неколинеарни, правите AB и CD се пресичат. Нека означим пресечната им точка с P. Понеже P лежи на AB, имаме $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава за радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$ на точка P е изпълнено

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} \\ &= (3,-3) + \lambda(-4,2) = (3-4\lambda, 2\lambda-3). \end{aligned} \tag{8.11}$$

Аналогично, тъй като P лежи на CD и следователно $\overrightarrow{CP} = \mu\overrightarrow{CD}$, $\mu \in \mathbb{R}$, имаме

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{CD} = (3\mu+4, 2\mu). \tag{8.12}$$

Чрез приравняване на съответните координати в представянията (8.11) и (8.12) достигаме до системата уравнения

$$\left|\begin{aligned} 4\lambda + 3\mu &= -1 \\ 2\lambda - 2\mu &= 3, \end{aligned}\right.$$

чието решение е $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = -1$. Заместваме тези стойности съответно в (8.11) или (8.12) и окончателно получаваме $P(1,-2)$.

б) Намираме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (2, -2)$. Следователно правите AB и CD са успоредни или съвпадат. Проверяваме дали точките A, B, C и D са колинеарни. Пресмятаме $\overrightarrow{AC} = (2, -6)$, с което установяваме, че $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не са колинеарни, т.е. AB и CD са две различни прави. Следователно AB и CD са успоредни.

в) Намираме $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$ и $\overrightarrow{CD} = (-9, -3)$, откъдето следва, че $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са колинеарни. Намираме още $\overrightarrow{AC} = (6, 2)$, което показва, че $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ също са колинеарни. Следователно четирите точки A, B, C и D лежат върху една права, т.е. в този случай правите AB и CD съвпадат.

Задача 8.11. *Определете взаимното положение на правите AB и CD в пространството и в случай че се пресичат, намерете координатите на пресечната им точка, ако:*

а) $A(2, -1, 3)$, $B(4, 6, 1)$, $C(5, 1, -1)$, $D(7, 8, -3)$;
б) $A(0, 1, 2)$, $B(2, 2, 3)$, $C(1, -1, 2)$, $D(-5, 1, 0)$;
в) $A(5, 1, 0)$, $B(2, 2, 3)$, $C(1, -1, 1)$, $D(2, 0, 2)$;
г) $A(6, 0, 1)$, $B(-1, 3, 2)$, $C(5, 1, -3)$, $D(6, 1, 3)$;
д) $A(5, 1, 3)$, $B(6, 2, 7)$, $C(4, 1, 4)$, $D(5, 0, -2)$;
е) $A(1, 0, 1)$, $B(2, 0, 2)$, $C(3, 1, 2)$, $D(5, 1, 4)$.

Решение. Взаимното положение на правите AB и CD в тримерното пространство определяме по следния начин. Ако насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са колинеарни, правите са успоредни или съвпадат. Двата случая разграничаваме като в предходната задача. Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са неколинеарни, правите се пресичат или са кръстосани. За отделянето на тези два случая проверяваме дали точките A, B, C и D са компланарни (правите се пресичат) или не (правите са кръстосани).

а) Пресмятаме $\overrightarrow{AB} = (2, 7, -2)$, $\overrightarrow{CD} = (2, 7, -2)$ и $\overrightarrow{AC} = (3, 2, -4)$. Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са колинеарни, но $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не са. Следователно правите AB и CD са успоредни.

б) Отново пресмятаме $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 1)$ и $\overrightarrow{CD} = (-6, 2, -2)$. Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не са колинеарни, което означава, че правите AB и CD се пресичат или са кръстосани. Пресмятаме детерминантата от координатите на три вектора от тези точки, например $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AC}$, както следва

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следователно правите AB и CD лежат в една равнина и се пресичат. Нека означим пресечната им точка с P. Аналогично на Задача 8.10а), намираме $P(-2,0,1)$.

в) Тъй като $\overrightarrow{AB} = (-3,1,3)$ и $\overrightarrow{CD} = (1,1,1)$ са неколинеарни, правите AB и CD се пресичат или са кръстосани. Постъпваме аналогично на предходната подточка. Намираме $\overrightarrow{AC} = (-4,-2,1)$ и пресмятаме

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

което показва, че точките A, B, C и D не лежат в една равнина. Следователно правите AB и CD са кръстосани.

Отговори. г) кръстосани; д) пресичат се в точка $(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, 1)$; е) успоредни.

Задача 8.12. *Определете взаимното положение на правата AB и равнината CDE и в случай че имат обща точка (пробод), намерете нейните координати:*

а) $A(1,2,3)$, $B(2,1,5)$, $C(-1,2,0)$, $D(1,0,0)$, $E(0,3,-1)$;
б) $A(2,2,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(-1,2,1)$, $D(3,4,0)$, $E(1,2,-1)$;
в) $A(3,0,6)$, $B(2,1,3)$, $C(4,1,-1)$, $D(0,2,2)$, $E(3,1,1)$;
г) $A(1,0,-1)$, $B(6,2,4)$, $C(5,0,-3)$, $D(5,2,1)$, $E(-1,0,3)$;
д) $A(1,2,-1)$, $B(-5,3,3)$, $C(5,1,1)$, $D(0,1,4)$, $E(4,2,2)$;
е) $A(5,4,2)$, $B(9,8,3)$, $C(1,0,1)$, $D(2,3,3)$, $E(4,1,0)$.

Решение. Взаимното положение на правата AB и равнината CDE определяме, като изследваме взаимното положение на един вектор, колинеарен с правата, и два неколинеарни помежду си вектора от равнината. Ако трите вектора са некомпланарни, то правата и равнината имат една обща точка. Ако трите вектора са компланарни, правата лежи в равнината или е успоредна на нея. Последните два случая разграничаваме, като проверяваме дали точките A, B, C, D и E са компланарни или не.

а) Намираме $\overrightarrow{AB} = (1,-1,2)$, $\overrightarrow{CD} = (2,-2,0)$ и $\overrightarrow{CE} = (1,1,-1)$. Тъй като $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$ са неколинеарни, точките C, D и E определят равнина. Пресмятаме детерминантата от координатите на $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

По този начин установяваме, че $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$ са некомпланарни и следователно AB и равнината CDE имат една обща точка, която ще означим с P. Тъй като P лежи върху AB, имаме $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Тогава

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = (\lambda + 1, 2 - \lambda, 2\lambda + 3).$$

Тъй като P лежи в равнината CDE, то насочената отсечка $\overrightarrow{CP}$ може да се разложи еднозначно по базата $\{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}\}$ на тази равнина, т.е. $\overrightarrow{CP} = \mu\overrightarrow{CD} + \nu\overrightarrow{CE}$. Използвайки последното равенство, намираме второ представяне за радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$, както следва

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{CD} + \nu\overrightarrow{CE} = (2\mu + \nu - 1, 2 - 2\mu + \nu, -\nu).$$

Като приравним съответните координати на двете представяния на $\overrightarrow{OP}$, достигаме до определената система

$$\left|\begin{array}{l} \lambda - 2\mu - \nu = -2 \\ \lambda - 2\mu + \nu = 0 \\ 2\lambda + \nu = -3, \end{array}\right.$$

чието единствено решение е $\lambda = -2$, $\mu = -\frac{1}{2}$, $\nu = 1$. Следователно прободът на правата и равнината е $P(-1, 4, -1)$.

б) Намираме $\overrightarrow{AB} = (-1, -2, -2)$, $\overrightarrow{CD} = (4, 2, -1)$ и $\overrightarrow{CE} = (2, 0, -2)$. Тъй като

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$ са компланарни. Следователно правата AB е успоредна равнината CDE или лежи в нея. Намираме координатите на една насочена отсечка, свързваща точка от правата и точка от равнината, например $\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 0)$, и проверяваме дали насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CD}$ са компланарни. Понеже

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 18 \neq 0,$$

правата AB не лежи в CDE и следователно е успоредна на равнината.

в) Намираме $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -3)$, $\overrightarrow{CD} = (-4, 1, 3)$ и $\overrightarrow{CE} = (-1, 0, 2)$. Аналогично на предната подточка, установяваме, че тези три насочени отсечки са компланарни. Тогава намираме още $\overrightarrow{AC} = (1, 1, -7)$

и установяваме, че $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CD}$ са също компланарни. Следователно правата AB лежи в равнината CDE.

Отговори. г) правата AB пресича CDE в точката $(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; д) правата AB е успоредна на равнината CDE; е) AB лежи в равнината CDE.

Задача 8.13. *В $\triangle\ ABC$ точката M е средата на страната AB, точката N е средата на отсечката CM, а точката P е от страната BC, като $BP : PC = 2 : 1$. Докажете, че точките A, N и P са колинеарни и намерете отношението $AN : NP$.*

Решение. Ще решим задачата чрез *координатно векторния метод.* За тази цел избираме една координатна система в равнината на $\triangle\ ABC$. Нека точката A е центърът на тази координатна система, а $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ са двата координатни вектора. Следователно относно $K = A\vec{e}_1\vec{e}_2$ имаме $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и $C(0, 1)$. Тъй като $BP : PC = 2 : 1$, съгласно (8.8), получаваме $P(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Понеже M е средата на AB, от (8.9) намираме $M(\frac{1}{2}, 0)$. Аналогично, тъй като N е средата на CM, имаме $N(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Тогава за радиус-векторите на M и N е изпълнено $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AP}$. Следователно точките A, N и P са колинеарни и $AN : NP = 3 : 1$.

Задача 8.14. *Нека $ABCDS$ е четириъгълна пирамида с основа трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $CD = 2AB$). Точките M, N и P са съответно от ръбовете SA, SB и SC, като $SM = AM$, $SN = 3BN$ и $SP = 2CP$. Намерете отношението, в което пресечната точка Q на ръба SD и равнината MNP дели SD.*

Решение. Избираме една координатна система в тримерното пространство, например тази с начало точката S и координатни вектори $\vec{e}_1 = \overrightarrow{SA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{SB}$ и $\vec{e}_3 = \overrightarrow{SC}$. Тогава относно $K = S\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е изпълнено $S(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ и $C(0, 0, 1)$. Намираме координатите на т. D в избраната координатна система чрез

$$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC},$$

откъдето получаваме $D(2, -2, 1)$. Съгласно условието на задачата имаме още $M(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $N(0, \frac{3}{4}, 0)$ и $P(0, 0, \frac{2}{3})$. Тъй като точката Q е от правата SD, насочените отсечки $\overrightarrow{SQ}$ и $\overrightarrow{SD}$ са колинеарни и следователно е в сила $\overrightarrow{SQ} = \lambda\overrightarrow{SD}$, където $\lambda \in \mathbb{R}$ е търсеното отношение. Тогава $Q(2\lambda, -2\lambda, \lambda)$. Понеже точките M, N, P и Q лежат в една равнина, насочените отсечки $\overrightarrow{MN} = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0)$, $\overrightarrow{MP} = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3})$ и

$\overrightarrow{MQ} = (2\lambda - \frac{1}{2}, -2\lambda, \lambda)$ трябва да бъдат компланарни. Следователно координатите им удовлетворяват

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3} \\ 2\lambda - \frac{1}{2} & -2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Последното условие е изпълнено, точно когато $\lambda = \frac{6}{17}$. Така установихме, че $SQ : QD = 6 : 11$.

8.2. **Смяна на координатната система.**

Смяна на КС в равнина

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и $K' = O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ са две координатни системи в равнината и $O'(a, b)$, $\vec{e}_1{}' = (\alpha_{11}, \alpha_{21})$, $\vec{e}_2{}' = (\alpha_{12}, \alpha_{22})$ относно K. Тогава матрицата T на прехода от базата $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ към базата $e' = \{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$ има вида

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}. \tag{8.13}$$

Ако $\det T > 0$, то координатните системи K и K' (базите e и e') са еднакво ориентирани. Ако $\det T < 0$, то K и K' (базите e и e') имат противоположна ориентация.

Зависимостта между координатите (x, y) на произволна точка относно K и координатите (x', y') на същата точка относно K' се изразява чрез равенството

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{8.14}$$

Координатният запис на (8.14) има вида

$$\left| \begin{array}{l} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + a \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + b. \end{array} \right. \tag{8.15}$$

Равенствата (8.15) се наричат *формули за обща смяна на КС в равнина.*

Определение 8.12. *Транслация на КС* е замяна на K с K', при която координатното начало O се премества в ново положение $O'(a, b)$, а координатните вектори се пренасят успоредно в O' (т.е. $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1$, $\vec{e}_2{}' = \vec{e}_2$). Следователно в този случай матрицата на прехода T от

e към e' е единичната квадратна матрица от втори ред. Векторът $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$ се нарича *вектор на транслацията* (*преместването*).

Формулите за транслация в равнината имат вида

$$\left| \begin{array}{l} x = x' + a \\ y = y' + b. \end{array} \right. \tag{8.16}$$

Определение 8.13. *Ротация на ортонормирана КС* е замяна на K с K' (K и K' са ортонормирани координатни системи), при която координатното начало запазва своята позиция, т.е. $O' \equiv O$, а координатните вектори се завъртат на ъгъл α. Матрицата T на прехода от e към e' е ортогонална и има вида

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\varepsilon\sin\alpha \\ \sin\alpha & \varepsilon\cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{8.17}$$

където $\varepsilon = \pm 1$, като $\varepsilon = 1$, ако K и K' са еднакво ориентирани, а $\varepsilon = -1$, ако K и K' имат противоположна ориентация.

Формулите за ротация на ортонормирана КС в равнината имат вида

$$\left| \begin{array}{l} x = \cos\alpha . x' - \varepsilon \sin\alpha . y' \\ y = \sin\alpha . x' + \varepsilon \cos\alpha . y'. \end{array} \right. \tag{8.18}$$

Смяна на КС в пространството

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и $K' = O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ са две координатни системи в пространството и $O'(a, b, c)$, $\vec{e}_1{}' = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$, $\vec{e}_2{}' = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32})$, $\vec{e}_3{}' = (\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33})$ относно K.

Формулите за обща смяна на КС в пространството, при която K се заменя с K', имат вида

$$\left| \begin{array}{l} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' + a \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' + b \\ z = \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' + c, \end{array} \right. \tag{8.19}$$

където (x, y, z) и (x', y', z') са координатите на произволна точка съответно относно K и K'.

Транслация на КС в пространството се определя от

$$\left| \begin{array}{l} x = x' + a \\ y = y' + b \\ z = z' + c. \end{array} \right. \tag{8.20}$$

Формулите (8.19) задават *ортогонална трансформация на ортонормирана КС*, ако $a = b = c = 0$ и матрицата (α_{ij}) $(i, j = 1, 2, 3)$ е ортогонална.

Задача 8.15. *Относно положително ориентирана координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ в равнината са дадени точките $O'(2,-3)$, $E_1'(1,1)$, $E_2'(3,-6)$ и $M(3,-2)$. Ако $\vec{e}_1{}' = \overrightarrow{O'E_1'}$ и $\vec{e}_2{}' = \overrightarrow{O'E_2'}$, определете:*

а) ориентацията на координатната система $K' = O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$;
б) формулите за смяна на K с K';
в) формулите за смяна на K' с K;
г) координатите на M относно K'.

Решение. а) Намираме координатите на новите координатни вектори $\vec{e}_1{}' = (-1,4)$ и $\vec{e}_2{}' = (1,-3)$ и съставяме матрицата T на прехода към новата координатна база

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тъй като $\det T = -1 < 0$, то базата $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$ има противоположна ориентация в сравнение с базата $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. По условие базата $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ е дясно ориентирана. Следователно координатната система K' има лява ориентация.

б) Съгласно (8.15) формулите за смяна на K с K' имат вида

$$\left| \begin{array}{l} x = -x' + y' + 2 \\ y = 4x' - 3y' - 3, \end{array} \right. \tag{8.21}$$

където (x,y) и (x',y') са координатите на произволна точка съответно относно K и K'.

в) Чрез решаване на системата (8.21) относно x' и y' получаваме формулите на обратната трансформация – замяната на K' с K, както следва

$$\left| \begin{array}{l} x' = 3x + y - 3 \\ y' = 4x + y - 5. \end{array} \right. \tag{8.22}$$

г) Координатите на M относно K' намираме, като заместим координатите на M относно K, т.е. наредената двойка $(3,-2)$, във формулите (8.22). Така получаваме $M(4,5)$ относно K'.

Задача 8.16. *Относно дясна ортонормирана координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ е дадена точката $M(2,-5)$. Да се намерят координатите на M относно координатната система:*

а) K', получена чрез транслация на K, определена от вектора $\vec{v} = (-3,5)$;
б) K', получена чрез ротация на K на ъгъл $\frac{\pi}{6}$, ако K и K' имат еднаква ориентация.

Решение. а) Съгласно формулите за транслация в равнината (8.16), записваме

$$\left|\begin{array}{l} x = x' - 3 \\ y = y' + 5, \end{array}\right.$$

откъдето за координатите на M относно K' намираме $M(5, -10)$.

б) Като вземем предвид формулите (8.18) за ротация на ортонормирана координатна система в равнината, получаваме

$$\left|\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(x'\sqrt{3} - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3}). \end{array}\right.$$

От горните равенства намираме $M(\frac{2\sqrt{3}-5}{2}, -\frac{2+5\sqrt{3}}{2})$ относно K'.

Задача 8.17. *В успоредника $ABCD$ точката P е от диагонала BD така, че $BP : PD = 1 : 2$. Намерете трансформационните формули на смяната на координатната система $K = A_{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}}$ с $K' = P_{\overrightarrow{PC}\overrightarrow{PD}}$ и координатите на средата M на BC относно K'.*

Решение. Съгласно условието на задачата, $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ относно K. Тъй като $BP : PD = 1 : 2$, то $P(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Тогава $\overrightarrow{PC} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ и $\overrightarrow{PD} = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Следователно формулите за замяна на K с K' имат вида

$$\left|\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}(x' - 2y' + 2) \\ y = \frac{1}{3}(2x' + 2y' + 1). \end{array}\right.$$

Средата M на BC има координати $M(1, \frac{1}{2})$ относно K. След заместването им в горните равенства намираме координатите $M(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ на същата точка относно K'.

Задача 8.18. *Диагоналите на успоредника $ABCD$ се пресичат в точката P. Намерете трансформационните формули на смяната на координатната система $K = A_{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}$ с $K' = P_{\overrightarrow{PB}\overrightarrow{PC}}$ и координатите на върха D относно K'.*

Упътване. Имаме $P(0, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{PB} = (1, -\frac{1}{2})$ и $\overrightarrow{PC} = (0, \frac{1}{2})$ относно K. Следователно формулите за смяна на K с K' имат вида $x = x'$, $y = \frac{1}{2}(y' - x' + 1)$. Като използваме, че $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, намираме $D(-1, 1)$ относно K. Имайки предвид, че $x' = x$ и $y' = x + 2y - 1$, получаваме $D(-1, 0)$ относно K'.

Задача 8.19. *Даден е тетраедърът $OABC$. Нека A', B' и C' са медицентровете съответно на $\triangle\, OBC$, $\triangle\, OAC$ и $\triangle\, OAB$. Намерете формулите за смяна на координатната система $K = O_{\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC}}$ с $K' = O_{\overrightarrow{OA'}\overrightarrow{OB'}\overrightarrow{OC'}}$.*

Решение. Относно K имаме $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Тогава, съгласно (8.10), получаваме

$$\overrightarrow{OA'} = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \overrightarrow{OB'} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OC'} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right).$$

Като вземем предвид (8.19), формулите за смяна на K с K' имат вида

$$\left|\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}(y' + z') \\ y = \frac{1}{3}(x' + z') \\ z = \frac{1}{3}(x' + y'). \end{array}\right.$$

9. Метрични действия със свободни вектори

Физиците трябва да осъзнаят, че математиката е доказан път към истината.
Брайън Грийн

9.1. **Скаларно произведение на вектори.**

Определение 9.1 (Скаларно произведение). *Скаларно произведение* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарича реалното число $\vec{a}\vec{b}$, определено от равенството

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}), \tag{9.1}$$

където $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \in [0,\pi]$ е ъгълът между $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ са съответните им дължини.

Определение 9.2 (Скаларен квадрат). *Скаларен квадрат* $\vec{a}^{\,2}$ на вектора $\vec{a}$ се нарича скаларното произведение на $\vec{a}$ със себе си, т.е.

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2. \tag{9.2}$$

Забележка 9.1. От равенството (9.2) се вижда, че дължината $|\vec{a}|$ на произволен вектор $\vec{a}$ може да бъде намерена чрез

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}. \tag{9.3}$$

Теорема 9.1 (Свойства на скаларното произведение)**.** *Нека $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са произволни вектори, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава са в сила следните равенства:*
1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (комутативност);
2) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (дистрибутивност);
3) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$ (хомогенност);
4) $\vec{a}^{\,2} \geq 0$, като $\vec{a}^{\,2} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$ (неотрицателност).

Определение 9.3. Векторно пространство над $\mathbb{R}$, в което е зададено скаларно произведение, удовлетворяващо свойствата от Теорема 9.1, се нарича *реално евклидово пространство.*

Пример 9.1. Забележителни реални евклидови пространства са *реалната права* $\mathbb{R}$, *реалната равнина* $\mathbb{R}^2$ и *тримерното пространство* $\mathbb{R}^3$.

Забележка 9.2. Геометричното векторно пространство, снабдено със скаларно произведение, е реално евклидово пространство и се нарича *евклидово геометрично пространство.*

Теорема 9.2. *Нека са дадени векторите* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *и* $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *относно ортонормирана координатна система (база). Тогава са в сила равенствата:*

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,\ \vec{a}^{\,2} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,\ |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \tag{9.4}$$

Следствие 9.1. *Ако относно ортонормирана координатна система са дадени точките* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$*, то разстоянието между тях, т.е. дължината на отсечката* M_1M_2*, се пресмята по формулата*

$$d(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{9.5}$$

Теорема 9.3. *Нека са дадени два ненулеви вектора* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *и* $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *относно ортонормирана координатна система и* φ *е ъгълът между тях. Тогава*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{9.6}$$

Забележка 9.3. Ако $\vec{a}\vec{b} > 0$, то ъгълът между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е остър. Ако $\vec{a}\vec{b} < 0$, то ъгълът между векторите е тъп.

Теорема 9.4 (Критерий за ортогоналност)**.** *Два ненулеви вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *са взаимно перпендикулярни, точно когато* $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Теорема 9.5 (Нормиране на вектори)**.** *Нека* $\vec{a} \neq \vec{o}$*. Тогава векторът* $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ *е еднопосочно колинеарен с* $\vec{a}$ *и има дължина единица, т.е.* $|\vec{e}\,| = 1$.

Определение 9.4. Нека $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\vec{b} \neq \vec{o}$. Да разгледаме произволна ос, определена от посоката на $\vec{b}$. През точките A и B прекарваме прави, перпендикулярни на $\vec{b}$, които пресичат оста съответно в точките A' и B'. Тогава числото λ, определено от $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\vec{e}$, където $\vec{e}$ е единичен вектор, еднопосочно колинеарен с $\vec{b}$, се нарича *скаларна ортогонална проекция* на вектора $\vec{a}$ върху вектора $\vec{b}$ и се означава с $\operatorname{proj}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Теорема 9.6. *Нека* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *са произволни ненулеви вектори. Тогава е в сила равенството*

$$\operatorname{proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}. \tag{9.7}$$

Определение 9.5. Векторът $\overrightarrow{\mathrm{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a}} = (\mathrm{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a})\vec{e}$, където $\vec{e}$ е единичен вектор, еднопосочно колинеарен с $\vec{b}$, се нарича *векторна ортогонална проекция* на $\vec{a}$ върху ос, определена от посоката на $\vec{b}$.

Определение 9.6. *Директорни косинуси на посоката*, определена от даден вектор $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$, се наричат косинусите на ъглите α, β и γ, които този вектор сключва съответно с базисните вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

Забележка 9.4. Ако векторът $\vec{e} = (x, y, z)$ е единичен, а базата $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ е ортонормирана, то директорните косинуси на посоката на $\vec{e}$ съвпадат с неговите координати, т.е. $\cos\alpha = x$, $\cos\beta = y$ и $\cos\gamma = z$. Освен това е изпълнено равенството

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Теорема 9.7 (*Метод на Грам*[1]*-Шмид*[2]). *Нека $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ са линейно независими вектори в $\mathbb{R}^m$. Тогава векторите $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, определени от равенствата*

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1 = \vec{a}_1,\\
&\vec{e}_2 = \vec{a}_2 - \tfrac{\vec{e}_1\vec{a}_2}{\vec{e}_1^{\,2}}\vec{e}_1,\\
&\vec{e}_3 = \vec{a}_3 - \tfrac{\vec{e}_1\vec{a}_3}{\vec{e}_1^{\,2}}\vec{e}_1 - \tfrac{\vec{e}_2\vec{a}_3}{\vec{e}_2^{\,2}}\vec{e}_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\vec{e}_n = \vec{a}_n - \tfrac{\vec{e}_1\vec{a}_n}{\vec{e}_1^{\,2}}\vec{e}_1 - \tfrac{\vec{e}_2\vec{a}_n}{\vec{e}_2^{\,2}}\vec{e}_2 - \cdots - \tfrac{\vec{e}_{n-1}\vec{a}_n}{\vec{e}_{n-1}^{\,2}}\vec{e}_{n-1},
\end{aligned} \tag{9.8}$$

са ортогонални помежду си.

Забележка 9.5. Векторите $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ от (9.8) могат да бъдат нормирани до получаването на ортонормираната система от вектори $\vec{e}_i' = \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}$. По този начин от произволна база се получава ортонормирана база.

Задача 9.1. *Докажете, че за скаларното произведение на произволни свободни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са изпълнени свойствата:*

а) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^{\,2} - \vec{b}^{\,2}$;
б) $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} \pm 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$.

[1] Йорген Грам (1850–1916) – датски математик.
[2] Ерхард Шмид (1876–1959) – немски математик, роден на територията на днешна Естония.

Решение. б) Като използваме последователно определението за скаларен квадрат на свободен вектор (Определение 9.2) и свойствата на скаларното произведение от Теорема 9.1, получаваме

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2.$$

Останалите тъждества се доказват аналогично.

Задача 9.2. *Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са вектори от произволно векторно пространство над $\mathbb{R}$.*

а) Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни и $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, пресметнете $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$ и $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$.

б) Ако $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, пресметнете $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$, $(\vec{a}+\vec{b})^2$, $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

в) Ако $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$, пресметнете $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$ и $(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-4\vec{b})$.

Решение. а) Тъй като $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни, то $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 0$, което означава че $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 1$. Тогава от (9.1) пресмятаме скаларното произведение $\vec{a}\vec{b} = 2.3.1 = 6$ и скаларните квадрати $\vec{a}^2 = 2^2 = 4$ и $\vec{b}^2 = 3^2 = 9$. Като използваме равенството от Задача 9.1 а), установяваме, че $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 4 - 9 = -5$.

б) Аналогично на а), намираме $\vec{a}\vec{b} = 3.4.\cos\frac{\pi}{3} = 6$, $\vec{a}^2 = 9$, $\vec{b}^2 = 16$. Тогава, като използваме равенството от Задача 9.1 б), получаваме:

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 + 2.6 + 16 = 37 \text{ и } (\vec{a}-\vec{b})^2 = 13.$$

Упътване. в) От свойствата на скаларното произведение, като се има предвид, че $\vec{a}\vec{b} = -1$, $\vec{a}^2 = 2$, $\vec{b}^2 = 1$, получаваме

$$(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-4\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} - 8\vec{b}^2 = -4.$$

Задача 9.3. *Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са вектори, за които $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, то намерете:*

а) стойностите на реалния параметър λ, за които векторите $\vec{c} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \lambda\vec{b}$ са взаимно ортогонални;

б) ъгъла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ така, че векторите $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ да сключват ъгъл с големина $\frac{\pi}{4}$.

Решение. От условието на задачата имаме $\vec{a}^2 = 16$ и $\vec{b}^2 = 4$. Тогава:

а) Векторите $\vec{c}$ и $\vec{d}$ са взаимно ортогонални, точно когато $\vec{c}\vec{d} = 0$. Пресмятаме $\vec{c}\vec{d} = (\vec{a}+\lambda\vec{b})(\vec{a}-\lambda\vec{b}) = \vec{a}^2 - \lambda^2\vec{b}^2 = 16 - 4\lambda^2$, откъдето достигаме до уравнението $4 - \lambda^2 = 0$. Следователно $\lambda = \pm 2$.

б) От първото равенство в (9.6) получаваме

$$\begin{aligned}\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) &= \frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \frac{(\vec{a}+\vec{b}\,)(\vec{a}-\vec{b}\,)}{\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}\,)^2}\sqrt{(\vec{a}-\vec{b}\,)^2}} \\ &= \frac{\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}}{\sqrt{(\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2})(\vec{a}^{\,2}-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2})}} \\ &= \frac{12}{\sqrt{(20+2\vec{a}\vec{b}\,)(20-2\vec{a}\vec{b}\,)}}. \qquad (9.9)\end{aligned}$$

От друга страна, $\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Следователно $\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Така от последното равенство и (9.9) получаваме

$$\frac{12}{\sqrt{400-4(\vec{a}\vec{b})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откъдето намираме $\vec{a}\vec{b} = \pm 2\sqrt{7}$. Следователно

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pm\frac{2\sqrt{7}}{4.2} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Задача 9.4. *Докажете, че за всеки четири точки A, B, C и D е изпълнено равенството (тъждество на Ойлер)*

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BD} = 0 \qquad (9.10)$$

и като следствие от него докажете, че:

а) височините в триъгълника се пресичат в една точка (ортоцентър);

б) ако две двойки срещуположни ръбове в един тетраедър са перпендикулярни, то и останалите два срещуположни ръба също са перпендикулярни.

Решение. Нека O е произволна точка. Като приложим тъждеството на Шал към лявата страна на (9.10), получаваме

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}).$$

Оттук, като използваме дистрибутивното свойство на скаларното произведение, получаваме (9.10).

а) Нека AA_1, BB_1 и CC_1 са височини в произволен $\triangle\, ABC$ и H е пресечната точка на AA_1 и BB_1. Ще докажем, че CC_1 също минава през H. Прилагаме тъждеството на Ойлер за A, B, C и H

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BH} = 0.$$

Тъй като $AH \perp BC$ и $BH \perp CA$, то $\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BH} = 0$. Следователно $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CH} = 0$, което показва, че $CH \perp AB$. От друга страна, $CC_1 \perp AB$, което означава, че H лежи на височината CC_1.

Упътване. Твърдението от б) се доказва аналогично на това от а).

В следващите задачи, ако не е указано друго, ще считаме координатната система за дясна ортонормирана.

Задача 9.5. *Намерете скаларното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, техните дължини, както и ъгъла между тях, ако:*

а) $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (2, -1)$;
б) $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, -1)$;
в) $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, 8)$;
г) $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 0, -1)$;
д) $\vec{a} = (2, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$.

Решение. а) От (9.4) получаваме $\vec{a}\vec{b} = 3.2 + 1.(-1) = 5$, $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$. Тогава, след заместване в (9.6), получаваме $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следователно $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

б) Аналогично на а), пресмятаме $\vec{a}\vec{b} = 1.0 + 1.1 + 0.(-1) = 1$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$. Тогава $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, откъдето $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Отговори. в) $\vec{a}\vec{b} = 0$, $|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{69}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$;
г) $\vec{a}\vec{b} = -3$, $|\vec{a}| = \sqrt{6}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$; д) $\vec{a}\vec{b} = 8$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$, $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{8}{9}$.

Задача 9.6. *Намерете вектор $\vec{p}$, сключващ остър ъгъл с оста Oz, колинеарен с вектора $\vec{a} = (2, -3, 6)$ и такъв, че $|\vec{p}\,| = 14$.*

Решение. От условието за колинеарност между векторите $\vec{p}$ и $\vec{a}$ следва, че $\vec{p} = \lambda\vec{a} = \lambda(2, -3, 6)$. Тогава $|\vec{p}\,| = |\lambda||\vec{a}| = 7|\lambda| = 14$, откъдето $|\lambda| = 2$, т.е. $\lambda = \pm 2$. Тъй като ъгълът между векторите $\vec{p}$ и $\vec{e}_3 = (0, 0, 1) \parallel Oz$ е остър, то е изпълнено $\vec{p}\vec{e}_3 = 6\lambda > 0$. Следователно търсената стойност на коефициента на колинеарност е $\lambda = 2$, откъдето $\vec{p} = (4, -6, 12)$.

Задача 9.7. *Намерете координатите на вектора $\vec{p}$, сключващ равни тъпи ъгли с векторите $\vec{a} = (-1, 1, -1)$, $\vec{b} = (-1, 1, 1)$ и $\vec{c} = (5, -1, -1)$, ако $|\vec{p}\,| = \sqrt{5}$.*

Решение. Нека $\vec{p} = (x, y, z)$. Пресмятаме $\vec{a}\vec{p} = y - x - z$, $\vec{b}\vec{p} = y - x + z$, $\vec{c}\vec{p} = 5x - y - z$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{3}$, $|\vec{c}| = 3\sqrt{3}$. Тъй като $\vec{p}$ сключва равни ъгли с $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то е изпълнено $\frac{\vec{a}\vec{p}}{|\vec{a}||\vec{p}|} = \frac{\vec{b}\vec{p}}{|\vec{b}||\vec{p}|} = \frac{\vec{c}\vec{p}}{|\vec{c}||\vec{p}|}$, откъдето след заместване получаваме

$$\frac{y - x - z}{\sqrt{15}} = \frac{y - x + z}{\sqrt{15}} = \frac{5x - y - z}{3\sqrt{15}}.$$

От горните равенства намираме $y = 2x$, $z = 0$. Следователно $\vec{p} = (x, 2x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Сега отчитаме условието за дължината на $\vec{p}$, съгласно което достигаме до уравнението $x^2 + 4x^2 = 5$. Тогава $x = \pm 1$. Така получихме противоположните вектори $\vec{p}_1 = (1, 2, 0)$ и $\vec{p}_2 = (-1, -2, 0)$, които образуват равни ъгли с $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Тъй като $\vec{a}\vec{p}_1 = 1 > 0$, а $\vec{a}\vec{p}_2 = -1 < 0$, то векторът $\vec{p}_2$ сключва равни тъпи ъгли с $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и следователно търсеният вектор е $\vec{p} = \vec{p}_2 = (-1, -2, 0)$.

Задача 9.8. *Намерете директорните косинуси на посоката, определена от насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, ако:*

а) $A(-2, 1, 3)$, $B(0, -1, 2)$*;*
б) $A(1, 2, 4)$, $B(-1, 4, 8)$*;*
в) $A(6, 4, 6)$, $B(6, 7, 10)$*.*

Решение. а) Пресмятаме координатите на $\overrightarrow{AB} = (2, -2, -1)$, откъдето намираме $|\overrightarrow{AB}| = 3$. Тогава директорните косинуси на посоката на $\overrightarrow{AB}$ са координатите на единичния вектор

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{3}(2, -2, -1)$$

и следователно се определят от равенствата

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{1}{3}.$$

Отговори. б) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$; в) $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\gamma = \frac{4}{5}$.

Задача 9.9. *Намерете единичния вектор $\vec{a}$, който сключва ъгли от 45° и 60° съответно с координатните оси Ox и Oy и остър ъгъл γ с Oz. Намерете скаларната проекция на $\vec{a}$ върху вектора $\vec{b} = (\sqrt{2}, -3, -5)$.*

Решение. Тъй като векторът $\vec{a}$ е единичен, то координатните му съвпадат с директорните косинуси на посоката, определена от него, т.е. с косинусите на ъглите, които образува с координатите оси.

Така $\vec{a} = (\cos 45°, \cos 60°, \cos\gamma) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \cos\gamma)$. При това е изпълнено $\cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2\gamma = 1$, откъдето $\cos\gamma = \pm\frac{1}{2}$. Понеже по условие ъгъл γ е остър, то $\cos\gamma = \frac{1}{2}$. Следователно $\vec{a} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Скаларната проекция на $\vec{a}$ върху $\vec{b}$ пресмятаме по формулата

$$\operatorname{proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 9.10. *Намерете векторната проекция на $\vec{a} = (4, -3, 2)$ върху ос l, която сключва с координатните оси равни остри ъгли.*

Решение. Най-напред ще намерим единичен вектор $\vec{e}$, определящ посоката върху оста l. Аналогично на предходната задача, имаме

$$\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad \text{и} \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

където α, β и γ са ъглите, които $\vec{e}$ сключва с трите координатни оси. По условие имаме $\alpha = \beta = \gamma$, откъдето следва, че $3\cos^2\alpha = 1$, т.е. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ (защото ъглите са остри). Така получаваме $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Тогава скаларната проекция на $\vec{a}$ върху вектора $\vec{e}$ е $\operatorname{proj}_{\vec{e}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{e}}{|\vec{e}|} = \sqrt{3}$. Следователно векторната проекция на $\vec{a}$ върху оста l е $\overrightarrow{\operatorname{proj}}_{\vec{e}}\vec{a} = (\operatorname{proj}_{\vec{e}}\vec{a})\vec{e} = \sqrt{3}\,\vec{e} = (1, 1, 1)$.

Задача 9.11. *Като използвате метода на Грам-Шмид (Теорема 9.7), ортогонализирайте системите от вектори:*

а) $\vec{a}_1 = (1, -1)$, $\vec{a}_2 = (2, -1)$;
б) $\vec{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 1, -1)$;
в) $\vec{a}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 1)$.

Решение. а) Тъй като координатите на $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не са пропорционални, то двата вектора са линейно независими. Нека $\vec{e}_1 = \vec{a}_1$. Пресмятаме $\vec{e}_1\vec{a}_2 = 3$ и $\vec{e}_1^{\,2} = 2$. Тогава от (9.8) получаваме

$$\vec{e}_2 = \vec{a}_2 - \frac{3}{2}\vec{e}_1 = (2, -1) - \frac{3}{2}(1, -1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

б) Аналогично на подточка а), първо установяваме, че дадените три вектора не са линейно зависими, понеже детерминантата от координатите им е различна от нула. Нека $\vec{e}_1 = \vec{a}_1$. Тогава имаме $\vec{e}_1\vec{a}_2 = -1$, $\vec{e}_1^{\,2} = 2$. Следователно $\vec{e}_2 = (-1, 1, 0) + \frac{1}{2}(1, 0, 1) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$. След това изчисляваме $\vec{e}_1\vec{a}_3 = -1$, $\vec{e}_2\vec{a}_3 = \frac{1}{2}$, $\vec{e}_2^{\,2} = \frac{3}{2}$. Тогава $\vec{e}_3 = \vec{a}_3 + \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

Отговори. в) $\vec{e}_1(0, 1, 1)$, $\vec{e}_2(1, 0, 0)$, $\vec{e}_3(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Задача 9.12. *Даден е $\triangle\ ABC$ с върхове точките $A(0,-2)$, $B(8,4)$ и $C(3,-6)$. Намерете дължините на медианата през върха C и на ъглополовящата през върха A и докажете, че триъгълникът е правоъгълен.*

Решение. За да намерим дължината на медианата през C, най-напред намираме средата $M(4,1)$ на страната AB. Остава да намерим дължината на насочената отсечка $\overrightarrow{CM}$. За целта пресмятаме $\overrightarrow{CM}=(1,7)$ и намираме $|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$.

Нека AL е ъглополовящата през върха A, като $L\in BC$. От училищния курс е известно, че $\frac{BL}{CL}=\frac{AB}{AC}$. Пресмятаме $\overrightarrow{AB}=(8,6)$ и $\overrightarrow{AC}=(3,-4)$. Следователно $|\overrightarrow{AB}|=10$ и $|\overrightarrow{AC}|=5$. Тогава $\frac{BL}{CL}=\frac{2}{1}$ и от (7.6) получаваме

$$\overrightarrow{AL}=\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{3}=\left(\frac{14}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

Оттук пресмятаме $|\overrightarrow{AL}|=\frac{10}{3}\sqrt{2}$.

Тъй като $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}=0$, то триъгълникът е правоъгълен с прав ъгъл при върха A.

Задача 9.13. *Даден е $\triangle\ ABC$ с върхове $A(2,0,2)$, $B(0,2,-2)$ и $C(2,2,0)$. Намерете:*

а) дължините на страните и големините на вътрешните ъгли на $\triangle\ ABC$;
б) координатите на петата H на височината през върха A.

Решение. а) Намираме насочените отсечки $\overrightarrow{AB}=(-2,2,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(0,2,-2)$ и $\overrightarrow{BC}=(2,0,2)$. За дължините им получаваме съответно $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{6}$, $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{2}$ (следователно $\triangle\ ABC$ е равнобедрен). Пресмятаме скаларните произведения $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC}=12$ и $\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB}=-4$. Вътрешните ъгли на триъгълника намираме чрез

$$\cos\sphericalangle ABC=\cos\sphericalangle BAC=\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\sphericalangle ACB=\cos\sphericalangle(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=-\frac{1}{2}.$$

Следователно $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BAC=\frac{\pi}{6}$, $\sphericalangle ACB=\frac{2\pi}{3}$.

б) Тъй като точката H е от правата BC, то насочените отсечки $\overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{BC}$ са колинеарни. Последното условие е равносилно на $\overrightarrow{BH}=x\overrightarrow{BC}$, $x\in\mathbb{R}$. Тъй като AH е височина към страната BC, насочените отсечки $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{BC}$ са перпендикулярни. Следователно имаме $\overrightarrow{AH}\overrightarrow{BC} = 0$. От друга страна, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC}$. Така за неизвестния коефициент на колинеарност x получаваме уравнението $(\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC})\overrightarrow{BC} = 0$, откъдето $x = -\frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}^2} = \frac{3}{2}$. Тогава за радиус-вектора $\overrightarrow{OH}$ на точката H получаваме

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OB} + x\overrightarrow{BC} = (0,2,-2) + \frac{3}{2}(2,0,2).$$

Следователно $H(3,2,1)$.

Задача 9.14. *Даден е $\triangle\ ABC$.*

а) Ако $A(3,-1,3)$, $B(2,0,3)$, $C(2,-1,4)$, докажете, че $\triangle\ ABC$ е равностранен и намерете разстоянието от медицентъра му G до центъра на координатната система.

б) Ако $A(8,5,2)$, $B(8,2,-1)$, $C(6,3,1)$, докажете, че $\triangle\ ABC$ е равнобедрен и правоъгълен ($\sphericalangle C = \frac{\pi}{2}$).

Отговори. а) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(7,-2,10)$, разстоянието от G до O е $|\overrightarrow{OG}| = \sqrt{17}$; б) $\overrightarrow{CA} = (2,2,1)$, $\overrightarrow{CB} = (2,-1,-2)$, откъдето $|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = 3$, $\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB} = 0$.

9.2. **Векторно и смесено произведение на вектори.**

Определение 9.7 (Векторно произведение)*. Векторно произведение* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарича векторът $\vec{a} \times \vec{b}$, за който са изпълнени условията:

1) ако $\vec{a} = \vec{o}$ или $\vec{b} = \vec{o}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$;
2) ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ненулеви вектори, то
   а) $|\vec{a} \times \vec{b}\,| = |\vec{a}\,||\vec{b}\,| \sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$;
   б) $(\vec{a} \times \vec{b}\,) \perp \vec{a}$ и $(\vec{a} \times \vec{b}\,) \perp \vec{b}$, т.е. $(\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{b} = 0$;
   в) ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, то векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ (в този ред) образуват положително (дясно) ориентирана база в тримерното пространство.

Теорема 9.8. *Ако $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ образуват дясно ориентирана ортонормирана база, то за тях са валидни равенствата:*

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

Теорема 9.9 (Свойства на векторното произведение)**.** *Нека $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са произволни вектори, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава са в сила следните равенства:*

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ *(антикомутативност);*
2) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$ *(дистрибутивност);*
3) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ *(хомогенност);*
4) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$ *(тъждество на Лагранж*[1]*);*
5) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{o}$ *(тъждество на Якоби*[2]*).*

Теорема 9.10 (Критерий за колинеарност)**.** *Два ненулеви вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *са колинеарни (линейно зависими), точно когато* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$*.*

Теорема 9.11. *Нека относно ортонормирана координатна система са дадени векторите* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *и* $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$*. Тогава координатите на векторното произведение* $\vec{a} \times \vec{b}$ *се намират по правилото*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \tag{9.11}$$

Теорема 9.12. *Нека* $\vec{a} \nparallel \vec{b}$*. Тогава за лицето на успоредника* $S_{усп}$ *и лицето на триъгълника* $S_{тр}$*, определени от* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*, са в сила формулите:*

$$S_{усп} = |\,\vec{a} \times \vec{b}| \quad \text{и} \quad S_{тр} = \frac{1}{2}|\,\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{9.12}$$

Теорема 9.13. *Нека* $A(x_1, y_1)$*,* $B(x_2, y_2)$ *и* $C(x_3, y_3)$ *са неколинеарни точки в равнината* Oxy *и означим*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогава лицето на $\triangle\, ABC$ *се пресмята чрез формулата*

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\,\Delta|. \tag{9.13}$$

Теорема 9.14. *За двойното векторно произведение* $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ *са в сила равенствата:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\vec{c})\vec{a}, \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}. \tag{9.14}$$

Определение 9.8 (Смесено произведение)*. Смесено произведение* на три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се нарича реалното число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, определено от равенството

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}. \tag{9.15}$$

[1]Джузепе Лодовико Лаграджиа (1736–1813) – италиански математик и астроном, по-известен под името Жозеф Луи Лагранж.

[2]Карл Густав Якоб Якоби (1804–1851) – немски математик.

Теорема 9.15 (Свойства на смесеното произведение)**.** *Нека $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ са произволни вектори, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава са в сила следните равенства:*
1) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$;
2) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}$;
3) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\,\vec{d} = \vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}$;
4) $(\lambda\vec{a})\vec{b}\,\vec{c} = \lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$,

Теорема 9.16 (Критерий за компланарност)**.** *Три ненулеви вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни (линейно зависими), точно когато* $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$.

Теорема 9.17. *Нека относно ортонормирана КС са дадени векторите $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$. Тогава е в сила равенството*

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{9.16}$$

Теорема 9.18. *Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са некомпланарни. Тогава за обема на паралелепипеда $V_{пар}$ и обема на триъгълната пирамида (тетраедъра) $V_{тет}$, определени от $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, са в сила формулите:*

$$V_{пар} = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}| \quad \text{и} \quad V_{тет} = \frac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|. \tag{9.17}$$

Задача 9.15. *Нека $\overrightarrow{AB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, където $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са единични вектори. Намерете ъгъла, образуван от $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако дължината на медианата AM в $\triangle\, ABC$ е $\frac{\sqrt{13}}{4}$.*

Решение. Тъй като $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, то за намирането на ъгъла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е достатъчно да намерим $\vec{a}\vec{b}$. Понеже точка M е среда на BC, то $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Нека $x = \vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$. Тогава от първото равенство в (9.14) получаваме

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}^{\,2}\,\vec{b} - (\vec{b}\,\vec{a})\vec{a} = \vec{b} - x\vec{a}.$$

Следователно

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{b} - x\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(2\vec{b} - x\vec{a}),$$

откъдето получаваме (вж. Задача 9.1 б))

$$\overrightarrow{AM}^{\,2} = \frac{1}{4}(4\vec{b}^2 - 4x\vec{b}\,\vec{a} + x^2\vec{a}^{\,2}) = \frac{4 - 3x^2}{4}.$$

От друга страна, $\overrightarrow{AM}^2 = \frac{13}{16}$ (по условие), което ни води до $12x^2 = 3$, чиито решения са $x = \pm\frac{1}{2}$. Следователно $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pm\frac{1}{2}$, което означава че $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ или $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$.

Задача 9.16. *Намерете координатите на векторите* $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ *и* $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, *и пресметнете стойността на* $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, *ако:*

а) $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (3, -1, 2)$, $\vec{c} = (1, 0, -1)$;
б) $\vec{a} = (-2, 2, 1)$, $\vec{b} = (4, 1, -3)$, $\vec{c} = (0, 1, 2)$;
в) $\vec{a} = (2, 3, 0)$, $\vec{b} = (1, -2, 5)$, $\vec{c} = (-1, 3, 1)$.

Решение. а) Съгласно (9.11) пресмятаме

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (5, 1, -7).$$

Аналогично намираме $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-1, -2, -1)$ и $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (-3, 0, 3)$. Като се има предвид (9.16), получаваме

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 12.$$

Отговори. б) $(-7, -2, -10)$, $(6, 14, -7)$, $(16, 13, 6)$, -22;
в) $(15, -10, -7)$, $(11, -8, 35)$, $(3, -2, 39)$, -52.

Задача 9.17. *Дадени са векторите* $\vec{a} = (4, -2, -4)$, $\vec{b} = (0, 1, 4)$ *и* $\vec{c} = (1, 1, 1)$. *Намерете координатите на вектора* $\vec{p}$, *перпендикулярен на* $\vec{a}$ *и на* $\vec{b}$, *ако* $|\vec{p}| = 6\sqrt{2}$ *и ъгълът между* $\vec{p}$ *и* $\vec{c}$ *е остър.*

Решение. Ще решим задачата по два начина.

Начин 1. При това решение ще използваме само свойствата на скаларното произведение. Нека $\vec{p} = (x, y, z)$. Тъй като $\vec{p} \perp \vec{a}$ и $\vec{p} \perp \vec{b}$, то имаме $\vec{p}\vec{a} = 0$ и $\vec{p}\vec{b} = 0$. От последните две условия получаваме хомогенната система уравнения

$$\left| \begin{array}{l} 4x - 2y - 4z = 0 \\ y + 4z = 0, \end{array} \right.$$

чиито решения са $y = 4x$, $z = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Следователно векторите $\vec{p} = (x, 4x, -x)$ са едновременно перпендикулярни на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отчитайки и условието за дължината на $\vec{p}$, достигаме до уравнението $\sqrt{x^2 + 16x^2 + (-x)^2} = 6\sqrt{2}$ с решения $x = \pm 2$. Така получаваме векторите $\vec{p}_1 = (2, 8, -2)$ и $\vec{p}_2 = (-2, -8, 2)$. Пресмятаме $\vec{p}_1\vec{c} = 8 > 0$ и $\vec{p}_2\,\vec{c} = -8 < 0$. Следователно векторът $\vec{p}_1$ сключва остър ъгъл с

$\vec{c}$, а векторът $\vec{p}_2$ – тъп. Така установихме, че търсеният вектор е $\vec{p} = \vec{p}_1 = (2, 8, -2)$.

Начин 2. При това решение ще използваме и свойствата на векторното произведение. Понеже векторът $\vec{p}$ е ортогонален едновременно на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\vec{p}$ трябва да бъде колинеарен с векторното им произведение $\vec{a} \times \vec{b} = (-4, -16, 4)$. Следователно $\vec{p} = x(-4, -16, 4)$, $x \in \mathbb{R}$. Съгласно условието за дължината на $\vec{p}$, получаваме уравнението $12|x|\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, откъдето намираме $x = \pm\frac{1}{2}$. По-нататък решението продължава като по първия начин.

Задача 9.18. *Намерете вектора $\vec{p}$, който е перпендикулярен на векторите $\vec{a} = (2, -3, 1)$ и $\vec{b} = (6, -2, 3)$, ако скаларното му произведение с вектора $\vec{c} = (1, 2, 7)$ е равно на 13.*

Отговори. $\vec{p} = (-1, 0, 2)$.

Задача 9.19. *Дадени са точките $A(1, -2, 3)$, $B(2, 1, 2)$ и $C(3, 2, 1)$. Намерете вектора $\vec{p}$, колинеарен на височината през върха A в $\triangle\, ABC$, ако е известно, че $|\vec{p}| = 4\sqrt{6}$ и ъгълът между $\vec{p}$ и абсцисната ос е остър.*

Решение. Понеже търсеният вектор $\vec{p}$ е колинеарен на височината през A, то $\vec{p}$ е перпендикулярен на $\overrightarrow{BC} = (1, 1, -1)$. Ще намерим още един вектор, перпендикулярен на $\vec{p}$. Тъй като векторът $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (-2, 0, -2)$ е едновременно перпендикулярен на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, то $\vec{n}$ е перпендикулярен на равнината на $\triangle\, ABC$. Векторът $\vec{p}$ е колинеарен на права от равнината на $\triangle\, ABC$. Следователно $\vec{n} \perp \vec{p}$. Тогава векторът $\vec{p}$ е едновременно перпендикулярен на $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BC}$ и следователно е колинеарен на векторното произведение $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) \times \overrightarrow{BC} = (2, -4, -2)$. Оттук нататък задачата се решава аналогично на предходните две задачи.

Отговори. $\vec{p} = (4, -8, -4)$.

Задача 9.20. *Определете стойностите на реалния параметър λ така, че векторите $\vec{a} = (1, 2, \lambda)$, $\vec{b} = (4, 5, 6)$ и $\vec{c} = (7, 8, \lambda^2)$ да бъдат компланарни.*

Упътване. Използвайте, че $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни, точно когато $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Отговори. $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$.

Задача 9.21. *Намерете лицето на $\triangle\, ABC$ с върхове $A(2, -2, 0)$, $B(4, 0, 1)$ и $C(0, -2, 1)$.*

Решение. Пресмятаме векторното произведение на две насочени отсечки, определени от две от страните на триъгълника, например $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -4, 4)$. Тогава, съгласно формула (9.12), имаме

$$S_{ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Задача 9.22. *Намерете разстоянието от точката* $A(0, -2)$ *до правата, определена от точките* $B(-3, 4)$ *и* $C(1, 1)$.

Решение. Ще решим задачата по два начина. Най-напред ще отбележим, че търсеното разстояние се явява дължината на височината към страната BC в $\triangle\ ABC$.

Начин 1. Ще използваме $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. И така, намираме $\overrightarrow{AB} = (-3, 6)$ и $\overrightarrow{AC} = (1, 3)$. Тъй като $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ лежат в равнината Oxy, то третите им координати са равни на нула, т.е. $\overrightarrow{AB} = (-3, 6, 0)$ и $\overrightarrow{AC} = (1, 3, 0)$. Тогава от (9.11) получаваме $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 0, -15)$. Като използваме формулата за лице на триъгълник (9.12), намираме $S_{ABC} = \frac{15}{2}$. От друга страна, $S_{ABC} = \frac{BC\, h_A}{2}$, където височината h_A е търсеното разстояние. Пресмятаме $\overrightarrow{BC} = (4, -3)$ и $|\overrightarrow{BC}| = 5$. Така достигаме до $\frac{5h_A}{2} = \frac{15}{2}$, откъдето $h_A = 3$.

Начин 2. Тъй като върховете на $\triangle\ ABC$ лежат в равнината Oxy, то можем да използваме формула (9.13). Пресмятаме детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15,$$

откъдето $S_{ABC} = \frac{15}{2}$. Оттук нататък решението е същото като по първия начин.

Задача 9.23. *Даден е тетраедърът* $ABCD$ *с върхове* $A(1, -1, 2)$, $B(2, 3, -1)$, $C(4, 3, -1)$, $D(2, 5, 5)$. *Намерете разстоянието от* D *до равнината на* $\triangle\ ABC$.

Решение. Най-напред ще намерим обема на тетраедъра $ABCD$, като използваме (9.17). За целта намираме координатите на три насочени отсечки, определени от три произволни ръба на тетраедъра, например $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 4, -3)$ и $\overrightarrow{AD} = (1, 6, 3)$. Сега, съгласно (9.16), пресмятаме тяхното смесено произведение $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = -60$. Така от (9.17) получаваме $V_{ABCD} = 10$. От друга страна, от училищния курс знаем, че $V_{ABCD} = \frac{S_{ABC}\, h_D}{3}$, където височината h_D през върха D се явява търсеното разстояние. Пресмятаме $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, -6, -8)$ и съгласно (9.12) намираме $S_{ABC} = 5$. Така достигаме до $\frac{5h_D}{3} = 10$, откъдето $h_D = 6$.

Задача 9.24. *Намерете ортогоналната проекция на* $\vec{c} = (4, -2, 1)$ *върху равнината, определена от* $\vec{a} = (2, -3, -3)$ *и* $\vec{b} = (1, -1, -2)$.

Решение. Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и C' е ортогоналната проекция на C върху равнината α, определена от $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогава $\overrightarrow{OC'}$ е представител на вектора $\vec{c}\,'$, който е ортогоналната проекция на $\vec{c}$ в α. Тъй като $CC' \perp \alpha$, то насочената отсечка $\overrightarrow{CC'}$ е колинеарна с вектора $\vec{a} \times \vec{b} = (3, 1, 1)$, т.е. $\overrightarrow{CC'} = \lambda(3, 1, 1)$. От тъждеството на Шал имаме $\vec{c}\,' = \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CC'} = (3\lambda + 4, \lambda - 2, \lambda + 1)$. Освен това $\vec{c}\,'$ е компланарен с $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следователно, от критерия за компланарност, имаме $\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,' = 0$. От последното условие намираме $\lambda = -1$. Окончателно получаваме $\vec{c}\,' = (1, -3, 0)$.

Задача 9.25. *Нека* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *и* $\vec{d}$ *са произволни вектори. Докажете тъждествата:*

а) $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{b} \times \vec{c})(\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2$;
б) $\vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = (\vec{b}\,\vec{d})(\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b}\,\vec{c})(\vec{a} \times \vec{d})$;
в) $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 + ((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c})^2 = (\vec{a} \times \vec{b})^2 \vec{c}^{\,2}$;
г) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 (\vec{a} \times \vec{c})^2 - [(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{c})]^2 = \vec{a}^{\,2} (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2$;
д) $[\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})][(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}] = -(\vec{a}\vec{c})(\vec{a} \times \vec{b})^2$.

Решение. д) Като използваме последователно формулите за двойно векторно произведение и дистрибутивното свойство на скаларното произведение, получаваме

$$\begin{aligned}
[\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})][(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}] &= -(\vec{a}^{\,2}\vec{b} - (\vec{a}\,\vec{b})\vec{a})((\vec{a}\,\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\,\vec{c})\vec{a}) \\
&= -[\vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}\vec{a}\vec{c} - \vec{a}^{\,2}(\vec{b}\,\vec{c})(\vec{a}\,\vec{b}) - (\vec{a}\vec{b})^2\vec{a}\vec{c} + (\vec{a}\,\vec{b})(\vec{b}\,\vec{c})\vec{a}^{\,2}] \\
&= -\vec{a}\,\vec{c}[\vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2} - (\vec{a}\vec{b})^2] = -\vec{a}\,\vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})^2.
\end{aligned}$$

Упътване. За преобразуване на дясната страна на тъждеството от подточка а) използвайте определението за смесено произведение, за б) – формулите за двойно векторно произведение, а за в) и г) – тъждеството на Лагранж.

9.3. **Приложения в механиката.**

Теорема 9.19 (Работа)**.** *Работата W, която силата $\vec{F}$ извършва за праволинейното преместване на материална точка по посока на вектора $\vec{s}$, е равна на скаларното произведение на силата и вектора на преместването, т.е.*

$$W = \vec{F}\,\vec{s}. \tag{9.18}$$

Теорема 9.20 (Въртящ момент)**.** *Нека твърдо тяло е закрепено в точката A, а в точката B е приложена сила $\vec{F}$. Тогава векторът $\vec{M}$ на въртящия момент на $\vec{F}$ относно точката A се пресмята като векторно произведение на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ и вектора на силата $\vec{F}$, т.е.*

$$\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}. \tag{9.19}$$

Задача 9.26. *Към връх на куб със страна 1 са приложени три сили с големини 1, 2 и 3, като направленията им съвпадат с диагоналите на страните на куба, минаващи през този връх. Намерете големината на равнодействащата на трите сили.*

Решение. Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е произволен куб с дължина на страната 1. За краткост ще означим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. БОНО можем да приемем, че трите сили $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ и $\vec{F_3}$ са приложени към върха A по посока на куба, т.е. са еднопосочно колинеарни с насочените отсечки $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{AD_1}$. Следователно, имаме

$$\begin{aligned} &\vec{F_1} = \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda(\vec{a}+\vec{b}),\ \vec{F_2} = \mu\overrightarrow{AB_1} = \mu(\vec{a}+\vec{c}),\\ &\vec{F_3} = \nu\overrightarrow{AD_1} = \nu(\vec{b}+\vec{c}), \end{aligned} \tag{9.20}$$

където $\lambda, \mu, \nu > 0$. Известно е, че равнодействащата $\vec{F}$ на трите сили е равна на тяхната сума. Тогава, от определението за скаларен квадрат на вектор и свойствата на скаларното произведение, получаваме

$$\vec{F}^{\,2} = (\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3})^2 = \vec{F_1}^2+\vec{F_2}^2+\vec{F_3}^2+2(\vec{F_1}\vec{F_2}+\vec{F_1}\vec{F_3}+\vec{F_2}\vec{F_3}). \tag{9.21}$$

Очевидно, за да намерим $|\vec{F}|$, е необходимо да пресметнем найдесния израз в (9.21). Като се има предвид, че $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1$ и $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c} = 0$, от свойствата на скаларното произведение и

(9.20), получаваме

$$\begin{aligned}
&\vec{F}_1^2 = \lambda^2(\vec{a}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^2) = 2\lambda^2, \quad \vec{F}_2^2 = 2\mu^2, \quad \vec{F}_2^2 = 2\nu^2 \\
&\vec{F}_1\vec{F}_2 = \lambda\mu(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{c}) = \lambda\mu(\vec{a}^2 + \vec{a}\,\vec{c} + \vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c}) = \lambda\mu \\
&\vec{F}_1\vec{F}_3 = \lambda\nu, \quad \vec{F}_2\vec{F}_3 = \mu\nu. \qquad (9.22)
\end{aligned}$$

От друга страна, по условие имаме

$$|\vec{F}_1| = \sqrt{\vec{F}_1^2} = 1, \quad |\vec{F}_2| = \sqrt{\vec{F}_2^2} = 2 \quad \text{и} \quad |\vec{F}_3| = \sqrt{\vec{F}_3^2} = 3,$$

т.е. $\vec{F}_1^2 = 1$, $\vec{F}_2^2 = 4$, $\vec{F}_3^2 = 9$. Оттук и от първия ред на (9.22) намираме стойностите на коефициентите на колинеарност $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mu = \sqrt{2}$, $\nu = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Следователно $\vec{F}_1\vec{F}_2 = 1$, $\vec{F}_1\vec{F}_3 = \frac{3}{2}$ и $\vec{F}_2\vec{F}_3 = 3$. Така, като заместим в (9.21), получаваме $\vec{F}^2 = 25$, т.е. $|\vec{F}| = 5$.

Задача 9.27. *Дадени са сили $\vec{F}_1 = (3, 4, -2)$ и $\vec{F}_2 = (2, -3, 5)$, приложени в една точка. Определете каква работа ще извърши равнодействащата на тези сили $\vec{F}$, ако нейната приложна точка се движи праволинейно от $A(5, -3, -4)$ до $B(4, -1, 1)$.*

Решение. Намираме равнодействащата сила $\vec{F}$ на силите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ чрез $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (5, 1, 3)$. Намираме и координатите на насочената отсечка $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 5)$, която е представител на вектора на преместването от A до B. Тогава, съгласно (9.18), за работата, извършена от силата $\vec{F}$, пресмятаме $W = \vec{F}\,\overrightarrow{AB} = 12$.

Задача 9.28. *Определете работата, която ще извърши силата $\vec{F} = (3, -2, -5)$, ако приложната ѝ точка се движи праволинейно от $A(2, -3, 5)$ до $B(3, -2, -1)$.*

Отговори. $W = 31$.

Задача 9.29. *Дадени са силите $\vec{F}_1 = (2, -1, -3)$, $\vec{F}_2 = (3, 2, -1)$ и $\vec{F}_3 = (-4, 1, 3)$ и приложна точка $B(-1, 4, -2)$. Намерете големината на въртящия момент $\vec{M}$ на равнодействащата сила $\vec{F}$ на трите сили относно точката $A(2, 3, -1)$.*

Решение. Векторът на равнодействащата сила $\vec{F}$ на трите сили е $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1, 2, -1)$, а $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, -1)$. Тогава, като вземем предвид формула (9.19), за момента $\vec{M}$ на силата $\vec{F}$ относно A пресмятаме $\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = (1, -4, -7)$. Следователно големината на момента е $|\vec{M}| = \sqrt{66}$.

Задача 9.30. *Нека силата* $\vec{F} = (3, 2, -4)$ *е приложена в точката* $A(2, -1, 1)$. *Намерете големината на момента* $\vec{M}$ *на* $\vec{F}$ *относно координатното начало.*

Упътване. Тъй като $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = (2, 11, 7)$, то $|\vec{M}| = \sqrt{174}$.

10. Собствени стойности и собствени вектори

Ако искаш да бъдеш физик, трябва да направиш три неща – първо, учи математика, второ, учи още математика, и трето, прави същото.

Арнолд Зомерфелд

Определение 10.1. Нека A е квадратна матрица от n-ти ред, X е ненулев вектор от $\mathbb{K}^n$ и $\lambda \in \mathbb{K}$, за които е изпълнено равенството

$$AX = \lambda X. \tag{10.1}$$

Тогава λ се нарича *собствена стойност* на A, а X се нарича *собствен вектор* на A, съответстващ на собствената стойност λ.

Теорема 10.1. *Нека $A, E \in M_n(\mathbb{K})$. Тогава собствените стойности $\lambda_i \in \mathbb{K}$ на матрицата A са корени на уравнението*

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{10.2}$$

Забележка 10.1. Уравнение (10.2) се нарича *характеристично уравнение* на матрицата A, полиномът $\varphi(\lambda) = |A-\lambda E|$ – *характеристичен полином*, а собствените стойности – *характеристични корени*.

Определение 10.2. Множеството от всички собствени стойности (характеристични корени) на матрица A се нарича *спектър* на A.

Забележка 10.2. Ако всички характеристични корени на матрица A са прости, то казваме, че A има *прост спектър*.

Теорема 10.2. *Нека $A, E \in M_n(\mathbb{K})$. Тогава собствените вектори $X \in \mathbb{K}^n$ на A, съответстващи на собствената стойност λ, са ненулевите решения на системата хомогенни линейни уравнения*

$$(A - \lambda E)X = \mathbf{0}. \tag{10.3}$$

Забележка 10.3. Множеството от всички собствени вектори, съответстващи на дадена собствена стойност на $A \in M_n(\mathbb{K})$, заедно с нулевия вектор $\mathbf{0}$ образуват линейно пространство.

Определение 10.3. Матриците A и B от $M_n(\mathbb{K})$ се наричат *подобни*, ако съществува матрица $T \in M_n(\mathbb{K})$ такава, че $B = T^{-1}AT$.

Забележка 10.4. Множеството на подобните матрици е подмножество на множеството на еквивалентните матрици в $M_n(\mathbb{K})$, т.е. ако две матрици са подобни, то те са еквивалентни, но обратното невинаги е вярно.

Теорема 10.3. *Ако матриците A и B са подобни, то те притежават еднакви характеристични полиноми.*

Определение 10.4. Матрицата $A \in M_n(\mathbb{K})$ се нарича *диагонализируема*, ако е подобна на диагонална матрица.

Забележка 10.5. Ако $A \in M_n(\mathbb{K})$ е диагонализируема, то тя е подобна на диагонална матрица, чийто главен диагонал е образуван от собствените стойности на A.

Теорема 10.4. *Матрицата $A \in M_n(\mathbb{K})$ е диагонализируема, точно когато на всяка нейна собствена стойност λ_i с кратност k_i съответстват k_i на брой линейно независими собствени вектора.*

Забележка 10.6. Тъй като собствените вектори, съответстващи на различни собствени стойности, са линейно независими помежду си, то горното твърдение означава, че $A \in M_n(\mathbb{K})$ е диагонализируема, точно когато притежава n на брой линейно независими собствени вектора.

Теорема 10.5. *Ако матрицата $A \in M_n(\mathbb{R})$ има прост спектър от реални числа, то тя е диагонализируема.*

Определение 10.5. Матрицата $A \in M_n(\mathbb{R})$ се нарича *симетрична*, ако съвпада с транспонираната си матрица A^T.

Теорема 10.6. *Собствените стойности на симетрична матрица са реални числа.*

Теорема 10.7. *Всяка симетрична матрица може да се приведе в диагонален вид.*

Забележка 10.7. Ако $A \in M_n(\mathbb{R})$ е симетрична матрица, то собствените вектори, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални помежду си.

Задача 10.1. *Да се намерят собствените стойности и собствените вектори на матриците:*

а) $A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; *б)* $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; *г)* $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$;

д) $A_5 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; *е)* $A_6 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 2 \\ -8 & -3 & 4 \\ -9 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

ж) $A_7 = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; *з)* $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

и) $A_9 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$; *к)* $A_{10} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

л) $A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; *м)* $A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Съгласно Теорема 10.1, характеристичното уравнение на A_1 е

$$|A_1 - \lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

което е еквивалентно на $\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$. Следователно собствените стойности на A_1 са $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 5$.

Нека $X_1 = (x_1, y_1)$ е собствен вектор, съответстващ на $\lambda_1 = 4$. Тогава, съгласно Теорема 10.2, имаме

$$\begin{pmatrix} 6-4 & -1 \\ 2 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Горното матрично уравнение е еквивалентно на $2x_1 - y_1 = 0$, чието общо решение е $(p, 2p)$. Следователно $X_1 = (p, 2p)$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Аналогично, ако $X_2 = (x_2, y_2)$ е собствен вектор, съответстващ на $\lambda_2 = 5$, намираме $X_2 = (p, p)$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

в) Съгласно Теорема 10.1, характеристичното уравнение на A_3 е

$$|A_3 - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

което е еквивалентно на уравнението $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$. Решенията на това уравнение, т.е. собствените стойности на A_3, са $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Нека $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ е собствен вектор, съответстващ на $\lambda_1 = 1$. Тогава, съгласно Теорема 10.2, получаваме

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 1 & -1 \\ 1 & 1+1 & 1 \\ -1 & 1 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Това матрично уравнение е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + y_1 - z_1 = 0 \\ x_1 + 2y_1 + z_1 = 0 \\ -x_1 + y_1 + 2z_1 = 0 \end{array} \right. ,$$

която е неопределена и има общо решение $(p, -p, p)$. Следователно собствените вектори, съответстващи на тази собствена стойност, имат вида $X_1 = (p, -p, p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Аналогично, ако $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ е собствен вектор, съответстващ на собствената стойност $\lambda_{2,3} = 2$, то получаваме матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

от което получаваме $x_2 - y_2 + z_2 = 0$. Следователно $X_2 = (p, q, q-p)$, където $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Отговори. б) $\lambda_1 = 0$, $X_1 = (2p, p)$, $\lambda_2 = 5$, $X_2 = (p, -2p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

г) $\lambda_1 = -3$, $X_1 = (3p, p, -10p)$, $\lambda_2 = 2$, $X_2 = (2p, -p, 0)$, $\lambda_3 = 4$, $X_3 = (2p, 3p, -2p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

д) $\lambda_1 = 1$, $X_1 = (p, 2p, p)$, $\lambda_2 = 2$, $X_2 = (p, p, 0)$, $\lambda_3 = 3$, $X_3 = (p, 2p, 2p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

е) $\lambda_1 = -1$, $X_1 = (p, 2p, 3p)$, $\lambda_2 = -2$, $X_2 = (2p, 4p, 5p)$, $\lambda_3 = -3$, $X_3 = (3p, 5p, 6p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

ж) $\lambda_1 = 1$, $X_1 = (2p, p, p)$, $\lambda_2 = 2$, $X_2 = (p, p, 0)$, $\lambda_3 = 3$, $X_3 = (2p, p, 2p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

з) $\lambda_1 = -1$, $X_1 = (p, 0, -p)$, $\lambda_2 = 1$, $X_2 = (p, 2p, -p)$, $\lambda_3 = 2$, $X_3 = (p, -3p, 2p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

и) $\lambda_1 = 1$, $X_1 = (2p, -p, -p)$, $\lambda_2 = i$, $X_2 = \left(\frac{2i-1}{2}p, \frac{1-i}{2}p, p\right)$, $\lambda_3 = -i$, $X_3 = \left(-\frac{2i+1}{2}p, \frac{1+i}{2}p, p\right)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

к) $\lambda_1 = 3$, $X_1 = (9p, 4p, 3p)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $X_2 = (p, -4p, -p)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

л) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$, $X_{1,2,3,4} = (q-p, q-p, p, q)$, където $p, q \in \mathbb{R}$, $(p,q) \neq (0,0)$;

м) $\lambda_1 = 0$, $X_1 = (0, p, 0, 0)$, където $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, $X_{2,3,4} = (p, 2q, q, 0)$, където $p, q \in \mathbb{R}$, $(p,q) \neq (0,0)$.

Задача 10.2. *Да се намерят диагонални матрици $B_4 - B_8$, подобни съответно на матриците $A_4 - A_8$ от Задача 10.1, и матрици T_i $(i = 4, \ldots, 8)$ такива, че $B_i = T_i^{-1} A_i T_i$.*

Решение. От Задача 10.1 знаем, че собствените стойности на A_4 са $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 4$, т.е. A_4 притежава прост спектър от реални числа. Тогава от Теорема 10.5 следва, че A_4 може да се диагонализира, а от Забележка 10.5 следва, че матрицата

$$B_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

е подобна на A_4.

От друга страна, тъй като $A_4 \in M_3(\mathbb{R})$ има прост спектър, то съществува база $\hat{e} \in \mathbb{R}^3$, която се състои от собствени вектори на A_4. Една тройка собствени вектори на A_4 са $(3, 1, -10)$, $(2, -1, 0)$ и $(2, 3, -2)$ (вж. Задача 10.1, отг. г) за $p = 1$). Това означава, че матрицата на прехода от стандартната база $e = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ на $\mathbb{R}^3$ към базата $\hat{e}$ е

$$T_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -10 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отговори.

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Уравнения на права и окръжност в равнина

Чистата математика е поезия от логически идеи.

Алберт Айнщайн

11.1. Уравнения на права в равнина.

Нека в равнината Oxy относно произволна координатна система са дадени точката $M_0(x_0, y_0)$ и ненулевият вектор $\vec{p}$. Разглеждаме множеството от точки $M(x, y)$ в Oxy, за които векторите $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ са колинеарни, т.е.

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p},$$

където $\lambda \in \mathbb{R}$. Това множество представлява *права линия* (*права*), която означаваме с g. Ще покажем различни начини за задаване на уравнението на g.

Определение 11.1. Нека $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ са съответно радиус-векторите на точките M и M_0 и векторът $\vec{p}$ е колинеарен с $\overrightarrow{M_0M}$. Тогава уравнението

$$g\colon \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{p} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{11.1}$$

се нарича *векторно параметрично уравнение* на правата g, минаваща през точките M и M_0. Точките M_0 и M се наричат съответно *фиксирана* и *текуща точка*, векторът $\vec{p}$ се нарича *направляващ вектор* на правата, а числото λ се нарича *параметър* на правата.

Определение 11.2. Нека $\vec{p} = (a, b)$ е колинеарен вектор на правата g, $M_0(x_0, y_0) \in g$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава уравненията

$$g : \left| \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{array} \right. \tag{11.2}$$

се наричат *скаларно параметрични уравнения* на g.

Определение 11.3. Нека $\vec{p} = (a, b)$ е колинеарен вектор на правата g и $M_0(x_0, y_0) \in g$. Тогава

$$g : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \tag{11.3}$$

се нарича *канонично уравнение* на g.

Определение 11.4. Нека $\vec{p} = (a, b)$ е колинеарен вектор на правата g и $M_0(x_0, y_0) \in g$. Тогава

$$g:\ Ax + By + C = 0, \tag{11.4}$$

където $A = b$, $B = -a$, $C = ay_0 - bx_0$, се нарича *общо уравнение* на g. Векторът $\overrightarrow{N} = (A, B)$ и всеки вектор, колинеарен с $\overrightarrow{N}$, се нарича *нормален вектор* на g.

Забележка 11.1. Уравнението

$$g:\ A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{11.5}$$

е уравнение на правата g, построена през фиксираната точка M_0 с нормален вектор $\overrightarrow{N} = (A, B)$.

Забележка 11.2. Ако относно ортонормирана координатна система в равнината правата g има направляващ вектор $\vec{p} = (a, b)$, то векторите, колинеарни с $(b, -a)$, са перпендикулярни на направлението на правата, т.е. са нормални вектори за правата. Обратно, ако $\overrightarrow{N} = (A, B)$ е нормален вектор на g, то векторите, колинеарни с $(B, -A)$, са направляващи за g.

Определение 11.5. Относно ортонормирана КС уравнението

$$g:\ y = kx + n, \tag{11.6}$$

получено от (11.4) чрез преобразуване и въвеждане на означенията $k = -\frac{A}{B}$ и $n = -\frac{C}{B}$ $(B \neq 0)$, се нарича *декартово уравнение* на правата g. Реалното число k се нарича *ъглов коефициент* на g и се пресмята по формулата $k = \mathrm{tg}\alpha$, където α е ъгълът, който правата сключва с положителната посока на оста Ox. Числото n се нарича *отрез* на правата g от оста Oy.

Забележка 11.3. От условието $B \neq 0$ следва, че правите, успоредни на Oy (както и Oy), нямат декартови уравнения.

Теорема 11.1. *Относно ортонормирана КС* декартовото уравнение *на правата g през точката $M_0(x_0, y_0)$ с ъглов коефициент k се определя от*

$$g:\ y = k(x - x_0) + y_0. \tag{11.7}$$

Теорема 11.2. *Нека $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ са две различни точки. Тогава скаларно параметричните и каноничното уравнение на правата g, минаваща през M_1 и M_2, се определят съответно от*

$$g:\ \left|\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{array}\right. , \qquad g:\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{11.8}$$

Определение 11.6. Уравнението
$$g:\ \frac{x}{c}+\frac{y}{d}=1, \tag{11.9}$$
където $c, d \neq 0$, се нарича *отрезово уравнение* на правата g. Реалните числа c и d се наричат *отрези* на g съответно от оста Ox и Oy.

Забележка 11.4. Правата с уравнение (11.9) пресича координатните оси Ox и Oy съответно в точки $M_1(c, 0)$ и $M_2(0, d)$.

Теорема 11.3 (Положения на права относно КС)**.** *Нека относно ортонормирана КС е дадена правата $g:\ Ax+By+C=0$. Тогава:*

1) Правата g минава през координатното начало $O(0,0)$, точно когато $C=0$, т.е. има общо уравнение от вида $Ax+By=0$.

2) Правата g е успоредна на Ox, точно когато $A=0$, т.е. има общо уравнение от вида $By+C=0$. Ако $M_0(x_0, y_0)$ е една фиксирана точка от g, то уравнението на правата може да се запише във вида
$$g:\ y=y_0. \tag{11.10}$$

3) Правата g е успоредна на Oy, точно когато $B=0$, т.е. има общо уравнение от вида $Ax+C=0$. Ако $M_0(x_0, y_0)$ е една фиксирана точка от g, то уравнението на правата може да се запише във вида
$$g:\ x=x_0. \tag{11.11}$$

Забележка 11.5. Абсцисната ос Ox има общо уравнение $y=0$, а ординатната ос Oy има общо уравнение $x=0$.

Взаимно положение на две прави в една равнина

Теорема 11.4. *Нека относно ортонормирана координатна система са дадени правите*
$$g_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{и} \quad g_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0.$$
Тогава:

1) Правите g_1 и g_2 съвпадат, точно когато $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

2) Правите g_1 и g_2 са успоредни, точно когато $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

3) Правите g_1 и g_2 се пресичат, точно когато $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$.

Теорема 11.5. *Нека относно ортонормирана координатна система са дадени правите $g_1:\ y=k_1x+n_1$ и $g_2:\ y=k_2x+n_2$. Тогава:*

1) Правите g_1 и g_2 са взаимно перпендикулярни, точно когато $k_1k_2=-1$.

2) Правите g_1 *и* g_2 *са успоредни, точно когато* $k_1 = k_2$ *и* $n_1 \neq n_2$.

Теорема 11.6. *Ако правите* g_1 *и* g_2 *имат ъглови коефициенти съответно* k_1 *и* k_2, *то ъглите между тях се получават чрез*

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}, \qquad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{11.12}$$

Определение 11.7 (Сноп прави в равнина). Съвкупността от всички прави, които лежат в една равнина и минават през една точка S, се нарича *сноп прави*, а точката S се нарича *център на снопа*.

Теорема 11.7. *Нека* $g_1 : A_1x+B_1y+C_1 = 0$ *и* $g_2 : A_2x+B_2y+C_2 = 0$ *са две прави от сноп с център точката* S. *Тогава всяка права от този сноп има уравнение от вида*

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{11.13}$$

където $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Теорема 11.8 (Разстояние от точка до права)**.** *Нека относно ортонормирана координатна система са дадени правата* $g : Ax + By + C = 0$ *и точката* $M(x_0, y_0)$. *Тогава ориентираното разстояние* $\delta(M, g)$ *и абсолютното разстояние* $d(M, g)$ *от точката* M *до правата* g *се пресмятат съответно чрез формулите:*

$$\delta(M, g) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{11.14}$$

и $d(M, g) = |\delta(M, g)|$, *т.е.*

$$d(M, g) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{11.15}$$

Забележка 11.6. Точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ се намират в една и съща полуравнина относно правата g, ако числата $g(M_1) = Ax_1 + By_1 + C$ и $g(M_2) = Ax_2 + By_2 + C$ са с еднакви знаци, и в различни полуравнини относно g, ако $g(M_1)$ и $g(M_2)$ са с противоположни знаци.

Теорема 11.9 (Уравнение на ъглополовяща)**.** *Ъглополовящите* l_1 *и* l_2 *на двата ъгъла, получени при пресичането на две прави* $g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* $g_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, *се определят от уравненията*

$$l_{1,2} : \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{11.16}$$

Забележка 11.7. Знакът „+“ в уравненията (13.10) се отнася за ъглополовящата на ъгъла, съдържащ точките, чиито ориентирани разстояния до двете прави са с еднакви знаци, а знакът „$-$“ за ъглополовящата на ъгъла, съдържащ точките, чиито ориентирани разстояния до двете прави са с противоположни знаци.

Ако не е указано друго, в следващите задачи ще считаме координатната система за дясна ортонормирана.

Задача 11.1. *Намерете общото уравнение на правата g, която минава през точката $M(2,-1)$ и*

а) *точката $N(3,1)$;*
б) *е успоредна на Ox (съответно Oy);*
в) *е успоредна на правата $l : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2}$;*
г) *е успоредна на правата $m : x - 3y + 10 = 0$;*
д) *е перпендикулярна на правата $p : 5x + 3y - 4 = 0$;*
е) *сключва ъгъл от 135° с положителната посока на Ox;*
ж) *отсича от положителните посоки на координатните оси отрези с равни дължини.*

Решение. а) Като заместим координатите на точките M и N в (11.8), получаваме каноничното уравнение

$$g : \frac{x-2}{3-2} = \frac{y-(-1)}{1-(-1)} \quad \Rightarrow \quad g : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2}. \tag{11.17}$$

След освобождаване от знаменателите в последното уравнение и преобразуване достигаме до общото уравнение $g : 2x-y-5 = 0$. Ще отбележим, че същият резултат се получава и в случай че разменим местата на точките M и N в (11.17).

б) За правите през M, успоредни на двете координатни оси Ox и Oy, можем да използваме съответно формулите (11.10) и (11.11). Така получаваме $y = -1$ и $x = 2$. Оттук получаваме общите уравнения $y + 1 = 0$ и $x - 2 = 0$.

в) Тъй като успоредните помежду си прави имат колинеарни направляващи вектори, то направляващият вектор $\vec{p} = (3, -2)$ на дадената права l ще бъде направляващ вектор и за търсената права g. Следователно, като имаме предвид, че $M(2, -1) \in g$, от (11.3) получаваме

$$g : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} \quad \Rightarrow \quad g : 2x + 3y - 1 = 0.$$

г) Успоредните прави имат колинеарни нормални вектори. Следователно нормалният вектор $\overrightarrow{N}_m = (1, -3)$ на правата m е нормален вектор и за търсената права. Можем да постъпим по два начина.

Начин 1. Заместваме координатите на нормалния вектор $\overrightarrow{N}_g = (1, -3)$ на g и на фиксираната точка $M(2, -1)$ в уравнението (11.5), откъдето получаваме

$$g:\ 1(x-2) - 3(y+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad g:\ x - 3y - 5 = 0. \tag{11.18}$$

Начин 2. Най-напред заместваме координатите на нормалния вектор $\overrightarrow{N}_g = (1, -3)$ в (11.4), откъдето следва че общото уравнение на търсената права е от вида

$$g:\ x - 3y + C = 0, \tag{11.19}$$

където C е неизвестна константа. Определяме C от условието, че g минава през точката $M(2, -1)$, като заместим координатите на M в (11.19). Така получаваме уравнението $2 - 3(-1) + C = 0$, чието решение е $C = -5$. Накрая заместваме намерената стойност за C в (11.19) и отново достигаме до крайния резултат в (11.18).

д) Тъй като правите g и p са взаимно перпендикулярни, нормалният вектор $\overrightarrow{N}_p = (5, 3)$ на p е направляващ вектор за g. Тогава, съгласно (11.3), получаваме

$$g:\ \frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{3} \quad \Rightarrow \quad g:\ 3x - 5y - 11 = 0.$$

Задачата може да бъде решена и аналогично на подточка г), като използваме, че нормалните вектори на две перпендикулярни прави са взаимно перпендикулярни. Тогава, тъй като нормалният вектор на p е $\overrightarrow{N}_p = (5, 3)$, то векторът $\overrightarrow{N}_g = (3, -5)$ е нормален за g.

е) В декартовото уравнение (11.6) заместваме първоначално ъгловия коефициент $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$ на g и получаваме

$$g:\ y = -x + n.$$

След това отчитаме, че $M(2, -1)$ лежи върху g и следователно координатите ѝ удовлетворяват горното уравнение, т.е. $-1 = -2 + n$, откъдето намираме $n = 1$. Тогава декартовото уравнение на търсената права е $g:\ y = -x + 1$ и следователно за общото ѝ уравнение получаваме $g:\ x + y - 1 = 0$.

ж) Тъй като по условие отрезите на правата g от Ox и Oy са равни и положителни ($c = d > 0$), то съгласно (11.9) отрезовото уравнение на g има вида

$$g:\ \frac{x}{c}+\frac{y}{c}=1 \quad\Rightarrow\quad g:\ x+y=c.$$

Стойността на константата c намираме, като заместим координатите на точката $M(2,-1)$ в уравнението на g. Така получаваме $c=1$. Следователно общото уравнение на тази права е $g:\ x+y-1=0$.

Задача 11.2. *Намерете пресечните точки на правата $l:\ 2x-5y-10=0$ с координатните оси и през тези точки прекарайте прави, перпендикулярни на l.*

Решение. Пресечната точка на правата l и абсцисната ос Ox е точката A, чиито координати са решение на системата от уравненията на двете прави, т.е.

$$\left|\begin{array}{l} 2x-5y-10=0 \\ y=0. \end{array}\right.$$

Така получаваме $A(5,0)$. Аналогично, пресечната точка B на l и ординатната ос Oy е решението на системата

$$\left|\begin{array}{l} 2x-5y-10=0 \\ x=0, \end{array}\right.$$

откъдето намираме $B(0,-2)$. По-нататък задачата се решава аналогично на Задача 11.1 д).

Друг начин, по който лесно могат да бъдат получени координатите на пресечните точки на правата с координатните оси, е като от общото уравнение на правата получим отрезовото ѝ уравнение, т.е. уравнение от вида (11.9)

$$l:\ 2x-5y-10=0 \quad\Rightarrow\quad l:\ \frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1.$$

Тогава отрезите на l от Ox и Oy са съответно $c=5$ и $d=-2$. Съгласно Забележка 11.4, се вижда, че правата l пресича Ox и Oy в намерените по-горе точки A и B.

Отговори. $5x+2y-25=0$; $5x+2y+4=0$.

Задача 11.3. *Намерете стойностите на $a,b\in\mathbb{R}$, за които правите $g:\ ax-2y+1=0$ и $l:\ 6x-4y+b=0$: а) съвпадат; б) са успоредни; в) се пресичат; г) са перпендикулярни.*

Решение. Съгласно Теорема 11.4, е известно, че:

а) g и l съвпадат, точно когато

$$\frac{a}{6}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{b}.$$

Използвайки свойствата на пропорциите, от горните равенства намираме $a = 3$, $b = 2$.

б) g и l са успоредни, точно когато

$$\frac{a}{6} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad a = 3, \quad b \neq 2.$$

в) g и l се пресичат, точно когато

$$\frac{a}{6} \neq \frac{-2}{-4} \quad \Rightarrow \quad a \neq 3, \quad b \in \mathbb{R}.$$

г) Нормалните вектори на двете прави са $\overrightarrow{N}_g(a, -2)$ и $\overrightarrow{N}_l(6, -4)$. Правите g и l се перпендикулярни, точно когато $\overrightarrow{N}_g \perp \overrightarrow{N}_l$, т.е. точно когато $\overrightarrow{N}_g \overrightarrow{N}_l = 0$. От последното условие получаваме $6a + 8 = 0$. Следователно $a = -\frac{4}{3}$ ($b \in \mathbb{R}$).

Задача 11.4. *Дадени са правата $g : 3x - y - 11 = 0$ и точката $A(1, 2)$. Намерете:*

а) точката A' – ортогонално симетрична на A относно g;
б) правата g' – симетрична на g относно A;
в) точката P от g, която е равноотдалечена от точките A и $B(0, -1)$;
г) точка Q от g, която е равноотдалечена от точката A и правата $l : x - y - 7 = 0$.

Решение. а) Точката A' е ортогонално симетрична на A относно правата g, ако A' е образът на A при осева симетрия относно g, т.е. ако отсечката AA' е перпендикулярна на g и се разполовява от нея. Тогава за намирането на A' можем да приложим следните стъпки:

Стъпка 1. Построяваме права p през A, която е перпендикулярна на g. Аналогично на Зад. 11.1 д), получаваме $p : x + 3y - 7 = 0$.

Стъпка 2. Намираме пресечната точка M на правите g и p, като решим системата

$$\left| \begin{array}{l} x + 3y - 7 = 0 \\ 3x - y - 11 = 0. \end{array} \right.$$

Така получаваме $M(4, 1)$.

Стъпка 3. Отчитайки, че M е средата на отсечката AA', съгласно формула (7.7), пресмятаме $A' = 2M - A = 2(4, 1) - (1, 2) = (7, 0)$.

б) Правите g и g' са симетрични относно точката A, ако са успоредни помежду си и са на равни разстояния от A. От условието за успоредност на g и g' за общото уравнение на g' получаваме

$g' : 3x - y + C = 0$. Остава да намерим свободния член C. От условието за равноотдалеченост на двете прави от точка A следва, че ориентираните разстояния от A до g и от A до g' ще се различават само по знак. Съгласно (11.14) пресмятаме

$$\delta(A, g) = \frac{3.1 - 2 - 11}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{-10}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10}.$$

Следователно $\delta(A, g') = \sqrt{10}$. Отново чрез (11.14) намираме

$$\delta(A, g') = \frac{3.1 - 2 + C}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{C + 1}{\sqrt{10}}.$$

Така достигаме до уравнението $C + 1 = 10$, откъдето $C = 9$ и следователно $g' : 3x - y + 9 = 0$.

в) От уравнението на правата g изразяваме едната от двете променливи, например y, и получаваме

$$y = 3x - 11. \tag{11.20}$$

Тъй като търсената точка P лежи върху g, то нейните координати удовлетворяват уравнението на g и следователно зависимостта (11.20). Тогава координатите на тази точка са $P(x_0, 3x_0 - 11)$, където $x_0 \in \mathbb{R}$ е търсената неизвестна. Пресмятаме координатите на насочените отсечки $\overrightarrow{AP} = (x_0 - 1, 3x_0 - 13)$ и $\overrightarrow{BP} = (x_0, 3x_0 - 10)$. Условието точка P да бъде равноотдалечена от A и B е равносилно на

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (3x_0 - 13)^2} = \sqrt{x_0^2 + (3x_0 - 10)^2}.$$

Единственото решение на последното уравнение е $x_0 = \frac{7}{2}$. Следователно $P(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$.

г) Както в подточка в), търсената точка от g се определя от $Q(x_0, 3x_0 - 11)$. Тогава $\overrightarrow{AQ} = (x_0 - 1, 3x_0 - 13)$. Като използваме формулата (11.15) за разстоянието от Q до правата l, пресмятаме

$$d(Q, l) = \frac{|x_0 - 3x_0 + 11 - 7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 2x_0|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(4 - 2x_0)^2}}{\sqrt{2}}.$$

Тогава трябва да намерим онази стойност на x_0, за която $|\overrightarrow{AQ}| = d(Q, l)$, т.е. да решим уравнението

$$\sqrt{(x_0 - 1)^2 + (3x_0 - 13)^2} = \frac{\sqrt{(4 - 2x_0)^2}}{\sqrt{2}}.$$

Решение на последното уравнение е $x_0 = \frac{9}{2}$, което означава, че търсената точка е $Q(\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$.

Задача 11.5. *Дадени са правата* $l : 3x + 4y - 5 = 0$ *и точката* $A(6, 3)$. *Намерете:*

а) *ортогонално симетричната точка* A' *на* A *относно* l;
б) *права* g, *успоредна на* l, *която е на разстояние* $\frac{1}{5}$ *от* l;
в) *права* p, *перпендикулярна на* l, *която е на разстояние* 3 *от* A.

Решение. б) Тъй като g е успоредна на l, то g има общо уравнение от вида $g : 3x + 4y + C = 0$. Избираме произволна точка от l, например точката $M(3, -1)$. Тогава за разстоянието от M до g знаем, че $d(M, g) = \frac{1}{5}$. От друга страна, съгласно (11.15), пресмятаме

$$d(M, g) = \frac{|3.3 - 4.1 + C|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|C + 5|}{5}.$$

Като вземем предвид равенствата за $d(M, g)$, достигаме до уравнението $|C + 5| = 1$, чиито решения са $C_1 = -4$ и $C_2 = -6$. Следователно двете прави, удовлетворяващи условието на задачата, са $g_1 : 3x + 4y - 4 = 0$ и $g_2 : 3x + 4y - 6 = 0$.

в) От условието $p \perp l$ следва, че общото уравнение на p е от вида $p : 4x - 3y + C = 0$. Съгласно (11.15), намираме

$$d(A, p) = \frac{|4.6 - 3.3 + C|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|C + 15|}{5}.$$

Следователно, като вземем предвид условието, $\frac{|C+15|}{5} = 3$. Решенията на последното уравнение са $C_1 = 0$ и $C_2 = -30$. Така намираме двете прави $p_1 : 4x - 3y = 0$ и $p_2 : 4x - 3y - 30 = 0$.

Отговори. а) $A'(0, -5)$.

Задача 11.6. *Намерете уравнението на правите* l, *минаващи през точка* $M(-1, 2)$ *и сключващи ъгъл* 45° *с правата* $g : x - 3y + 2 = 0$.

Решение. Декартовото уравнение на правата g има вида $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Следователно ъгловият коефициент на тази права е $k_g = \frac{1}{3}$. От друга страна, съгласно (11.7), декартовото уравнение на права l, минаваща през точката M, е $l\colon y = k(x+1)+2$, където k е неизвестният ъглов коефициент на l. Съгласно формула (11.12) и условието на задачата, за ъгла между g и l имаме

$$\operatorname{tg} \sphericalangle(g, l) = \pm \frac{k - \frac{1}{3}}{1 + \frac{k}{3}} = 1.$$

Решавайки двете уравнения за k, намираме $k_1 = 2$ и $k_2 = -\frac{1}{2}$. Следователно правите, удовлетворяващи условието на задачата, са $l_1\colon 2x - y + 4 = 0$ и $l_2\colon x + 2y - 3 = 0$.

Задача 11.7. *Светлинен лъч, пуснат от точката* $A(1,1)$*, след отразяването си от правата* $a: x-y-2=0$*, става успореден на правата* $b: 3x-y+5=0$*. Намерете уравненията на правите* l *и* l'*, съдържащи съответно падащия и отразения лъч.*

Решение. От оптиката е известно, че ъгълът на падане е равен на ъгъла на отразяване (правите l и l' сключват равни ъгли с правата a). Следователно ортогонално симетричните точки на точките от l относно правата a ще лежат върху l' и обратно. Означаваме с A' ортогонално симетричната точка на A относно a и като използваме Задача 11.5 а), намираме $A'(3,-1)$. Тогава построяваме правата l' през точката A' и успоредна на правата b. Така получаваме $l': 3x-y-10=0$. След това намираме координатите на точката на падане (отразяване) P като пресечна точка на правите a и l'. Решавайки системата от техните уравнения, получаваме $P(4,2)$. Правата l също минава през тази точка. Тогава построяваме уравнението на l през точките A и P. Така намираме $l: x-3y+2=0$.

Задача 11.8. *Светлинен лъч, насочен по правата* $l: 2x-3y-12=0$*, се отразява от оста* Ox*. Намерете уравнението на правата, съдържаща отразения лъч.*

Упътване. Намерете пресечната точка A на l и Ox. Изберете произволна точка B от l, различна от A, и намерете ортогонално симетричната ѝ точка B' относно Ox. Тогава l' минава през A и B'.

Отговори. $l': 2x+3y-12=0$.

Задача 11.9. *Намерете уравнението на права, отсичаща от положителните посоки на координатните оси отрези, чиито дължини се отнасят, както* $1:2$*, ако лицето на триъгълника, който правата образува при пресичането си с осите, е* 36*.*

Решение. Съгласно условието на задачата, ако $a>0$ е отрезът от положителната посока на оста Ox, то отрезът от Oy е $2a$. Следователно отрезовото уравнение на търсената права има вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1 \quad \Rightarrow \quad 2x+y-2a=0.$$

Триъгълникът, който правата загражда при пресичането си с координатните оси, е правоъгълен и катетите му имат дължини, равни на дължините на съответните отрези, т.е. a и $2a$. Тогава за лицето на този триъгълник пресмятаме $S=\frac{2a.a}{2}=a^2=36$. Следователно $a=6$ и търсената права има общо уравнение $2x+y-12=0$.

Задача 11.10. *Намерете уравнението на ъглополовящата на тъпия ъгъл между правите* $p: 5x+12y-5=0$ *и* $q: 3x-4y-3=0$*.*

Решение. За решаване на задачата ще използваме едно познато свойство на фигурата ромб – а именно, че диагоналите на ромб са ъглополовящи на ъглите му. За да приложим това свойство, първо намираме направляващи вектори $\vec{p}$ и $\vec{q}$ на двете прави, които определят тъпия ъгъл между тях. За тази цел използваме условието, че ъгълът между два вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$ е тъп, точно когато $\vec{p}\vec{q} < 0$. Такива вектори са например $\vec{p}(-12, 5) \parallel p$ и $\vec{q}(4, 3) \parallel q$. След това намираме единичните вектори $\vec{p}'$ и $\vec{q}'$, еднопосочно колинеарни съответно с $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Пресмятаме $|\vec{p}| = \sqrt{144 + 25} = 13$ и $|\vec{q}| = \sqrt{16 + 9} = 5$. Тогава $\vec{p}' = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = (-\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ и $\vec{q}' = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Тъй като векторите $\vec{p}'$ и $\vec{q}'$ определят ромб (със страна единица), то векторът $\vec{l}$ от диагонала на този ромб е колинеарен с търсената ъглополовяща. Съгласно правилото на успоредника за събиране на вектори, получаваме $\vec{l} = \vec{p}' + \vec{q}' = (-\frac{8}{65}, \frac{64}{65}) \parallel (-1, 8)$.

Намираме пресечната точка $M(1, 0)$ на правите p и q като решение на системата от техните уравнения.

Тогава построяваме уравнението на ъглополовящата l на тъпия ъгъл между p и q като права през M с направляващ вектор $(-1, 8)$ и получаваме $l:\ 8x + y - 8 = 0$.

Задача 11.11. *Намерете уравненията на правите, които са на разстояние* 2 *от точката* $A(1, 0)$ *и принадлежат на снопа, съдържащ правите* $l_1:\ x + y = 0$ *и* $l_2:\ x + 2y - 1 = 0$.

Решение. Като вземем предвид (11.13), общото уравнение на права g от снопа, съдържащ l_1 и l_2, се определя от $\lambda(x+y)+\mu(x+2y-1) = 0$, т.е.

$$g:\ (\lambda + \mu)x + (\lambda + 2\mu)y - \mu = 0. \tag{11.21}$$

Съгласно (11.15), разстоянието от A до g е

$$d(A, g) = \frac{|\lambda|}{\sqrt{(\lambda + \mu)^2 + (\lambda + 2\mu)^2}}. \tag{11.22}$$

От друга страна, по условие имаме $d(A, g) = 2$. Оттук и (11.22) получаваме $\frac{\lambda_1}{\mu_1} = -2$ и $\frac{\lambda_2}{\mu_2} = -\frac{10}{7}$. Избираме две двойки стойности за параметрите λ и μ, удовлетворяващи горните условия, например $(\lambda_1, \mu_1) = (2, -1)$ и $(\lambda_2, \mu_2) = (10, -7)$. Тогава, след заместване на тези стойности в (11.21), получаваме уравненията на две прави от снопа $g_1:\ x + 1 = 0$ и $g_2:\ 3x - 4y + 7 = 0$, които са решения на задачата.

Задача 11.12. *Даден е* $\triangle\, ABC$ *с върхове* $A(3, -1)$, $B(1, 4)$ *и медицентър* $G(0, 2)$. *Намерете:*

а) координатите на върха C;
б) уравненията на страните на $\triangle\, ABC$;
в) уравненията на височините в $\triangle\, ABC$;
г) уравненията на симетралите на страните на $\triangle\, ABC$.

Решение. а) Съгласно формулата за медицентър (7.9), за координатите на точка C пресмятаме $C = 3G - A - B = 3(0,2) - (3,-1) - (1,4) = (-4,3)$.

б) Като използваме (11.8), за уравненията на страните на $\triangle\, ABC$ получаваме $AB: 5x+2y-13=0$, $AC: 4x+7y-5=0$, $BC: x-5y+19=0$.

в) Тъй като височината h_A през върху A е перпендикулярна на страната BC, построяваме нейното уравнения като права през точката A с нормален вектор $\overrightarrow{BC}(-5,-1)$. С помощта на (11.5) получаваме $h_A: 5x+y-14=0$. Аналогично за останалите две височини намираме $h_B: 7x-4y+9=0$ и $h_C: 2x-5y+23=0$.

г) Симетралата s_{AB} на страната AB минава през средата ѝ M и е перпендикулярна на нея. Чрез (7.7) намираме $M(2,\frac{3}{2})$. Тогава, като използваме (11.5), построяваме уравнението на s_{AB} като права през M с нормален вектор $\overrightarrow{AB}(-2,5)$. По този начин получаваме уравнението $s_{AB}: 4x-10y+7=0$. Аналогично, за другите две симетрали получаваме $s_{AC}: 14x-8y+15=0$, $s_{BC}: 5x+y+4=0$.

Задача 11.13. *Даден е $\triangle\, ABC$ с върхове $A(2,3)$, $B(5,7)$, $C(-3,-9)$. Намерете уравненията на медианата m, височината h и на ъглополовящата l на вътрешния ъгъл при A.*

Решение. За намиране уравнението на ъглополовящата през върха A могат да бъдат използвани Зад. 11.10 или Зад. 9.12. Тук ще разгледаме по-подробно трети начин за решаване на същата задача чрез формула (13.10). Първо намираме уравненията на правите g_1 и g_2, съдържащи съответно страните AB и AC, както следва $g_1: 4x-3y+1=0$ и $g_2: 12x-5y-9=0$. Тогава, съгласно (13.10), уравненията на ъглополовящите на двата ъгъла, получени при пресичането на g_1 и g_2, т.е. на двата ъгъла при върха A, имат вида

$$l_{1,2}: \frac{4x-3y+1}{5} = \pm\frac{12x-5y-9}{13}. \tag{11.23}$$

За да определим коя от двете прави в (11.23) е ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A, използваме точка, лежаща в този ъгъл. Такава точка е например средата $M(1,-1)$ на отсечката BC. Пресмятаме ориентираните разстояния от тази точка до правите g_1 и g_2, както следва $\delta(M,g_1) = \frac{8}{5}$ и $\delta(M,g_2) = \frac{8}{13}$. Тъй като двете ориентирани разстояния са с еднакви знаци, то от (11.23) избираме уравнението със знак „+“. Следователно търсената ъглополовяща има уравнение $l:\ 4x + 7y - 29 = 0$.

Упътване. За уравненията на медианата и височината използвайте Зад. 11.12.

Отговори. $m:\ 4x - y - 5 = 0$; $h:\ x + 2y - 8 = 0$.

Задача 11.14. *Бедрата на равнобедрен триъгълник лежат на правите с уравнения $g_1:\ x - 2y + 3 = 0$ и $g_2:\ 2x - y - 6 = 0$. Намерете уравнението на основата му, ако тя минава през точката $P(2, 4)$.*

Решение. Ще използваме, че правата, съдържаща основата на равнобедрен триъгълник, е перпендикулярна на ъглополовящата на срещуположния ѝ ъгъл, т.е. на ъгъла между бедрата му. Уравненията на ъглополовящите l_1 и l_2 на двата ъгъла между правите g_1 и g_2 се определят чрез

$$l_{1,2}:\ \frac{x - 2y + 3}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2x - y - 6}{\sqrt{5}},$$

откъдето получаваме $l_1:\ x + y - 9 = 0$ и $l_2:\ x - y - 1 = 0$. Тогава търсените прави са две, които означаваме с p_1 и p_2. Построяваме уравненията им като прави през P, перпендикулярни съответно на l_1 и l_2. Следователно намираме $p_1:\ x - y + 2 = 0$ и $p_2:\ x + y - 6 = 0$.

Задача 11.15. *Основата и едното бедро на равнобедрен триъгълник лежат съответно върху правите с уравнения $g_1:\ x + y + 1 = 0$ и $g_2:\ x - 3y + 9 = 0$. Ако точката $P(2, 1)$ е от другото бедро на триъгълника, намерете координатите на върховете му.*

Решение. Намираме уравнението на правата $l:\ x + y - 3 = 0$ през P, успоредна на основата g_1. След това намираме координатите на $P'(0, 3)$ – пресечната точка на l и g_2. Тъй като триъгълникът е равнобедрен, то средата $N(1, 2)$ на отсечката PP' лежи върху височината към основата. Построяваме уравнението на тази височина $h:\ x - y + 1 = 0$ като права през N, перпендикулярна на основата g_1. Два от върховете на триъгълника намираме като пресечни точки съответно на g_1 и g_2 и на h и g_2. Нека това са съответно върховете $A(-3, 2)$ и $C(3, 4)$. Тогава координатите на върха $B(1, -2)$ получаваме, като отчетем, че $M = h \cap g_1 = (-1, 0)$ е средата на отсечката AB.

Задача 11.16. *Дадена е точка $A(1, 7)$. Ако правите $p:\ 2x + 3y - 10 = 0$ и $q:\ x - 2y + 3 = 0$ са симетрали съответно на страните AB и AC на $\triangle\, ABC$, намерете координатите на B и C.*

Решение. Намираме уравненията на страните AB и AC като прави през A, перпендикулярни на съответните им симетрали. Така получаваме $AB : 3x - 2y + 11 = 0$ и $AC : 2x + y - 9 = 0$. След това намираме пресечната точка на всяка от тези страни със съответната ѝ симетрала – средите на страните. Така средата на AB е $M(-1, 4)$, а на AC е $N(3, 3)$. За да намерим координатите на върховете B и C, прилагаме формулата за среда на отсечка, съгласно която $B = 2M - A$, $C = 2N - A$. Следователно $B(-3, 1)$ и $C(5, -1)$.

Задача 11.17. *Две от медианите в $\triangle ABC$ лежат върху правите $m : x + y - 3 = 0$ и $p : 2x + 3y - 1 = 0$, а точката $A(1, 1)$ е връх на триъгълника. Намерете координатите на останалите два върха и уравненията на страните на триъгълника.*

Решение. Проверяваме, че координатите на точката A не удовлетворяват уравненията на правите m и p. Следователно тези прави задават медианите през останалите два върха на триъгълника. Нека m е медианата през B, а p е медианата през C. За да намерим координатите на B и C, е удобно да използваме скаларно параметрични уравнения за правите m и p.

От уравнението на m изразяваме $y = 3 - x$. Тогава можем да изберем x за параметър на правата, т.е. $x = s$, и в такъв случай, съгласно (11.2), скаларно параметричните уравнения на тази права имат вида

$$m : \left| \begin{array}{l} x = s \\ y = 3 - s. \end{array} \right. \tag{11.24}$$

Тъй като точката B е от правата m, то съществува стойност на параметъра $s = s_0$, за която координатите на B удовлетворяват уравнението (11.24). Следователно координатите на тази точка са от вида $B(s_0, 3 - s_0)$.

Тъй като векторът $\overrightarrow{N} = (2, 3)$ е нормален за правата p, то векторът $\vec{p} = (3, -2)$ е направляващ за нея. Избираме една точка от p, например точката $D(-1, 1)$. Тогава, като вземем предвид (11.2), скаларно параметричните уравнения на тази права са

$$p : \left| \begin{array}{l} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 2t, \end{array} \right. \tag{11.25}$$

където с t сме означили параметъра на правата. Тъй като точката C лежи на правата p, то нейните координати са от вида
$C(-1 + 3t_0, 1 - 2t_0)$.

Тогава, за да намерим координатите на B и C, трябва да намерим стойностите s_0 и t_0 на параметрите на правите m и p, които отговарят на тези точки.

Нека с M и N означим съответно средите на страните AB и AC. Тогава, използвайки познатата формула за среда на отсечка, за координатите на тези точки получаваме

$$M\left(\frac{1+s_0}{2}, \frac{4-s_0}{2}\right), \quad N\left(\frac{3t_0}{2}, 1-t_0\right). \tag{11.26}$$

Сега отчитаме, че M лежи на медианата през върха C, т.е. на правата p, а N лежи на медианата през върха B, т.е. на правата m. Следователно координатите на M и N трябва да удовлетворяват съответно уравненията на p и m. След заместване на координатите на тези точки от (11.26) в съответните общи уравнения на двете прави, дадени в условието на задачата, намираме търсените стойности на параметрите $s_0 = 12$ и $t_0 = 4$. Следователно $B(12, -9)$ и $C(11, -7)$.

Отговори. $AB:\ 10x + 11y - 21 = 0$; $AC:\ 4x + 5y - 9 = 0$;
$BC:\ 2x + y - 15 = 0$.

Задача 11.18. *За правоъгълния $\triangle\ ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) е известно, че $C(2, 3)$ е един от върховете му, $M(1, 6)$ е средата на хипотенузата, а точката $D(7, 4)$ лежи на хипотенузата. Намерете координатите на върховете A и B и уравненията на страните на триъгълника.*

Решение. Тъй като точките M и D са от хипотенузата AB, то насочената отсечка $\overrightarrow{MD} = (6, -2) \parallel \vec{p} = (3, -1)$, т.е. $\vec{p}$ е направляващ вектор за правата AB. Тогава, съгласно (11.2), скаларно параметричните уравнения на тази права се определят от

$$AB : \left|\begin{array}{l} x = 1 + 3s \\ y = 6 - s. \end{array}\right.$$

Следователно върхът A ще има координати от вида $A(1+3s_0, 6-s_0)$. Тъй като M е средата на AB, съгласно формулата за среда на отсечка, за другия връх от хипотенузата получаваме $B(1-3s_0, 6+s_0)$. Намираме координатите на насочените отсечки $\overrightarrow{AC} = (1-3s_0, s_0-3)$ и $\overrightarrow{BC} = (1 + 3s_0, -s_0 - 3)$. Условието $\sphericalangle C = 90^\circ$ е еквивалентно на $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0$. Пресмятаме скаларното произведение и достигаме до квадратното уравнение

$$(1 - 3s_0)(1 + 3s_0) - (s_0 - 3)(s_0 + 3) = 0,$$

чиито корени са $s_0 = \pm 1$. При $s_0 = 1$ имаме $A(4, 5)$, $B(-2, 7)$, а за $s_0 = -1$ получаваме $A(-2, 7)$, $B(4, 5)$. Уравненията на правите, съдържащи двата катета, са $x - y + 1 = 0$ и $x + y - 5 = 0$.

Задача 11.19. *За* $\triangle ABC$ *с ортоцентър* $H(14,15)$ *е известно, че* $AB: x+2y-5=0$, $AC: 5x+4y-13=0$. *Намерете координатите на върховете на триъгълника и лицето му.*

Решение. Намираме $A(1,2)$ като пресечна точка на AB и AC. Построяваме височините $h_B: 4x-5y+19=0$ и $h_C: 2x-y-13=0$ като прави през H, перпендикулярни съответно на AC и AB. Тогава $B(-1,3)$ е пресечната точка на h_B и AB, а $C(5,-3)$ на h_C и AC. Накрая пресмятаме $S_{ABC}=3$.

Задача 11.20. *Диагоналите на успоредника* $ABCD$ *се пресичат в точка* $O(3,2)$. *Ако* $A(5,1)$ *и* $B(2,-1)$, *то намерете координатите на другите два върха на успоредника, уравненията на страните му и лицето му.*

Упътване. Използвайте, че O е среда на AC и BD.

Отговори. $C(1,3)$, $D(4,5)$; $AB: 2x-3y-7=0$, $CD: 2x-3y+7=0$, $AD: 4x+y-21=0$, $BC: 4x+y-7=0$; $S_{ABCD}=14$.

Задача 11.21. *Намерете уравненията на страните на квадрат* $ABCD$, *ако два от неговите върхове са* $A(2,0)$ *и* $B(-1,4)$.

Упътване. Намерете уравнението на AB като права през A и B, уравненията на AD и BC като прави съответно през A и B, перпендикулярни на AB, а на CD като права, успоредна на AB и такава, че $d(A,CD)=|\overrightarrow{AB}|$.

Отговори. $AB: 4x+3y-8=0$; $AD: 3x-4y-6=0$; $BC: 3x-4y+19=0$; $(CD)_1: 4x+3y+17=0$, $(CD)_2: 4x+3y-33=0$.

11.2. **Уравнение на окръжност в равнина.**

Определение 11.8. Множеството от всички точки в една равнина, които се намират на равни разстояния r от дадена фиксирана точка C от същата равнина, се нарича *окръжност*. Точката C се нарича *център* на окръжността, а разстоянието r – *радиус* на окръжността.

Теорема 11.10. *Относно ортонормирана координатна система в равнината* Oxy *уравнението на окръжност* k *с център точката* $C(a,b)$ *и радиус* $r>0$ *е*

$$k:\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{11.27}$$

Теорема 11.11. *Уравнението от втора степен*

$$x^2 + y^2 + mx + ny + l = 0 \tag{11.28}$$

е уравнение на окръжност, точно когато

$$m^2 + n^2 - 4l > 0. \tag{11.29}$$

В такъв случай център и радиус на окръжността са съответно

$$C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right) \quad \text{и} \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 4l}.$$

Забележка 11.8. Окръжност k с център точката $C(a, b)$ и радиус r се задава параметрично чрез:

$$k : \left| \begin{array}{l} x = a + r\cos\varphi \\ y = b + r\sin\varphi, \end{array} \right.$$

където параметърът φ се изменя в интервал с дължина 2π, например $0 \le \varphi < 2\pi$.

Теорема 11.12 (Взаимно положение на точка и окръжност)**.** *Нека в равнината Oxy е дадена окръжност k с център точката $C(a, b)$ и радиус $r > 0$. Тогава са в сила твърденията:*

1) Точката $M(x_0, y_0)$ лежи във вътрешността на окръжността, точно когато $F(M) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 < 0$.
2) Точката $M(x_0, y_0)$ лежи върху окръжността, точно когато $F(M) = 0$.
3) Точката $M(x_0, y_0)$ лежи вън от окръжността, точно когато $F(M) > 0$.

Забележка 11.9. За установяване на взаимното положение на точката M и окръжността k, зададена с (11.27), можем да сравним дължината на насочената отсечка $\overrightarrow{CM}$ с радиуса r. Изброените по-горе три случая се получават съответно при $|\overrightarrow{CM}| < r$, $|\overrightarrow{CM}| = r$ и $|\overrightarrow{CM}| > r$.

Теорема 11.13 (Допирателни прави към окръжност)**.** *Нека в равнината Oxy е дадена окръжност k с център точката $C(a, b)$ и радиус $r > 0$. Тогава са в сила твърденията:*

1) През точка, вътрешна за окръжността k, не минават реални допирателни прави към k.

2) През точка $M(x_0, y_0)$, лежаща върху окръжността k, минава единствена допирателна към k. Нейното уравнение се задава чрез формулата

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0 \tag{11.30}$$

или чрез

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2. \tag{11.31}$$

3) През точка, външна за окръжността k, минават две допирателни към k.

Задача 11.22. *Проверете дали дадените по-долу уравнения задават окръжност и в такъв случай намерете центъра и радиуса ѝ:*

а) $4x^2 - 4y^2 - 6xy + 4y - 1 = 0$*;*
б) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$*;*
в) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$*;*
г) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$*;*
д) $x^2 + y^2 - 4 = 0$*;*
е) $x^2 + y^2 + 5x - 5y + 12 = 0$*;*
ж) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y + 19 = 0$*.*

Решение. а) Даденото уравнение не е от вида (11.28), тъй като коефициентите пред x^2 и y^2 не са равни и присъства събираемо xy. Следователно това уравнение не задава окръжност (уравнението определя друг вид крива от втора степен).

б) Даденото уравнение е от вида (11.28). За да установим дали това уравнение задава окръжност, остава да проверим дали е изпълнено условието (11.29). Един начин да направим това е, като в лявата страна на даденото уравнение отделим точни квадрати. Преобразуваме уравнението, както следва

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 10y + 25) - 25 = 0.$$

Последното уравнение е еквивалентно на

$$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

Тогава, съгласно (11.27), даденото уравнение задава окръжност с център $C(-1, 5)$ и радиус $r = 5$.

в) Както в подточка б), уравнението е от вида (11.28), но (11.29) не е изпълнено, тъй като $2^2 + (-4)^2 - 4.9 < 0$. Следователно това не е уравнение на окръжност.

г) Уравнението е от вида (11.28) и условието (11.29) е изпълнено (проверете). Тогава отделяме точни квадрати, както следва

$$3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3\left(y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) - 1 = 0.$$

Откъдето получаваме

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

Следователно уравнението задава окръжност с център $C(1, -\frac{2}{3})$ и радиус $r = \frac{4}{3}$.

Отговори. д) $C(0,0)$, $r = 2$; е) $C(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$, $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $C(1,-2)$, $r = \frac{1}{2}$.

Задача 11.23. *Намерете уравнението на окръжност:*

а) с център точката $C(-2,3)$ и радиус $r = 4$;
б) с център точката $C(2,1)$, ако точката $M(-2,4)$ лежи на окръжността;
в) с диаметър отсечката AB, ако $A(2,-2)$ и $B(8,6)$;
г) с център $C(2,2)$, ако правата $p: 3x + y - 18 = 0$ се допира до окръжността;
д) с център $C(5,4)$, допираща се външно до окръжността с уравнение $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$.

Решение. а) Чрез заместване на радиуса и координатите на центъра в (11.27) получаваме $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$.

б) За радиуса r на търсената окръжност е валидно $r = |\overrightarrow{CM}| = 5$. Тогава, аналогично на подточка а), намираме $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

в) Тъй като отсечката AB е диаметър, то средата $C(5,2)$ на AB е центърът на търсената окръжност, а радиусът ѝ $r = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = 5$. Следователно уравнението на тази окръжност е

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

г) Тъй като правата p се допира до търсената окръжност, разстоянието $d(C,p)$ от центъра ѝ C до p е равно на радиуса на окръжността. Чрез (11.15) пресмятаме $d(C,p) = \sqrt{10}$. Следователно уравнението на окръжността е $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$.

д) Както в Зад. 11.22, установяваме, че даденото уравнение задава окръжност с център $C'(2,0)$ и радиус $r' = 3$. Тъй като дадената и търсената окръжност се допират външно, то $CC' = r + r'$, където r е радиусът на търсената окръжност. Пресмятаме $\overrightarrow{CC'} = (-3,-4)$, откъдето $|\overrightarrow{CC'}| = 5$ и следователно $r = 5 - 3 = 2$. Търсената окръжност се определя от $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 4$.

Задача 11.24. *Намерете уравнението на окръжността, описана около триъгълника с върхове $A(1,-1)$, $B(1,1)$, $D(5,3)$.*

Решение. Ще решим задачата по два начина.

Начин 1. Тъй като уравнението на търсената окръжност е от вида (11.28), то ще намерим стойностите на неизвестните коефициенти m, n и l. Заместваме координатите на трите точки A, B и D, лежащи върху окръжността, в уравнението (11.28) и така получаваме определената система

$$\left| \begin{array}{l} m - n + l = -2 \\ m + n + l = -2 \\ 5m + 3n + l = -34. \end{array} \right.$$

Решението на горната система е $m = -8$, $n = 0$, $l = 6$. След заместване на тези стойности в (11.28) установяваме, че търсената окръжност има уравнение $x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$.

Начин 2. От училищния курс по геометрия е известно, че центърът на описаната около триъгълник окръжност е пресечната точка на симетралите на страните му. Затова ще построим уравненията на две симетрали в $\triangle\ ABC$, например симетралите s_1 и s_2 съответно на страните AB и AD. Намираме координатите на средите $M(1, 0)$ на AB и $N(3, 1)$ на AD. Построяваме правата s_1 през M, перпендикулярна на $\overrightarrow{AB} = (0, 2)$, и правата s_2 през N, перпендикулярна на $\overrightarrow{AD} = (4, 4)$. Тези прави имат уравнения съответно $s_1 : y = 0$ и $s_2 : x + y - 4 = 0$. Тогава тяхната пресечна точка $C(4, 0)$ е центърът на търсената окръжност. Радиусът получаваме, като намерим дължината на някой от векторите $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ или $\overrightarrow{DC}$. Така достигаме до уравнението $(x - 4)^2 + y^2 = 10$, което е еквивалентно на уравнението, получено по първия начин.

Задача 11.25. *Намерете окръжността през точките $A(3, 0)$ и $B(-1, 2)$, ако центърът ѝ лежи на правата $l : x + 2y - 3 = 0$. Намерете допирателните към окръжността, които са успоредни на l.*

Решение. За първата част на задачата постъпваме аналогично на Зад. 11.23 г). Намираме уравнението на симетралата s на страната AB, $s : 2x - y - 1 = 0$. Тогава центърът на окръжността е пресечната точка на s и дадената права l. Така намираме $C(1, 1)$. Радиусът на окръжността е $r = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$. Тогава търсената окръжност се задава с уравнението

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5. \tag{11.32}$$

Права, допирателна към окръжността и успоредна на l, има общо уравнение от вида

$$p : x + 2y + a = 0, \tag{11.33}$$

където a е неизвестна константа. Всяка допирателна права и окръжността, към която тя се допира, имат единствена обща точка. Следователно стойността на a трябва да бъде такава, че системата от уравненията

$$\left|\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-1)^2=5\\ x+2y+a=0\end{array}\right.$$

да има единствено решение. След заместване на $x=-2y-a$ в първото уравнение и преобразуване достигаме до квадратното уравнение

$$5y^2+2(2a+1)y+a^2+2a-3=0. \tag{11.34}$$

Стойността на a трябва да бъде определена така, че (11.34) да има единствено решение. Тъй като коефициентът пред y^2 не може да се анулира, горното условие е възможно само когато дискриминантата D на (11.34) е равна на нула. Пресмятаме $D=a^2+6a-16$. Уравнението $D=0$ има два корена, $a_1=-8$ и $a_2=2$. Чрез заместване на тези стойности в (11.33) получаваме уравненията на търсените допирателни $p_1: x+2y-8=0$ и $p_2: x+2y+2=0$.

Задача 11.26. *Намерете уравнението на окръжност, която се допира до координатните оси и минава през точката $A(2,4)$.*

Решение. Тъй като окръжността се допира до координатните оси Ox и Oy, то $d(C,Ox)=d(C,Oy)=r$, където r е радиусът на окръжността. Тогава, ако $C(x_0,y_0)$ е центърът на тази окръжност, то $|x_0|=|y_0|=r$. Освен това отчитаме, че C и A трябва да лежат в един и същи квадрант. Тъй като A се намира в първи квадрант, то $x_0>0$ и $y_0>0$, откъдето получаваме $C(r,r)$. Понеже точката A лежи на окръжността, то $|\overrightarrow{AC}|=r$. Оттук, като се има предвид че $\overrightarrow{AC}=(r-2,r-4)$, достигаме до квадратното уравнение $r^2-12r+20=0$ с корени $r_1=2$ и $r_2=10$. Следователелно $C_1(2,2)$, $C_2(10,10)$ и уравненията на двете окръжности, удовлетворяващи условието на задачата, са: $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ и $(x-10)^2+(y-10)^2=100$.

Задача 11.27. *Намерете уравнението на окръжност, която се допира до положителни части на координатните оси, ако центърът ѝ лежи на правата $g: 5x-3y-10=0$.*

Упътване. Използвайте Зад. 11.26.

Отговори. $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

Задача 11.28. *Определете взаимното положение на окръжността $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ и точки $M(2,-2)$, $N(7,-1)$ и $P(-5,-10)$.*

Решение. Нека означим $F(x,y) = (x-3)^2+(y+4)^2-25$. Замествайки координатите на всяка от дадените точки в $F(x,y)$, получаваме съответно

$$F(M) = F(2,-2) = (2-3)^2 + (-2+4)^2 - 25 = -20 < 0,$$

$F(N) = 0$ и $F(P) = 75 > 0$. Следователно, съгласно Теорема 11.12, точката M е вътрешна за окръжността, точката N лежи на окръжността, а точката P е външна за окръжността.

Задача 11.29. *Намерете допирателните към окръжността*

$$k\colon (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25,$$

минаващи през точката $M(-3,1)$.

Решение. Тъй като точката M лежи на окръжността (проверете), през нея минава една допирателна към тази окръжност. Уравнението на допирателната можем за построим като права през M с нормален вектор $\overrightarrow{MC} = (4,-3)$, т.е. чрез формула (11.30), където $C(1,-2)$ е центърът на дадената окръжност. Така получаваме правата $4x - 3y + 15 = 0$.

Задача 11.30. *Намерете допирателните към окръжността*

$$k\colon x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0$$

в точките ѝ с абсциса 10.

Упътване. Търсените точки са $T_1(10,9)$ и $T_2(10,-5)$. По аналогичен начин, като в предходната задача, установете, че двете допирателни имат уравнения $t_1\colon 3x + 7y - 93 = 0$ и $t_2\colon 3x - 7y - 65 = 0$.

Задача 11.31. *Намерете допирателните към окръжността*

$$k\colon (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9,$$

минаващи през точката $M(1,4)$.

Решение. Точката M се явява външна за дадената окръжност (проверете) и затова през нея минават две допирателни към окръжността. Произволна права p през M има общо уравнение от вида $p:\ \lambda(x-1) + \mu(y-4) = 0$, т.е.

$$p:\ \lambda x + \mu y - \lambda - 4\mu = 0,$$

където $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ са координатите на нормалния вектор на p. Условието правата p да се допира до дадената окръжност е еквивалентно на условието $d(C,p) = r$, където $C(1,-1)$ е центърът на окръжността, а $r = 3$ е нейният радиус. Чрез формулата (11.15) пресмятаме

$$d(C, p) = \frac{5|\mu|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}.$$

Тогава от $\frac{5|\mu|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} = 3$ получаваме уравнението $9\lambda^2 = 16\mu^2$, чиито решения са $\frac{\lambda}{\mu} = \pm\frac{4}{3}$. От двете двойки решения $(\lambda_1, \mu_1) = (4, 3)$ и $(\lambda_2, \mu_2) = (4, -3)$ получаваме уравненията на двете допирателни $p_1 :\ 4x + 3y - 16 = 0$ и $p_2 :\ 4x - 3y + 8 = 0$.

12. Криви от втора степен

> Всички ефекти на природата са само математически следствия от малък брой неизменни закони.
>
> *Пиер-Симон Лаплас*

12.1. Уравнение на крива от втора степен.

Определение 12.1. Множеството от точки $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяващи уравнението

$$c\colon a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{12.1}$$

където $a_{ij} \in \mathbb{R}$ и поне един от коефициентите a_{11}, a_{12}, a_{22} е различен от нула, се нарича *крива от втора степен*.

Забележка 12.1. На кривата c с уравнение (12.1) съответства симетричната матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{12.2}$$

Определение 12.2. Една крива от втора степен се нарича *изродена*, ако съдържа някоя права. В противен случай кривата се нарича *неизродена*.

Теорема 12.1. *За кривата от втора степен c, зададена* (12.1)*, е в сила:*
1) c е изродена, точно когато $\det A = 0$*;*
2) c е неизродена, точно когато $\det A \neq 0$*.*

Определение 12.3. Нека неизродената крива c е зададена с уравнението (12.1) и $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Тогава кривата се нарича:
1) *елипса*, ако $A_{33} > 0$;
2) *парабола*, ако $A_{33} = 0$;
3) *хипербола*, ако $A_{33} < 0$.

Забележка 12.2. В случай че кривата от втора степен (12.1) е изродена, тя се нарича: *крива от елиптичен тип*, ако $A_{33} > 0$, *крива от параболичен тип*, ако $A_{33} = 0$ или *крива от хиперболичен тип*, ако $A_{33} < 0$.

Канонично уравнение на крива от втора степен

Теорема 12.2. *Нека Oxy е ортонормирана координатна система. Тогава кривата от втора степен (12.1) се задава с едно от следните канонични уравнения:*

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$ *(елипса);*

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a > 0,\ b > 0)$ *(имагинерна елипса);*

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$ *(хипербола);*

4) $y^2 = a^2x^2 \quad (a > 0)$ *(две реални пресичащи се прави);*

5) $y^2 = -a^2x^2 \quad (a > 0)$ *(две комплексно спрегнати пресичащи се прави);*

6) $y^2 = 2px \quad (p \neq 0)$ *(парабола);*

7) $y^2 = a^2 \quad (a > 0)$ *(две реални успоредни прави);*

8) $y^2 = -a^2 \quad (a > 0)$ *(две комплексно спрегнати прави);*

9) $y^2 = 0 \quad (a > 0)$ *(две реални сливащи се прави).*

Получаването на каноничното уравнение на кривата от втора степен (12.1) се извършва чрез две последователни трансформации (ротация и транслация) на ортонормираната координатна система, относно която е зададена кривата.

Примерен алгоритъм за получаване на канонично уравнение на крива от втора степен.

Стъпка 1. Ротация на координатната система:

1) Разглеждаме квадратичната форма

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \tag{12.3}$$

и съответната ѝ симетрична матрица

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

2) Намираме собствените стойности на S от характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Тъй като матрицата S е симетрична, то всички нейни собствени стойности са реални числа.

3) Намираме собствените вектори, съответстващи на собствените стойности λ_1 и λ_2 на S. Ще отбележим, че на различните собствени стойности $\lambda_1 \neq \lambda_2$ съответстват взаимно ортогонални собствени вектори. Ако $\lambda_1 = \lambda_2$, то на тази собствена стойност съответстват два линейно независими собствени вектора, които могат да бъдат ортогонализирани по метода на Грам-Шмид. Следователно винаги можем да намерим ортонормирана база от собствени вектори на матрицата S, които ще означим с $\vec{e}_1' = (\alpha_{11}, \alpha_{21})$ и $\vec{e}_2' = (\alpha_{12}, \alpha_{22})$.

   Избираме такава двойка собствени вектори $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$, която е еднакво ориентирана с базата $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ на $K = Oxy$. Тогава $K' = O\vec{e}_1'\vec{e}_2' = Ox'y'$ е ортонормирана координатна система (еднакво ориенирана с K), която се получава от K чрез завъртане на ъгъл φ ($\cos\varphi = \alpha_{11}$, $\sin\varphi = \alpha_{21}$) посредством трансформационните формули

$$\left| \begin{array}{l} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y'. \end{array} \right. \tag{12.4}$$

4) Чрез трансформацията (12.4) квадратичната форма (12.3) добива каноничния си вид

$$f(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

   Като заместим (12.4) в уравнението (12.1), получаваме следното уравнение на кривата относно K'

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33} = 0. \tag{12.5}$$

Стъпка 2. Транслация на координатната система:

1) Извършваме транслация на $K' = Ox'y'$ до координатната система $K'' = O'\vec{e}_1'\vec{e}_2' = O'XY$, определена от

$$\left| \begin{array}{l} x' = X + \alpha \\ y' = Y + \beta, \end{array} \right. \tag{12.6}$$

   където $O'(\alpha, \beta)$ относно K' е новото координатно начало. Като заместим (12.6) в (12.5), получаваме следното уравнение на кривата относно K''

$$\begin{array}{l} \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2(\alpha\lambda_1 + a_{13}')X + 2(\beta\lambda_2 + a_{23}')Y \\ +\lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + 2a_{13}'\alpha + 2a_{23}'\beta + a_{33} = 0. \end{array} \tag{12.7}$$

2) Определяме координатите на O'. Възможни са следните два случая:

Случай 1. И двете собствени стойности λ_1 и λ_2 са различни от нула. Тогава координатите α и β на O' определяме така, че коефициентите пред X и Y в уравнението (12.7) да бъдат равни на нула, т.е.

$$\alpha\lambda_1 + a'_{13} = 0 \quad \text{и} \quad \beta\lambda_2 + a'_{23} = 0. \tag{12.8}$$

По този начин получаваме $\alpha = -\frac{a'_{13}}{\lambda_1}$ и $\beta = -\frac{a'_{23}}{\lambda_2}$, а уравнението на кривата добива вида

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a'_{33} = 0, \tag{12.9}$$

където $a'_{33} = \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + 2a'_{13}\alpha + 2a'_{23}\beta + a_{33}$. Получената крива е *елипса*, *имагинерна елипса* или *хипербола*, ако е неизродена ($a'_{33} \neq 0$), или *две реални пресичащи се прави* или *две комплексно спрегнати пресичащи се прави*, ако е изродена ($a'_{33} = 0$).

Случай 2. Едната от собствените стойности е нула, например $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Стойността на β определяме, както в предния случай (т.е. от второто условие в (12.8)) и тогава уравнението (12.7) приема вида

$$\lambda_2 Y^2 + 2a'_{13}X + \lambda_2\beta^2 + 2a'_{13}\alpha + 2a'_{23}\beta + a_{33} = 0. \tag{12.10}$$

Тук разглеждаме два подслучая:

а) Ако $a'_{13} \neq 0$, то α определяме от условието свободният член в (12.10) да бъде равен на нула, т.е. $\lambda_2\beta^2 + 2a'_{13}\alpha + 2a'_{23}\beta + a_{33} = 0$. Тогава уравнението на кривата приема вида

$$\lambda_2 Y^2 + 2a'_{13}X = 0, \tag{12.11}$$

което е уравнение на *парабола*.

б) Ако $a'_{13} = 0$, то уравнението на кривата е от вида

$$\lambda_2 Y^2 + a'_{33} = 0, \tag{12.12}$$

където $a'_{33} = \lambda_2\beta^2 + 2a'_{23}\beta + a_{33}$, което е уравнение на изродена крива, т.е. представлява *две реални успоредни прави*, *две комплексно спрегнати прави* или *две сливащи се прави*.

Задача 12.1. *Определете вида на кривата c, намерете каноничното ѝ уравнение и координатните трансформации, чрез които то се получава, ако:*

а) $c\colon 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 8 = 0$;
б) $c\colon 3x^2 - 10xy + 3y^2 - 14x + 2y - 13 = 0$;
в) $c\colon x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$;
г) $c\colon 17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}x + 20 = 0$;
д) $c\colon 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;

е) $c\colon x^2 - 4xy + 4y^2 - 10\sqrt{5}x + 25 = 0.$

Решение. а) За определяне на вида на кривата образуваме нейната матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 10 \\ -2 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Тъй като $\det A = -288 \neq 0$, то кривата е неизродена. От друга страна, $A_{33} = 24 > 0$, което означава, че кривата е елипса.

За да намерим каноничното уравнение на кривата и координатните трансформации, чрез които то се получава, ще следваме примерния алгоритъм.

Стъпка 1 (Ротация). От уравнението

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$$

намираме собствените стойности $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 6$.

Нека $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ са собствени вектори, отговарящи съответно на собствените стойности λ_1 и λ_2. Ако $\vec{v}_1 = (p, q)$, то за координатите му трябва да бъде в сила

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda_1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откъдето получаваме $p - q = 0$. Следователно един собствен вектор, съответстващ на λ_1, е векторът $\vec{v}_1 = (1, 1)$. Тъй като $\vec{v}_2$ трябва да е ортогонален на $\vec{v}_1$, то можем да изберем $\vec{v}_2 = (-1, 1)$. Нормираме двата собствени вектора и получаваме ортонормираната база от собствени вектори

$$\vec{e}_1{}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \vec{e}_2{}' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Тогава матрицата T на прехода от база $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ на $K = Oxy$ към база $e' = \{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$ на $K' = Ox'y'$ има вида

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Тъй като $\det T = 1 > 0$, то базите e и e' са еднакво ориентирани.

Формулите на смяна на K с K' (ротация) се определят от

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{array} \right. \tag{12.13}$$

След заместване на формулите (12.13) в уравнението на кривата установяваме, че относно K' същата крива се задава чрез

$$c\colon\ 2x'^2 + 3y'^2 + 4\sqrt{2}x' + 6\sqrt{2}y' + 4 = 0. \tag{12.14}$$

Стъпка 2 (Транслация). Сега извършваме транслация на K' до $K'' = O'XY$ чрез заместване на формулите (12.6) в уравнението (12.14). Така получаваме

$$\begin{aligned} &2X^2 + 3Y^2 + 4(\alpha + \sqrt{2})X + 6(\beta + \sqrt{2})Y \\ &+2\alpha^2 + 3\beta^2 + 4\sqrt{2}\alpha + 6\sqrt{2}\beta + 4 = 0. \end{aligned} \tag{12.15}$$

Координатите на O' намираме от условията:

$$\alpha + \sqrt{2} = 0, \quad \beta + \sqrt{2} = 0.$$

Така получаваме $\alpha = \beta = -\sqrt{2}$, след което с тези стойности пресмятаме свободния член в уравнението (12.15), както следва

$$2\alpha^2 + 3\beta^2 + 4\sqrt{2}\alpha + 6\sqrt{2}\beta + 4 = -6.$$

Тогава формулите за смяна на $K' = Ox'y'$ с $K'' = O'XY$ (транслация) имат вида

$$\left| \begin{array}{l} x' = X - \sqrt{2} \\ y' = Y - \sqrt{2}, \end{array} \right. \tag{12.16}$$

а уравнението на кривата относно K'' е $c\colon 2X^2 + 3Y^2 - 6 = 0$. Последното уравнение може да се запише във вида

$$c\colon\ \frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{2} = 1. \tag{12.17}$$

Отбелязваме, че втората стъпка може да бъде извършена и по-друг начин. Записваме (12.15) във вида

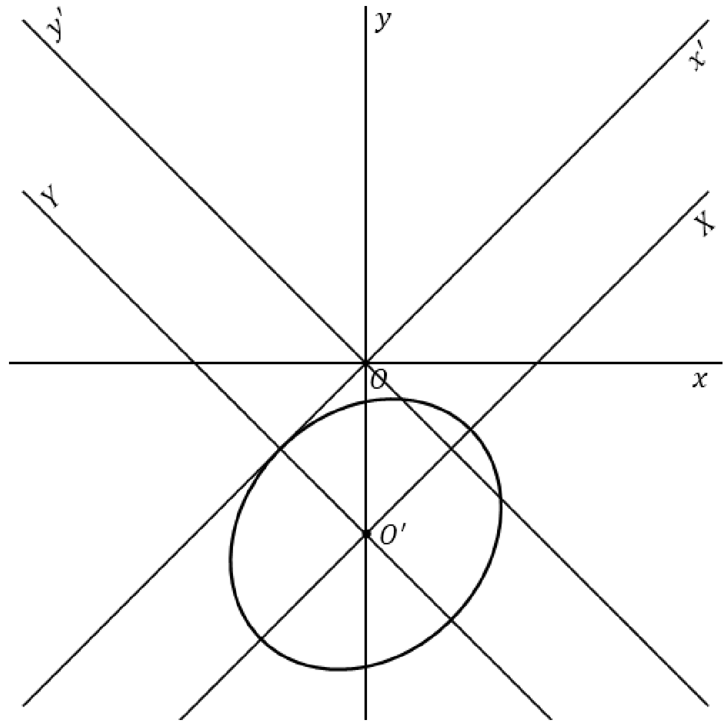
$$2(x'^2 + 2\sqrt{2}x' + 2 - 2) + 3(y'^2 + 2\sqrt{2}y' + 2 - 2) + 4 = 0,$$

което е еквивалентно на

$$2(x' + \sqrt{2})^2 + 3(y' + \sqrt{2})^2 - 6 = 0.$$

Като положим $x' + \sqrt{2} = X$ и $y' + \sqrt{2} = Y$ и разделим двете страни на 6, от последното уравнение получаваме (12.17).

На Фигура 12.1 са изобразени дадената елипса и координатните системи K, K' и K''.



Фигура 12.1. Чертеж към Задача 12.1 а)

б) Намираме симетричната матрица A, съответстваща на кривата, и установяваме, че $\det A = 128 \neq 0$. Следователно кривата е неизродена. Тъй като $A_{33} = -16 < 0$, то кривата е хипербола.

Аналогично на задача а), от характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

намираме собствените стойности $\lambda_1 = 8$ и $\lambda_2 = -2$. Една ортонормирана база от собствени вектори, еднакво ориентирана с базата $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, се състои от $\vec{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и $\vec{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Следователно формулите за смяна на K с K' са

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y'). \end{array} \right. \tag{12.18}$$

След заместването на горните равенства в уравнението на кривата достигаме до

$$8x'^2 - 2y'^2 - 8\sqrt{2}x' - 6\sqrt{2}y' - 13 = 0.$$

Чрез отделяне на точни квадрати в горното уравнение получаваме

$$8\left(x' - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y' + \tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8.$$

Полагаме $x' - \frac{1}{\sqrt{2}} = X$ и $y' + \frac{3}{\sqrt{2}} = Y$. Тогава формулите за смяна на K' с K'' имат вида

$$\left| \begin{array}{l} x' = X + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y' = Y - \frac{3}{\sqrt{2}}, \end{array} \right. \tag{12.19}$$

а уравнението на кривата относно K'' е

$$c\colon \frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Формулите за смяна на K с K'' са

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) - 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y) - 2. \end{array} \right.$$

На Фигура 12.2 са изобразени дадената хипербола и координатните системи K, K' и K''.

в) Тъй като $\det A = -625 \neq 0$ и $A_{33} = 0$, то кривата е парабола. Корените на характеристичното уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

са $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 5$. Една ортонормирана база от собствени вектори е $\vec{e}_1{}' = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ и $\vec{e}_2{}' = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. Формулите за смяна на K с K' имат вида

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y'). \end{array} \right. \tag{12.20}$$

След заместване на горните формули в уравнението на кривата получаваме

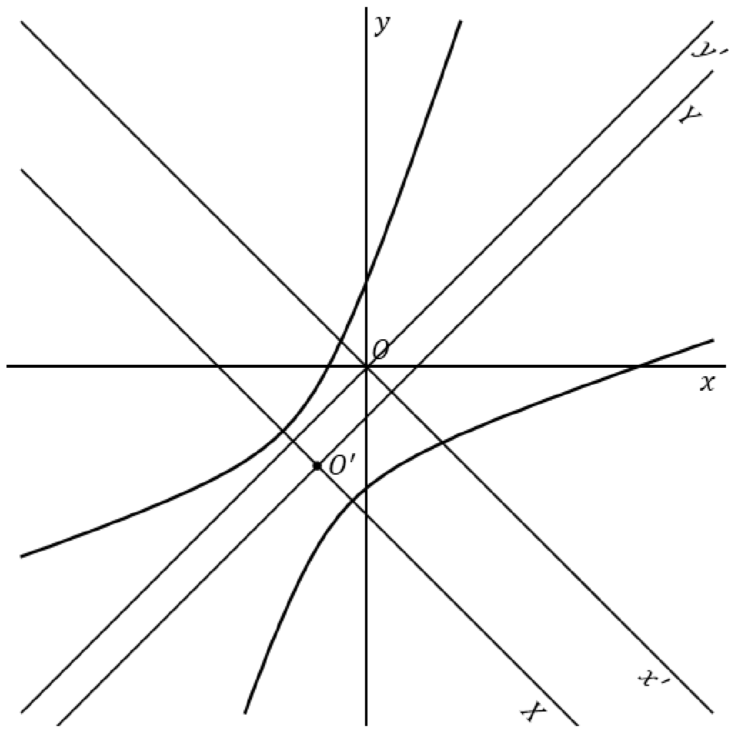
$$y'^2 - 2\sqrt{5}x' - 10 = 0,$$

откъдето намираме

$$y'^2 = 2\sqrt{5}(x' + \sqrt{5}).$$

В последното уравнение полагаме $x' + \sqrt{5} = X$ и $y' = Y$. Следователно формулите за смяна на K' с K'' са

$$\left| \begin{array}{l} x' = X - \sqrt{5} \\ y' = Y, \end{array} \right. \tag{12.21}$$



Фигура 12.2. Чертеж към Задача 12.1 б)

а уравнението на кривата относно K'' има вида

$$c: Y^2 = 2\sqrt{5}X.$$

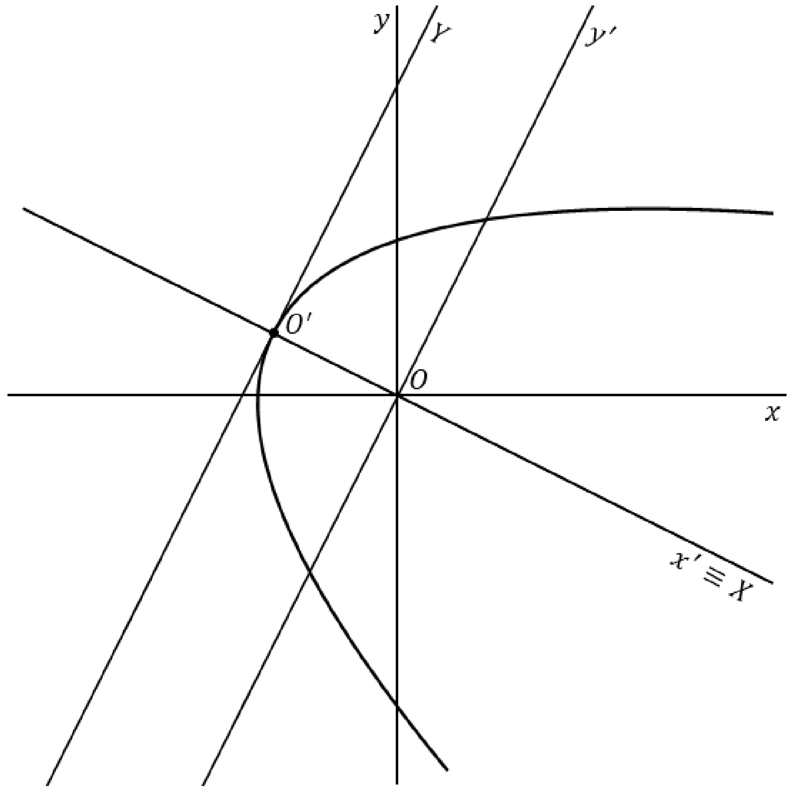
Формулите за смяна на K с K'' получаваме чрез заместване на (12.21) в (12.20), както следва

$$\left|\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) - 2 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) + 1. \end{array}\right.$$

На Фигура 12.3 са изобразени дадената парабола и координатните системи K, K' и K''.

Отговори. г) елипса, c: $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1$, $\left|\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y - 4) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X + Y + 3); \end{array}\right.$

д) хипербола, c: $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{36} = 1$, $\left|\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y) + 3 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) - 4; \end{array}\right.$



Фигура 12.3. Чертеж към Задача 12.1 в)

е) парабола, $c\colon Y^2 = 4X, \quad \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X - Y + 3) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y - 1). \end{array} \right.$

12.2. **Конични сечения.**

Определение 12.4. Множество от точки M в една равнина, за които отношението от разстоянията до дадена точка F и дадена права g, неминаваща през F, е постоянно число $e > 0$, т.е.

$$\frac{d(M,F)}{d(M,g)} = e, \tag{12.22}$$

се нарича *конично сечение*. В зависимост от стойностите на e коничните сечения се разделят на три вида:

1) *елипса* при $e < 1$;
2) *парабола* при $e = 1$;

3) *хипербола* при $e > 1$.

Точката F, правата g и числото e се наричат съответно *фокус*, *директриса* и *числен ексцентрицитет* на коничното сечение. Разстоянието $d(F, g)$ се нарича *фокален параметър*.

За всяко от трите конични сечения ще дадем определения, еквивалентни на Определение 12.4.

Определение 12.5 (Елипса). Множество от точки M в една равнина, за които сумата от разстоянията до две фиксирани точки F_1 и F_2 от същата равнина е постоянна величина (по-голяма от разстоянието между F_1 и F_2), се нарича *елипса*. Ако означим $d(M, F_1) = r_1$ и $d(M, F_2) = r_2$, то $r_1 + r_2 = 2a$, където $a > 0$. Точките F_1 и F_2 се наричат *фокуси* на елипсата, а разстоянията r_1 и r_2 – *фокални радиуси* на точката M.

Забележка 12.3. Относно ортонормирана координатна система каноничното уравнение на елипса има вида (вж. Теорема 12.2)

$$\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{12.23}$$

където $a > b > 0$.

Определение 12.6. Числото c, определено от равенството

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \tag{12.24}$$

се нарича *линеен ексцентрицитет* на елипсата. Численият ексцентрицитет e се получава от формулата $e = c/a$.

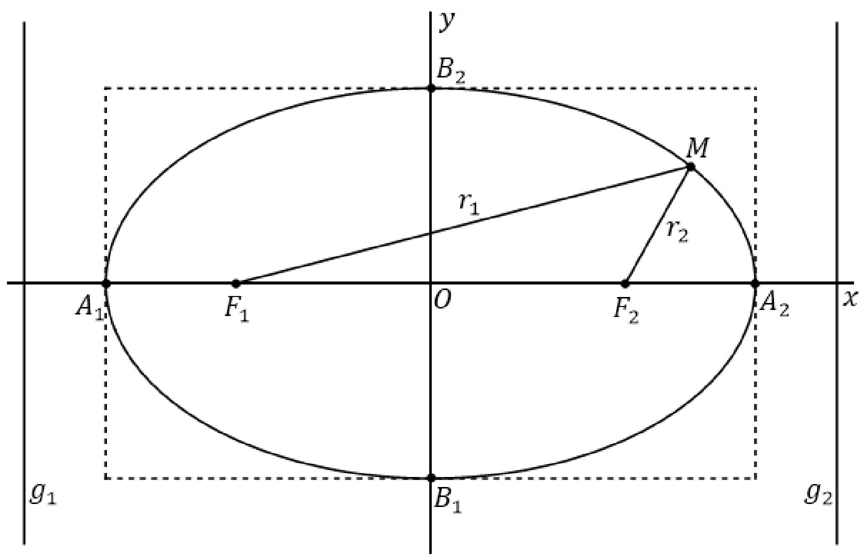
Теорема 12.3. *Фокусите на елипсата имат координати $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, а съответните им директриси се определят от уравненията $g_1 \colon x = -\frac{a^2}{c}$ и $g_2 \colon x = \frac{a^2}{c}$ (или $g_1 : x = -\frac{a}{e}$, $g_2 : x = \frac{a}{e}$). Фокалните радиуси r_1 и r_2 на точката $M(x, y)$ от елипсата се пресмятат чрез: $r_1 = a + ex$ и $r_2 = a - ex$.*

Забележка 12.4. Ако двата фокуса на една елипса съвпадат, т.е. $a = b$ ($e = 0$), то уравнението (12.23) задава окръжност с център координатното начало и радиус a.

Забележка 12.5. От уравнението (12.23) се вижда, че елипсата е разположена симетрично относно началото на координатната система и двете координатни оси. Координатното начало е *център* (на симетрия) на елипсата, а осите Ox и Oy – нейни *оси* (на симетрия).

Определение 12.7. Пресечните точки на елипсата с Ox и Oy, т.е. точките $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ (вж. Фигура 12.4), се наричат *върхове* на елипсата.

Определение 12.8. Отсечките A_1A_2 и B_1B_2, съответно с дължини $2a$ и $2b$, се наричат *голяма (фокална) ос* и *малка (нефокална) ос* на елипсата. Отсечките OA_2 и OB_2, съответно с дължини a и b, се наричат *голяма полуос* и *малка полуос*.



Фигура 12.4. Елипса

Забележка 12.6. Ако $b > a$, то фокусите на елипсата лежат върху оста Oy, т.е. имат координати $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$, където $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, а съответните им директриси имат уравнения $g_{1,2}\colon y = \pm\frac{b^2}{c}$. В този случай численият ексцентрицитет се пресмята по формулата $e = c/b$.

Забележка 12.7 (Оптично свойство на елипсата). Ако разгледаме вдлъбнато огледало, получено от завъртането на дъга от елипса, то всеки лъч, излизащ от единия фокус, след отразяване преминава през другия фокус.

Определение 12.9 (Хипербола). Множество от точки M в една равнина, за които абсолютната стойност на разликата от разстоянията до две различни дадени точки F_1 и F_2 от същата равнина е постоянна величина (по-малка от разстоянието между F_1 и F_2), се нарича *хипербола*. Ако означим $d(M, F_1) = r_1$ и $d(M, F_2) = r_2$, то е в сила $|r_1 - r_2| = 2a$, където $a > 0$. Точките F_1 и F_2 се наричат *фокуси* на хиперболата, а разстоянията r_1 и r_2 – *фокални радиуси* на точката M.

Забележка 12.8. Относно ортонормирана координатна система каноничното уравнение на хипербола има вида (вж. Теорема 12.2)

$$\chi\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{12.25}$$

където $a, b > 0$.

Определение 12.10. Числото c, определено от равенството

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{12.26}$$

се нарича *линеен ексцентрицитет* на хиперболата. Численият ексцентрицитет e се получава по формулата $e = c/a$.

Теорема 12.4. *Фокусите на хиперболата са с координати $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, а съответните им директриси се определят от уравненията $g_1\colon x = -\frac{a^2}{c}$ и $g_2\colon x = \frac{a^2}{c}$. Фокалните радиуси r_1 и r_2 на точката $M(x, y)$ от хиперболата се пресмятат чрез: $r_1 = ex + a$ и $r_2 = ex - a$.*

Забележка 12.9. В случая $a = b$ хиперболата се нарича *равнораменна*. Численият ексцентрицитет на такава хипербола $e = \sqrt{2}$.

Забележка 12.10. От уравнението (12.25) се вижда, че хиперболата е разположена симетрично относно началото на координатната система и всяка от координатните оси. Координатното начало е *център* на хиперболата, а Ox и Oy – нейни *оси*. Хиперболата се състои от два клона, разположени извън ивицата, определена от директрисите ѝ.

Определение 12.11. Пресечните точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ на хиперболата с оста Ox (вж. Фигура 12.5) се наричат *реални върхове*, а точките $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ *имагинерни върхове* на хиперболата.

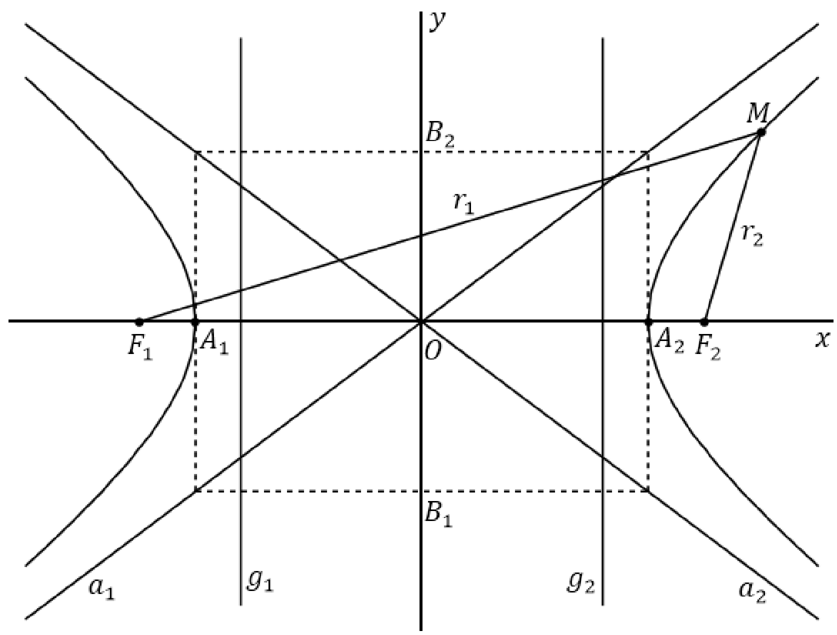
Определение 12.12. Отсечките A_1A_2 и B_1B_2, съответно с дължини $2a$ и $2b$, се наричат *реална фокална ос* и *имагинерна нефокална ос*.

Определение 12.13. Правите $a_1\colon y = -\frac{b}{a}x$ и $a_2\colon y = \frac{b}{a}x$ се наричат *асимптоти* на хиперболата.

Забележка 12.11. Ако фокусите на хиперболата лежат върху оста Oy, т.е. $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$, то каноничното ѝ уравнение има вида

$$\chi\colon \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Съответните на тези фокуси директриси се определят от $g_1\colon y = \pm\frac{b^2}{c}$, а численият ексцентрицитет се пресмята чрез $e = c/b$. Правите $a_{1,2}\colon y = \pm\frac{b}{a}x$ са асимптоти на тази хипербола.



Фигура 12.5. Хипербола

Определение 12.14 (Парабола). Множество от точки M в една равнина, които се намират на равни разстояния от една фиксирана точка F и неминаваща през нея права g от същата равнина, се нарича *парабола*. Точката F се нарича *фокус*, а правата g – *директриса* на параболата. Отсечката $FM = r$ се нарича *фокален радиус* на точката M.

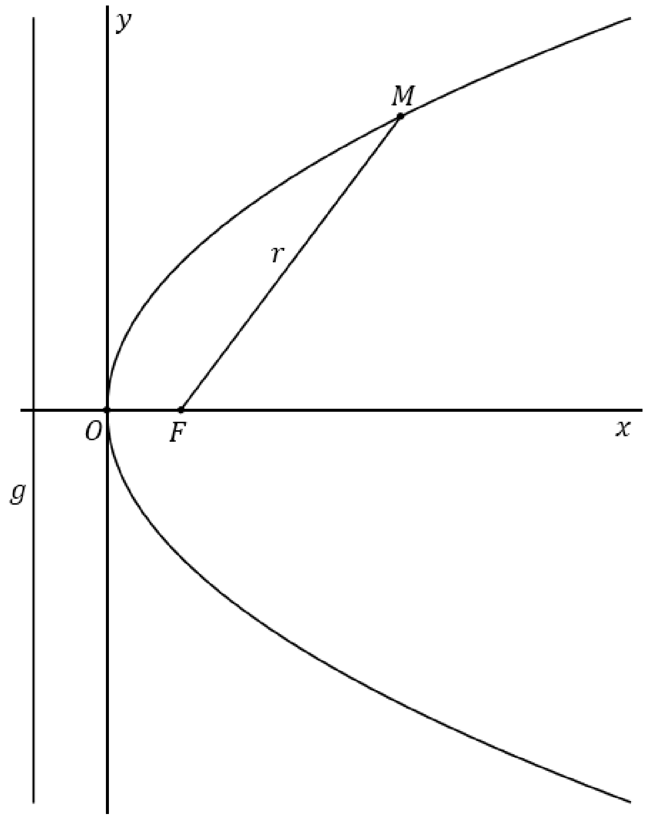
Забележка 12.12. Относно ортонормирана координатна система каноничното уравнение на парабола има вида (вж. Теорема 12.2)

$$\pi\colon y^2 = 2px, \tag{12.27}$$

където $p > 0$ се нарича *параметър* на параболата.

Теорема 12.5. *Фокусът на параболата е* $F(\frac{p}{2}, 0)$*, а дирекрисата е с уравнение* $g\colon x = -\frac{p}{2}$.

Забележка 12.13. От уравнението (12.27) се вижда, че параболата π минава през точката $O(0,0)$, която е неин *връх*, разположена е в дясната полуравнина относно Oy и е симетрична относно оста Ox, която е нейна *ос* (на симетрия). Координатната ос Oy се нарича *върхова допирателна* на параболата π.



Фигура 12.6. Парабола

Забележка 12.14. Парабола с ос Ox е разположена в лявата полуравнина относно оста Oy, точно когато нейното уравнение е от вида $y^2 = -2px$, $p > 0$. Фокусът и директрисата на тази парабола се определят съответно от $F(-\frac{p}{2}, 0)$ и $g\colon x = \frac{p}{2}$.

Забележка 12.15 (Оптично свойство на параболата). Ако разгледаме вдлъбнато огледало, получено от завъртането на дъга от парабола, единият край на която е върхът на параболата, то всеки лъч, излизащ от фокуса, след отразяването си ще бъде успореден на оста на параболата.

Теорема 12.6 (Допирателна към конично сечение)**.** *Допирателна в точката $M_0(x_0, y_0)$ от конично сечение се задава:*

1) за елипсата с уравнение (12.23) чрез

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1; \tag{12.28}$$

2) за хиперболата с уравнение (12.25) чрез

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1; \tag{12.29}$$

3) за параболата с уравнение (12.27) чрез

$$y_0y = p(x + x_0). \tag{12.30}$$

Определение 12.15. Отсечка, свързваща две точки от едно конично сечение, се нарича *хорда*.

Определение 12.16 (Диаметър на конично сечение). Геометричното място на средите на успоредните помежду си хорди на едно конично сечение се нарича *диаметър* на коничното сечение.

Теорема 12.7. *Диаметър на конично сечение се задава:*
1) за елипсата с уравнение (12.23) чрез

$$y = -\frac{b^2}{a^2k}, \tag{12.31}$$

2) за хиперболата с уравнение (12.25) чрез

$$y = \frac{b^2}{a^2k}x, \tag{12.32}$$

3) за параболата с уравнение (12.27) чрез

$$y = \frac{p}{k}, \tag{12.33}$$

където k е ъгловият коефициент на успоредните помежду си хорди на съответното конично сечение.

Забележка 12.16. Диаметрите на елипсата с уравнение (12.23) и на хиперболата с уравнение (12.25) минават през началото на координатната система, а диаметрите на параболата с уравнение (12.27) са успоредни на Ox.

Определение 12.17. Два диаметъра се наричат *спрегнати*, ако единият разполовява хордите, успоредни на другия. В такъв случай и вторият диаметър разполовява хордите, които са успоредни на първия.

Теорема 12.8. *Ъгловите коефициенти k и k' на два спрегнати диаметъра на елипсата (12.23) удовлетворяват зависимостта*

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2},$$

а на хиперболата (12.25) –

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}.$$

Задача 12.2. *Намерете полуосите, координатите на фокусите, числения ексцентрицитет и уравненията на директрисите на елипсата: а)* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$*; б)* $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$*; в)* $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

Решение. а) Полуосите са $a = \sqrt{25} = 5$ и $b = \sqrt{9} = 3$. Тъй като $a > b$, то Ox е фокалната ос на елипсата. Пресмятаме линейния ексцентрицитет $c = \sqrt{25 - 9} = 4$. Следователно фокусите имат координати $F_1(-4, 0)$ и $F_2(4, 0)$. Съответните им директриси се задават с уравненията $g_1\colon x = -\frac{25}{4}$ и $g_2\colon x = \frac{25}{4}$. За числения ексцентрицитет получаваме $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

б) Полуосите са $a = \sqrt{7}$ и $b = 4$. Понеже $b > a$, то фокалната ос на тази елипса е Oy. Пресмятаме $c = \sqrt{16 - 7} = 3$. Следователно координатите на фокусите са $F_1(0, -3)$ и $F_2(0, 3)$, а съответните им директриси имат уравнения $g_1\colon y = -\frac{16}{3}$ и $g_2\colon y = \frac{16}{3}$. Ексцентрицитетът на елипсата е $e = \frac{c}{b} = \frac{3}{4}$.

Отговори. в) $a = 6$, $b = 2\sqrt{5}$; $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$; $e = \frac{2}{3}$; $g_{1,2}\colon x = \pm 9$.

Задача 12.3. *Намерете полуосите, координатите на фокусите, числения ексцентрицитет, уравненията на директрисите и уравненията на асимптотите на хиперболата:*
а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$*; б)* $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$*; в)* $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$.

Решение. а) Полуосите са $a = 4$ и $b = 3$. От уравнението на хиперболата се вижда, че фокалната ѝ ос е Ox. Като пресметнем $c = \sqrt{16 + 9} = 5$, намираме фокусите $F_1(-5, 0)$ и $F_2(5, 0)$, а съответните им директриси се определят с уравненията $g_1\colon x = -\frac{16}{5}$ и $g_2\colon x = \frac{16}{5}$. Ексцентрицитетът е $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$, а уравненията на асимптотите са $a_2\colon y = -\frac{3}{4}x$ и $a_1\colon y = \frac{3}{4}x$.

б) Полуосите са $a = 8$ и $b = 6$. От уравнението се вижда, че Oy е фокалната ос на хиперболата. Пресмятаме $c = \sqrt{64 + 36} = 10$. Следователно фокусите са $F_1(0, -10)$ и $F_2(0, 10)$. Съответните им директриси имат уравнения $g_1\colon y = -\frac{18}{5}$ и $g_2\colon y = \frac{18}{5}$. Ексцентрицитетът на хиперболата е $e = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$, а асимптотите се задават с уравненията $a_{1,2}\colon y = \pm\frac{3}{4}x$.

Отговори. в) $a = 4$, $b = 2\sqrt{5}$; $F_1(-6, 0)$, $F_2(6, 0)$; $e = \frac{3}{2}$; $g_{1,2}\colon x = \pm\frac{8}{3}$; $a_{1,2}\colon y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$.

Задача 12.4. *Намерете параметъра, координатите на фокуса и уравнението на директрисата на параболата:*
а) $y^2 = 8x$*; б)* $y^2 = -4x$*.*

Решение. а) За параметъра на параболата имаме $2p = 8$, следователно $p = 4$. Тогава фокусът е $F(2, 0)$, а директрисата се определя с уравнението $x = -2$.

б) От уравнението на параболата се вижда, че тя е разположена в лявата полуравнина относно Oy ($x \leq 0$). Параметърът на параболата е $p = 2$. Следователно фокусът е $F(-1, 0)$, а директрисата има уравнение $g\colon x = 1$.

Задача 12.5. *Намерете уравнението на елипса, чиито фокуси лежат на оста* Ox *и са разположени симетрично относно координатното начало, ако:*

а) осите на елипсата имат дължини 6 *и* 4*;*
б) голямата ос е 10 *и разстоянието между фокусите е* 8*;*
в) разстоянието между фокусите е 12 *и ексцентрицитетът е* $e = 6/7$*;*
г) малката ос е 16 *и* $e = 3/5$*;*
д) точките $M_1(4, -\sqrt{3})$ *и* $M_2(2\sqrt{2}, 3)$ *са от елипсата;*
е) точката $M(-2\sqrt{5}, 2)$ *е от елипсата и* $b = 3$*.*

Решение. а) Осите на елипсата имат дължини $2a = 6$ и $2b = 4$, откъдето намираме $a = 3$ и $b = 2$. Тогава търсеното уравнение е $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, което може да бъде записано във вида $4x^2 + 9y^2 = 36$.

б) Дължината на голямата ос е $2a = 10$, а разстоянието между фокусите е $2c = 8$, откъдето $a = 5$ и $c = 4$. От формулата $c^2 = a^2 - b^2$ намираме $b^2 = 25 - 16 = 9$. Следователно уравнението на елипсата е $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

в) От $2c = 12$ намираме $c = 6$. Тъй като $e = \frac{c}{a} = \frac{6}{7}$, то $a = 7$. Аналогично на подточка б), намираме $b^2 = 13$. Уравнението на търсената елипса е $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{13} = 1$.

д) Тъй като точките M_1 и M_2 лежат върху търсената елипса, то координатите им удовлетворяват уравнението на тази елипса, т.е. уравнението $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тогава, чрез заместване на координатите на двете точки в последното уравнение, достигаме до системата

$$\left|\begin{array}{l} 3a^2 + 16b^2 = a^2b^2 \\ 9a^2 + 8b^2 = a^2b^2, \end{array}\right.$$

откъдето намираме $a^2 = 20$ и $b^2 = 15$. Следователно уравнението на елипсата е $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$.

Отговори. г) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; е) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.

Задача 12.6. *Намерете уравнението на хипербола, чиито фокуси лежат на оста Ox и са симетрично разположени относно координатното начало, ако:*

а) осите на хиперболата имат дължини 10 *и* 8*;*
б) голямата ос е 16 *и ексцентрицитетът* $e=\frac{5}{4}$*;*
в) уравненията на асимптотите са $y=\pm\frac{4}{3}x$ *и разстоянието между фокусите е* 20*;*
г) разстоянието между директрисите е $\frac{32}{5}$ *и малката ос е 6;*
д) точката $M(-5,3)$ *е от хиперболата и* $e=\sqrt{2}$*;*
е) точките $M_1(6,-1)$ *и* $M_2(-8,2\sqrt{2})$ *лежат на хиперболата.*

Решение. в) От уравненията на асимптотите получаваме $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$, т.е. $4a=3b$. От разстоянието между фокусите $2c=20$ намираме $c=10$. Тъй като $c^2=a^2+b^2$, то $a^2+b^2=100$. Следователно $a=6$, $b=8$. Тогава уравнението на хиперболата е $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

г) Разстоянието между директрисите е $\frac{2a^2}{c}=\frac{32}{5}$, откъдето получаваме $5a^2=16c$. Дължината на малката ос е $2b=6$, следователно $b=3$. Тогава $c^2=a^2+9$. Така намираме $a^2=16$ и $b^2=9$. Търсеното уравнение е $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

д) Тъй като $e=\sqrt{2}$, то хиперболата е равнораменна, т.е. $a=b$. Тогава уравнението ѝ има вида $x^2-y^2=a^2$. Чрез заместване на координатите на точката M в това уравнение намираме $a^2=16$. Следователно получаваме $x^2-y^2=16$.

Отговори. а) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; б) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; е) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$.

Задача 12.7. *Намерете уравнението на парабола с ос Ox и връх координатното начало, ако:*

а) фокусът ѝ е $F(\frac{3}{2},0)$*;*
б) директрисата ѝ има уравнение $x=4$*;*
в) параболата минава през точката $M(2,-4)$*.*

Решение. а) Тъй като фокусът на параболата лежи върху положителната посока на Ox, то уравнението ѝ е от вида $y^2=2px$, $p>0$. От първата координата на фокуса за параметъра на параболата получаваме $\frac{p}{2}=\frac{3}{2}$, което означава, че $p=3$. Следователно търсеното уравнение е $y^2=6x$.

б) Тъй като директрисата на параболата лежи в дясната полуравнина относно Oy, то уравнението на параболата е от вида $y^2=-2px$, $p>0$ (параболата е разположена в лявата полуравнина). От уравнението на директрисата за параметъра намираме

$\frac{p}{2} = 4$. Следователно $p = 8$, откъдето получаваме уравнението $y^2 = -16x$.

Отговори. в) $y^2 = 8x$.

Задача 12.8. *Намерете ексцентрицитета e на елипса, ако:*

а) малката ос се вижда под ъгъл 60° от фокусите;
б) отсечката, съединяваща фокусите, се вижда под прав ъгъл от върховете на малката ос;
в) разстоянието между фокусите е равно на разстоянието между краищата на малката и голямата ос;
г) разстоянието между директрисите е четири пъти по-голямо от разстоянието между фокусите.

Решение. а) Съгласно условието $\sphericalangle B_1F_2B_2 = 60^\circ$ (вж. Фигура 12.4). Следователно $\triangle\ B_1B_2F_2$ е равностранен, което означава, че $B_2F_2 = B_1B_2 = 2b$. Тогава от правоъгълния $\triangle\ OF_2B_2$ имаме $4b^2 = b^2 + c^2$. Оттук получаваме $b^2 = c^2/3$, което заедно с равенството $c^2 = a^2 - b^2$ означава, че $\frac{c^2}{3} = \frac{a^2}{4}$. Следователно $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Тъй като $\triangle\ F_1F_2B_2$ е правоъгълен и равнобедрен, то имаме $B_2F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}F_1F_2 = c\sqrt{2}$. От последното равенство, използвайки питагоровата теорема, както в подточка а), получаваме $b = c$. Следователно $c^2 = a^2/2$ и $e = 1/\sqrt{2}$.

Упътване. Използвайте, че: в) $F_1F_2 = 2c$, $A_2B_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$; г) разстоянието между директрисите е $\frac{2a}{e}$.

Отговори. в) $e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; г) $e = \frac{1}{2}$.

Задача 12.9. *Намерете уравнението на хипербола χ, чиито върхове съвпадат с фокусите на елипсата $\varepsilon\colon \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, а фокусите ѝ съвпадат с върховете на същата елипса.*

Решение. Фокусите на дадената елипса са $F_1(-3, 0)$ и $F_2(3, 0)$. Следователно за параметъра a на търсената хипербола, съгласно условието, имаме $a = 3$ и уравнението на хиперболата е от вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Върховете на фокалната ос на елипсата са $A_1(-5, 0)$ и $A_2(5, 0)$, които съгласно условието трябва да бъдат фокуси на търсената хипербола. Следователно за линейния ѝ ексцентрицитет имаме $c = 5$. Тогава от $b^2 = c^2 - a^2$ пресмятаме $b^2 = 16$. Търсената хипербола има уравнение $\chi\colon \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Задача 12.10. *Намерете уравнението на хипербола с числен ексцентрицитет $e = \frac{3}{2}$, ако фокусите ѝ съвпадат с фокусите на елипсата $\varepsilon\colon \frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{2} = 1$.*

Отговори. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Задача 12.11. *Намерете уравнението на елипса, ако $F(-1,-4)$ е неин фокус, правата $g\colon x-2=0$ е съответната на този фокус директриса, а точката $A(-3,-5)$ лежи върху елипсата.*

Решение. Съгласно определението за конично сечение, отношението на разстоянията от точката A до фокуса F и от A до директрисата g е равно на числения ексцентрицитет на търсената елипса. Намираме $d(A,g)=5$ и $\overrightarrow{AF}=(2,1)$, откъдето $d(A,F)=|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{5}$. Тогава $e=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Сега отново използваме определението за конично сечение, съгласно което търсената елипса е геометричното място на точки $M(x,y)$, за които $\dfrac{d(M,F)}{d(M,g)}=e$. От друга страна,

$$d(M,F)=|\overrightarrow{FM}|=\sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2}, \quad d(M,g)=|x-2|.$$

Тогава за уравнението на елипсата получаваме

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2}=\tfrac{1}{\sqrt{5}}|x-2|.$$

Оттук достигаме до уравнението

$$\varepsilon\colon 4x^2+5y^2+14x+40y+81=0.$$

Задача 12.12. *Намерете уравнението на хипербола χ с числен ексцентрицитет $e=\sqrt{5}$, фокус $F(2,-3)$ и съответна на този фокус директриса $3x-y+3=0$.*

Упътване. Както в предишната задача, използвайте определението за конично сечение.

Отговори. $\chi\colon 7x^2-6xy-y^2+26x-18y-17=0$.

Задача 12.13. *Намерете уравнението на допирателните прави l през точката M към коничното сечение c, ако:*
а) $M(2,-1)$, $c: x^2+4y^2=8$; б) $M(4,2)$, $c\colon x^2-2y^2=8$.

Решение. а) Точката M лежи върху кривата c и през нея минава единствена допирателна към c. Тъй като c е елипса, то уравнението ѝ има вида $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. Като се вземе предвид (12.28), получаваме уравнението на допирателната $l\colon x-2y-4=0$.

б) Аналогично на подточка а), точката M лежи върху дадената крива, която е хипербола. Като използваме (12.29), получаваме уравнението на единствената допирателна към кривата през тази точка $l\colon x-y-2=0$.

Задача 12.14. *Намерете допирателните към елипса $c\colon x^2+9y^2=9$ в точка $M(5,0)$.*

Решение. Нека означим $f(x,y) = x^2 + 9y^2 - 9$, т.е. уравнението на тази крива е $f(x,y) = 0$. Тогава за координатите на дадената точка M пресмятаме $f(M) = 25 - 9 = 16 > 0$, което показва, че точката M е външна за елипсата. Следователно през нея минават две допирателни към елипсата.

Уравнението на произволна права l през точката M с ъглов коефициент k се определя от $l\colon y = k(x-5)$. Правата l е допирателна за крива c, точно когато l и c имат единствена обща точка. Следователно системата от уравненията на правата и елипсата

$$\left|\begin{array}{l} x^2 + 9y^2 = 9 \\ y = k(x-5) \end{array}\right.$$

трябва да има единствено решение. След заместване на y от уравнението на l в уравнението на елипсата и преработка достигаме до квадратното уравнение

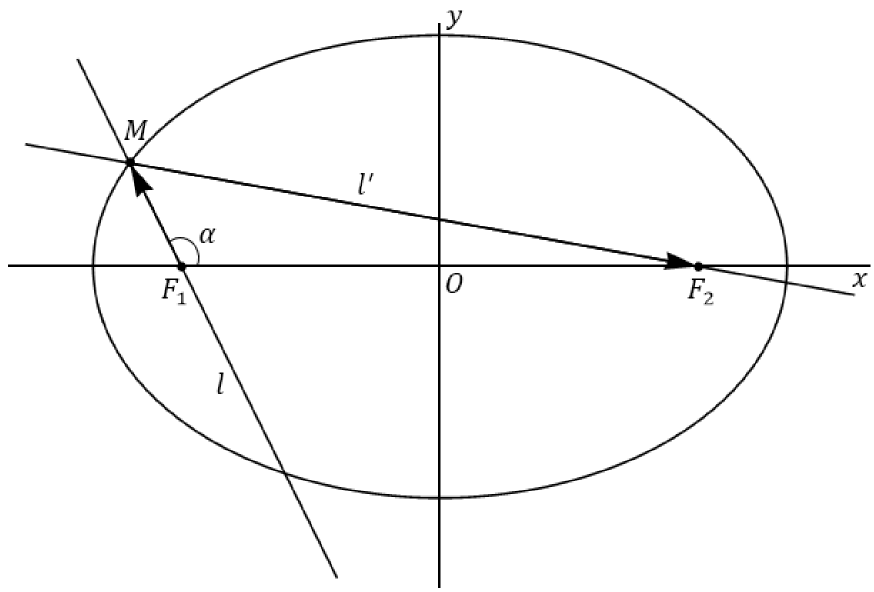
$$(1 + 9k^2)x^2 - 90k^2x + 225k^2 - 9 = 0,$$

което трябва да има единствен корен. Последното условие е изпълнено, точно когато дискриминантата на уравнението е равна на нула. Пресмятаме $D = 9(1 - 16k^2)$. Следователно $D = 0$, точно когато $16k^2 - 1 = 0$. Корените на квадратното уравнение са $k_1 = -\frac{1}{4}$ и $k_2 = \frac{1}{4}$. Тогава, като заместим получените стойности за ъгловия коефициент, намираме уравненията на двете допирателни през дадената точка към елипсата $l_1\colon x + 4y - 5 = 0$ и $l_2\colon x - 4y - 5 = 0$.

Задача 12.15. *Да се намерят допирателните към хиперболата* $2y^2 - x^2 = 16$*, които са успоредни на правата* $2x + 4y - 5 = 0$.

Решение. Тъй като търсените прави са успоредни на дадената права, техните общи уравнения са от вида $l\colon x + 2y + m = 0$. Ще намерим стойностите на m, за които правите l се допират до кривата. Аналогично на Задача 12.14, системата от уравненията на правата l и на хиперболата трябва да има единствено решение. Като заместим x от уравнението на правата в уравнението на хиперболата, достигаме до квадратното уравнение $2y^2 + 4my + m^2 + 16 = 0$. Последното уравнение има единствен корен, точно когато дискриминантата $D = 2(m^2 - 16)$ е равна на нула. Така намираме $m_1 = -4$ и $m_2 = 4$. Тогава търсените допирателни са $l_1\colon x + 2y - 4 = 0$ и $l_2\colon x + 2y + 4 = 0$.

Задача 12.16. *От левия фокус на елипсата* $\varepsilon\colon x^2/45 + y^2/20 = 1$ *е пуснат светлинен лъч* l *под ъгъл* α*, както е показано на Фигура 12.7. Намерете уравнението на правата, съдържаща отразения лъч* l'*, ако* $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

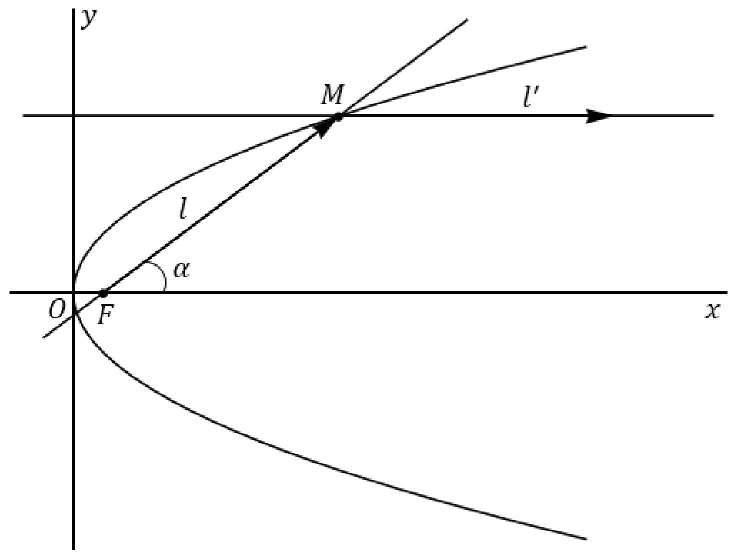


Фигура 12.7. Чертеж към Задача 12.16

Решение. Левият фокус на елипсата е $F_1(-5,0)$. Тогава декартовото уравнение на правата l, съдържаща пуснатия от този фокус светлинен лъч, е $l\colon y=-2(x+5)$. Заместваме y от това уравнение в уравнението на елипсата и търсим пресечната им точка, която се намира във втори квадрант (от $\operatorname{tg}\alpha<0$ следва $\alpha>\pi/2$). Това е точката $M(-6,2)$. За да получим уравнението на правата l', ще използваме оптичното свойство на елипсата, според което отразеният лъч минава през другия фокус на елипсата. Следователно l' е правата през $M(-6,2)$ и $F_2(5,0)$, т.е. $l'\colon 2x+11y-10=0$.

Задача 12.17. *От фокуса на параболата $\pi\colon y^2=12x$, е пуснат светлинен лъч l под ъгъл α, както е показано на Фигура 12.8. Намерете уравнението на правата l', съдържаща отразения от параболата лъч, ако $\operatorname{tg}\alpha=3/4$.*

Решение. Фокусът на параболата е $F(3,0)$. Декартовото уравнение на правата е $l\colon y=3/4(x-3)$. Като изразим x от уравнението на l и го заместим в уравнението на параболата π, намираме пресечната им точка в първи квадрант $M(27,18)$. Като се вземе предвид оптичното свойство на параболата, според което отразеният лъч е успореден на оста на параболата Ox, получаваме уравнението $l'\colon y-18=0$.



Фигура 12.8. Чертеж към Задача 12.17

Задача 12.18. *Намерете уравнението на диаметъра на елипсата* $\varepsilon\colon x^2/25 + y^2/16 = 1$*, който минава през средата на хордата, отсечена от правата* $l\colon 2x - y - 3 = 0$.

Решение. Търсеният диаметър d има уравнение $d\colon y = -\frac{b^2}{a^2k}x$, където k е ъгловият коефициент на дадената права l, съдържаща хордата. В това уравнение заместваме $a^2 = 25$, $b^2 = 16$ и $k = 2$. Следователно $d\colon 8x + 25y = 0$.

Задача 12.19. *Намерете уравнението на диаметъра на параболата* $\pi\colon y^2 = 12x$*, който минава през средата на хордата, отсечена от правата* $l\colon 3x + y - 5 = 0$.

Решение. Търсеният диаметър d има уравнение $d\colon y = \frac{p}{k}$, където k е ъгловият коефициент на дадената права l. Заместваме $p = 6$ и $k = -3$ и така получаваме $d\colon y + 2 = 0$.

Задача 12.20. *Дадена е хиперболата* $\chi\colon x^2/3 - y^2/7 = 1$*. Намерете уравнението на правата, съдържаща хордата, чиято среда е точката* $M(3, -1)$.

Решение. Правата l, съдържаща търсената хорда, има декартово уравнение $l\colon y = k(x-3)-1$. Следователно диаметърът d, минаващ през средата M на хордата, се определя от $d\colon y = \frac{b^2}{a^2k}x$. Заместваме

$a^2 = 3$ и $b^2 = 7$ и получаваме $d\colon y = \frac{7}{3k}x$. За намирането на k използваме, че d минава през M, откъдето $k = -7$. Тогава уравнението на търсената права е $l\colon 7x + y - 20 = 0$.

Задача 12.21. *Намерете уравненията на два спрегнати диаметъра на елипсата $\varepsilon\colon x^2 + 4y^2 = 1$, ако единият от тях сключва ъгъл 45° с положителната посока на оста Ox.*

Решение. Нека d е диаметърът, сключващ ъгъл 45° с положителната посока на Ox. Тъй като d минава през центъра на елипсата, т.е. през координатното начало, то уравнението му е $d\colon x - y = 0$. Тогава, ако d' е спрегнатият на d диаметър, то за ъгловите им коефициенти k' и k е изпълнено условието $kk' = -b^2/a^2$. От уравнението на елипсата намираме $a^2 = 1$ и $b^2 = 1/4$, а $k = 1$. Тогава $k' = -1/4$. Следователно $d'\colon y = -1/4x$, т.е. $d'\colon x + 4y = 0$.

Задача 12.22. *Намерете уравненията на два спрегнати диаметъра на хиперболата $\chi\colon x^2 - 4y^2 = 4$, ако единият от тях минава през точката $M(8, 1)$.*

Решение. Нека d е диаметърът, минаващ през точката M. Освен това d минава и през координатното начало. Следователно имаме $d\colon x - 8y = 0$. Ако d' е спрегнатият на d диаметър, то за ъгловите им коефициенти k' и k е в сила $kk' = b^2/a^2$. Имаме $a^2 = 4$, $b^2 = 1$ и $k = 1/8$. Следователно $k' = 2$ и $d'\colon 2x - y = 0$.

13. Равнина, права и сфера в пространството

> Съжалявам, че като студент не стигнах достатъчно далеч в разбирането на поне някои от водещите принципи в математиката, защото хората с такива умения, изглежда, притежават допълнителен усет.
>
> *Чарлз Дарвин*

13.1. Уравнение на равнина и права.

Нека в тримерното пространство относно произволна координатна система $Oxyz$ са дадени точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и неколинеарните вектори $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Разглеждаме множеството от точки $M(x, y, z)$ в пространството, за които векторът $\overrightarrow{M_0M}$ е компланарен с векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$, т.е.

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q},$$

където $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Това множество представлява *равнина*, която ще означим с α. Ще покажем различни начини за задаване на уравнението на α.

Определение 13.1. Нека $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ са съответно радиус-векторите на точките M и M_0 и векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ са компланарни (лежат в една равнина) с $\overrightarrow{M_0M}$. Тогава уравнението

$$\alpha\colon \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{p} + \mu\vec{q} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \tag{13.1}$$

се нарича *векторно параметрично уравнение* на равнината α. Точките M_0 и M се наричат съответно *фиксирана* и *текуща точка*, а числата λ и μ се наричат *параметри* на равнината.

Определение 13.2. Координатният запис на (13.1)

$$\alpha\colon \left|\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda p_1 + \mu q_1 \\ y &= y_0 + \lambda p_2 + \mu q_2 \\ z &= z_0 + \lambda p_3 + \mu q_3 \end{aligned}\right. \tag{13.2}$$

се наричат *скаларно параметрични уравнения* на равнината α.

Теорема 13.1. *Равнината α, минаваща през точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и компланарна с векторите $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$, се определя от уравнението*

$$\alpha\colon \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{13.3}$$

Определение 13.3. Нека $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ са компланарни с равнината α и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Тогава

$$\alpha\colon Ax + By + Cz + D = 0, \tag{13.4}$$

където $A = p_2q_3 - p_3q_2$, $B = p_3q_1 - p_1q_3$, $C = p_1q_2 - p_2q_1$ и $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, се нарича *общо уравнение* на равнината α. Векторът $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$ се нарича *нормален вектор* на α.

Забележка 13.1. Нека относно ортонормирана КС $Oxyz$ е зададена равнина α с уравнение (13.4). Тогава $\overrightarrow{N} = \vec{p} \times \vec{q}$, т.е. $\overrightarrow{N}$ е перпендикулярен на всеки вектор, компланарен с равнината α.

Забележка 13.2. Уравнението на равнина α, която минава през фиксираната точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и има нормален вектор $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$, е

$$\alpha\colon A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{13.5}$$

Теорема 13.2. *Равнината α, съдържаща неколинеарните точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, се определя с уравнението*

$$\alpha\colon \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{13.6}$$

Теорема 13.3 (Взаимно положение на равнина и КС)**.** *Нека относно ортонормирана КС е зададена равнината α с общо уравнение* (13.4) *и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Тогава:*

1) Равнината α минава през координатното начало $O(0, 0, 0)$, точно когато $D = 0$.
2) Равнината α е успоредна на оста Ox, точно когато $A = 0$.
3) Равнината α е успоредна на оста Oy, точно когато $B = 0$.
4) Равнината α е успоредна на оста Oz, точно когато $C = 0$.
5) Равнината α съдържа оста Ox, точно когато $A = D = 0$.
6) Равнината α съдържа оста Oy, точно когато $B = D = 0$.
7) Равнината α съдържа оста Oz, точно когато $C = D = 0$.

8) Равнината α е успоредна на координатната равнина Oxy, точно когато уравнението ѝ е $z = z_0$.

9) Равнината α е успоредна на координатната равнина Oxz, точно когато уравнението ѝ е $y = y_0$.

10) Равнината α е успоредна на координатната равнина Oyz, точно когато уравнението ѝ е от вида $x = x_0$.

Следствие 13.1. *Координатните равнини имат следните общи уравнения $Oxy\colon z = 0$, $Oxz\colon y = 0$ и $Oyz\colon x = 0$.*

Теорема 13.4 (Взаимно положение на две равнини)**.** *Нека относно ортонормирана КС са дадени равнини $\alpha_1\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ и $\alpha_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогава:*

1) α_1 и α_2 съвпадат, точно когато $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$;

2) α_1 и α_2 са успоредни, точно когато $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$;

3) α_1 и α_2 се пресичат, точно когато (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) не са пропорционални.

Определение 13.4. Съвкупността от всички равнини, които минават през една права, се нарича *сноп равнини*, а правата се нарича *носител на снопа*.

Теорема 13.5. *Ако $\alpha_1\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ и $\alpha_2\colon A_2x+B_2y+C_2z + D_2 = 0$ са две равнини от един сноп, то всяка равнина от същия сноп има общо уравнение от вида*

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (13.7)$$

където $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Теорема 13.6 (Разстояние от точка до равнина)**.** *Нека относно ортонормирана КС са дадени точката $M(x_0, y_0, z_0)$ и равнината $\alpha\colon Ax+By+Cz+D = 0$. Тогава ориентираното разстояние $\delta(M, \alpha)$ и абсолютното разстояние $d(M, \alpha)$ се пресмятат по формулите:*

$$\delta(M, \alpha) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (13.8)$$

и

$$d(M, \alpha) = |\delta(M, \alpha)|. \quad (13.9)$$

Забележка 13.3. Точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ се намират в едно и също полупространство относно равнината α, ако числата $\alpha(M_1) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ и $\alpha(M_2) = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ са с еднакви знаци, и в различни полупространства относно α, ако $\alpha(M_1)$ и $\alpha(M_2)$ са с противоположни знаци.

Теорема 13.7. *Ако равнините* $\alpha_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *и* $\alpha_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ *се пресичат, то общите уравнения на равнините* β_1 *и* β_2*, които разполовяват двата двустенни ъгъла, образувани от* α_1 *и* α_2*, са*

$$\beta_{1,2}:\ \frac{A_1x + B_1y_+C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y_+C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (13.10)$$

Забележка 13.4. Знакът „+“ се отнася за равнината, разполовяваща ъгъла, съдържащ точките, за които ориентираните разстояния до двете равнини са с еднакви знаци, а знакът „−“ за равнината, разполовяваща ъгъла, съдържащ точките, чиито ориентирани разстояния до двете равнини са с противоположни знаци.

Уравнение на права в пространството.

Нека относно произволна координатна система в тримерното пространство $Oxyz$ разгледаме права g, зададена чрез фиксираната точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулев вектор $\vec{v} = (a, b, c)$, колинеарен с g.

Определение 13.5. Уравненията

$$g\colon \left|\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{array}\right. \qquad (13.11)$$

се наричат *скаларно параметрични уравнения* на правата g.

Определение 13.6. Уравнението

$$g\colon \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad (13.12)$$

се нарича *канонично уравнение* на правата g.

Теорема 13.8. *Нека* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *са две различни точки от правата* g*. Тогава скаларно параметричните и каноничното уравнение на* g *имат съответно вида:*

$$g\colon \left|\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1), \end{array}\right. \qquad (13.13)$$

$$g\colon \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (13.14)$$

Теорема 13.9. *Произволна права g в тримерното пространство може да се зададе като пресечница на две равнини чрез уравнението*

$$g\colon \left| \begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{array} \right. \tag{13.15}$$

където наредените тройки (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) не са пропорционални.

Забележка 13.5. Векторът с координати

$$(B_1C_2 - B_2C_1, A_2C_1 - A_1C_2, A_1B_2 - A_2B_1)$$

е направляващ вектор за правата g, определена с уравнението (13.15). Ако $Oxyz$ е ортонормирана КС, то този вектор е равен на векторното произведение на нормалните вектори $\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$.

Забележка 13.6. Права в тримерното пространство няма общо уравнение, а се представя чрез общите уравнения на две равнини, които я съдържат.

В следващите задачи ще считаме координатната система за дясна ортонормирана, освен ако е указано друго.

Задача 13.1. *Дадена е точката $A(1,2,3)$. Намерете уравненията на:*

- *а) правите g_1, g_2 и g_3 през A, успоредни съответно на Ox, Oy и Oz;*
- *б) равнините α_1, α_2 и α_3 през A, успоредни съответно на Oxy, Oxz и Oyz;*
- *в) равнините β_1, β_2 и β_3 през A, съдържащи съответно Ox, Oy и Oz.*

Решение. а) Координатните оси Ox, Oy и Oz са колинеарни съответно на векторите $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$ и $\vec{e_3} = (0,0,1)$. Тогава направляващите вектори на правите, успоредни на Ox, Oy и Oz, са съответно $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$. Следователно, съгласно (13.12), каноничните уравнения на търсените прави са: $g_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{0}$, $g_2 : \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{0}$ и $g_3 : \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$.

б) Обръщаме внимание, че нормалните вектори на две успоредни равнини са колинеарни помежду си. Тъй като нормалните вектори на координатните равнини Oxy, Oxz и Oyz са съответно $\vec{e_3}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_1}$, то същите вектори ще бъдат нормални и за търсените равнини. Тогава, като вземем предвид (13.5), уравнението на равнината през

A, успоредна на Oxy, е $\alpha_1\colon 0(x-1)+0(x-2)+1(z-3)=0$, т.е. $\alpha_1\colon z-3=0$. Аналогично, другите две равнини имат съответно уравнения $\alpha_2\colon y-2=0$ и $\alpha_3\colon x-1=0$.

в) Ще намерим уравнението на равнината β_1 през A и Ox по два начина.

Начин 1. Тъй като Ox лежи в търсената равнина, то направляващият вектор на Ox и всички точки от Ox са компланарни с равнината. Следователно векторът $\vec{e}_1=(1,0,0)$ и точката $O(0,0,0)$ лежат в търсената равнина. Освен това точката A е също от тази равнина. Тогава насочената отсечка $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$ е компланарна с равнината β_1. Тогава от (13.3) получаваме уравнението на търсената равнина

$$\beta_1\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Оттук получаваме общото уравнение $\beta_1\colon 3y-2z=0$.

Ще отбележим, че в първия ред на детерминантата, вместо координатите на точката A, могат да бъдат използвани координатите на другата известна точка от равнината, например точката O.

Начин 2. Съгласно Теорема 13.3, общият вид на равнина, съдържаща оста Ox, е $By+Cz=0$. Чрез заместване на координатите на точка A в това уравнение намираме $2B+3C=0$. Избираме двойка ненулеви стойности за B и C, които удовлетворяват последното условие – например $B=3$, $C=-2$, и така достигаме до общото уравнение от първия начин.

Уравненията на другите равнини са $\beta_2\colon 3x-z=0$ и $\beta_3\colon 2x-y=0$.

Задача 13.2. *Дадени са точките* $M(2,1,-3)$, $N(3,0,2)$, *правата* $g\colon \frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{3}$ *и равнината* $\alpha\colon 2x+5y-3z+6=0$. *Намерете:*

а) каноничното уравнение на правата l през M, успоредна на g;
б) скаларно параметричните уравнения на правата m през N, перпендикулярна на α;
в) каноничното уравнение на правата p през M и N;
г) каноничното уравнение на правата q през M, която сключва с положителните посоки на координатните оси Ox, Oy и Oz съответно ъгли 60°, 45° и 120°.

Решение. а) Тъй като търсената права l и правата g са успоредни, то направляващите им вектори са колинеарни. Следователно направляващият вектор $\vec{g}=(4,-2,3)$ на g е направляващ вектор за l. Тогава каноничното ѝ уравнение е $l\colon \frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{3}$.

б) Направляващият вектор на права, перпендикулярна на дадена равнина, е колинеарен с нормалния вектор на тази равнина. Нормалният вектор на α е $\overrightarrow{N} = (2, 5, -3)$. Тогава, съгласно (13.11), скаларно параметричните уравнения на търсената права са

$$m\colon \left| \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 2 - 3\lambda. \end{array} \right.$$

в) Тъй като точките M и N са от търсената права, то насочената отсечка $\overrightarrow{MN} = (1, -1, 5)$ е направляващ вектор за нея. Следователно каноничното уравнение на тази права е $p\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{5}$.

г) Директорните косинуси на направлението на търсената права са: $\cos 60°$, $\cos 45°$ и $\cos 120°$. Следователно направляващият вектор на правата е колинеарен с вектора $\vec{v} = (\cos 60°, \cos 45°, \cos 120°) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}) \parallel (1, \sqrt{2}, -1)$. Тогава уравнението на търсената права е $q\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{z+3}{-1}$.

Задача 13.3. *Дадени са точките $A(1, 2, -1)$, $B(0, 2, 3)$, $C(2, -1, -2)$, правата $g\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$ и равнината $\alpha\colon 2x + 2y - z + 7 = 0$. Намерете общото уравнение на равнината β:*

а) през A, успоредна на правите BC и g;
б) през A и B, успоредна на g;
в) през A и B, перпендикулярна на α;
г) през A и g;
д) през A, перпендикулярна на g;
е) през B, успоредна на α;
ж) през A, B и C.

Решение. а) Ще решим по два начина.

Начин 1. Търсената равнина е компланарна с направляващите вектори $\overrightarrow{BC} = (2, -3, -5)$ и $\vec{g} = (2, 3, -1)$ съответно на правите BC и g. Следователно уравнението ѝ има вида

$$\beta\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Оттук получаваме общото уравнение $\beta\colon 9x - 4y + 6z + 5 = 0$.

Начин 2. Най-напред намираме координатите на нормален вектор $\overrightarrow{N}_\beta = \overrightarrow{BC} \times \vec{g} = (18, -8, 12) \parallel (9, -4, 6)$ и след това от (13.5) получаваме

$$\beta\colon 9(x-1) - 4(y-2) + 6(z+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9x - 4y + 6z + 5 = 0.$$

б) Търсената равнина е компланарна с направляващия вектор $\vec{g} = (2, 3, -1)$ на правата g и с насочената отсечка $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 4)$. Тогава от (13.3) следва, че

$$\beta\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето получаваме $\beta\colon 12x - 7y + 3z + 5 = 0$.

в) Аналогично на подточка б), насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ е компланарна с търсената равнина. Тъй като равнината α е перпендикулярна на търсената равнина, то нормалният вектор $\overrightarrow{N}_\alpha = (2, 2, -1)$ също е компланарен с търсената равнина. Постъпвайки като в подточка б), получаваме уравнението $\beta\colon 8x - 7y + 2z + 8 = 0$.

г) Понеже координатите на A не удовлетворяват уравнението на правата g, точката A не лежи върху g и следователно точката и правата определят единствена равнина. Тъй като правата g лежи в търсената равнина, то нейният направляващ вектор $\vec{g} = (2, 3, -1)$ и всяка нейна точка са компланарни с тази равнина. Избираме една точка от правата g, например точката $M(1, -2, 0)$. Тогава насочената отсечка $\overrightarrow{AM} = (0, -4, 1)$ е компланарна с търсената равнина. Следователно получаваме уравнението $\beta\colon x + 2y + 8z + 3 = 0$.

д) Ще решим по два начина.

Начин 1. Тъй като правата g е перпендикулярна на търсената равнина, то направляващият вектор $\vec{g} = (2, 3, -1)$ на g е колинеарен с нормалния вектор на тази равнина. Като вземем предвид (13.5), записваме $\beta\colon 2(x-1) + 3(y-2) - 1(z+1) = 0$, откъдето общото уравнение на равнината е $\beta\colon 2x + 3y - z - 9 = 0$.

Начин 2. Като заместим нормалния вектор в общото уравнение (13.4), получаваме $\beta\colon 2x + 3y - z + D = 0$. От условието, че A лежи в търсената равнина, следва, че координатите на тази точка удовлетворяват уравнението β. Следователно $2.1 + 3.2 - (-1) + D = 0$, откъдето намираме $D = -9$.

е) Тъй като успоредните равнини имат колинеарни нормални вектори, то нормалният вектор $\overrightarrow{N}_\alpha = (2, 2, -1)$ е нормален вектор и на търсената равнина. Аналогично на подгточка г), намираме $\beta\colon 2x + 2y - z - 1 = 0$.

ж) Тъй като трите точки са неколинеарни (проверете), то те определят единствена равнина. Използвайки, че насочените отсечки $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 4)$ и $\overrightarrow{AC} = (1, -3, -1)$ са компланарни с търсената равнина, записваме уравнението ѝ във вида

$$\beta\colon \begin{vmatrix} x & y-2 & z-3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето получаваме $\beta\colon 4x + y + z - 5 = 0$.

Задача 13.4. *Намерете уравнението на равнина α, която е успоредна на правите $g\colon \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{2}$ и $p\colon x = 2+s,\ y = 1+2s,\ z = 4$, ако точката $A(1,-2,2)$ се намира на разстояние $\sqrt{5}$ от α.*

Решение. Тъй като правите g и p са успоредни на равнината, то нормалният ѝ вектор $\overrightarrow{N}_\alpha = (2,-1,2) \times (1,2,0) = (-4,2,5)$. Тогава общото уравнение на равнината е

$$\alpha\colon 4x - 2y - 5z + D = 0. \tag{13.16}$$

Свободния член D намираме от условието $d(A,\alpha) = \sqrt{5}$. Като вземем предвид формулата (13.9) за разстояние от точка до равнина, получаваме

$$d(A,\alpha) = \frac{|4.1 - 2(-2) - 5.2 + D|}{\sqrt{16+4+25}} = \sqrt{5}.$$

Следователно $|D-2| = 15$, което има две решения: $D_1 = -13$ и $D_2 = 17$. Тогава равнините, удовлетворяващи условието на задачата, са две и техните уравнения намираме, като заместим в (13.16) получените стойности за D. Така получаваме $\alpha_1\colon 4x-2y-5z-13 = 0$ и $\alpha_2\colon 4x - 2y - 5z + 17 = 0$.

Задача 13.5. *Намерете уравнението на равнина α, която съдържа оста Oy и е равноотдалечена от точките $M(2,7,3)$ и $N(-1,1,0)$.*

Упътване. Тъй като равнината α съдържа Oy, то нейното уравнение има вида $\alpha\colon Ax + Cz = 0$. Стойностите на коефициентите A и C се намират чрез формулата за разстояние от точка до равнина.

Отговори. $\alpha_1\colon 3x - z = 0$, $\alpha_2\colon x - z = 0$.

Задача 13.6. *Определете взаимното положение на равнините:*

а) $\alpha\colon x + 2y - 3z + 10 = 0$, $\beta\colon 2x - y + z - 4 = 0$;
б) $\alpha\colon 2x - y + 5z + 4 = 0$, $\beta\colon 6x - 3y + 15z + 13 = 0$;
в) $\alpha\colon x + 3y + 2z - 3 = 0$, $\beta\colon 2x + 6y + 4z - 6 = 0$.

Решение. а) Съответните коефициенти пред x, y и z в уравненията на двете равнини не са пропорционални, т.е. нормалните им вектори $\overrightarrow{N}_\alpha = (1,2,-3)$ и $\overrightarrow{N}_\beta = (2,-1,1)$ не са колинеарни. Следователно двете равнини се пресичат (в една права).

б) За коефициентите в уравненията на двете равнини е изпълнено $\frac{2}{6} = \frac{-1}{-3} = \frac{5}{15} \neq \frac{4}{13}$. Тогава от Теорема 13.4 следва, че двете равнини са успоредни.

в) Четирите съответни коефициента в двете уравнения са пропорционални. Следователно двете уравнения задават една и съща равнина (сливащи се равнини).

Задача 13.7. *Дадена е равнината* $\alpha\colon 2x-2y-z+4=0$. *Намерете уравненията на равнина, успоредна на* α*, ако:*

а) точката $A(2,-1,3)$ *се намира на разстояние 5 единици от търсената равнина;*
б) разстоянието между α *и търсената равнина е 2 единици.*

Решение. Общото уравнение на равнина, която е успоредна на α, е $\beta\colon 2x-2y-z+D=0$.

а) От условието $d(A,\beta)=5$ получаваме $|D+1|=15$, откъдето $D_1=-16$ и $D_2=14$. Това означава, че търсените равнини са $\beta_1\colon 2x-2y-z-16=0$ и $\beta_2\colon 2x-2y-z+14=0$.

б) Тъй като равнините α и β са успоредни, то разстоянието между тях е равно на разстоянието от произволна точка от едната равнина до другата равнина. Избираме произволна точка от равнината α, например пресечната ѝ точка (пробода) $M(x_0,0,0)$ с координатната ос Ox. Като заместим координатите на M в уравнението на α, намираме $2x_0+4=0$, откъдето $x_0=-2$, т.е. $M(-2,0,0)$. Тогава $d(\alpha,\beta)=d(M,\beta)=\frac{|D-4|}{3}=2$. Следователно $|D-4|=6$, откъдето намираме $D_1=-2$ и $D_2=10$. Това означава, че търсените равнини са $\beta_1\colon 2x-2y-z-2=0$ и $\beta_2\colon 2x-2y-z+10=0$.

Задача 13.8. *Намерете стойностите на реалния параметър* λ*, за които равнините* $\alpha\colon x-y+\lambda z+3=0$ *и* $\beta\colon 2x+y+2z-6=0$*: а) са перпендикулярни; б) сключват ъгъл с големина* 45°.

Решение. а) Условието за перпендикулярност на равнините α и β е равносилно на $\overrightarrow{N}_\alpha\overrightarrow{N}_\beta=0$, където $\overrightarrow{N}_\alpha=(1,-1,\lambda)$ и $\overrightarrow{N}_\beta=(2,1,2)$ са съответните им нормални вектори. Следователно $\alpha\perp\beta$, точно когато $2\lambda+1=0$, т.е. $\lambda=-\frac{1}{2}$.

б) Пресмятаме косинуса на ъгъла между двете равнини, както следва

$$\cos\sphericalangle(\alpha,\beta)=\cos\sphericalangle(\overrightarrow{N}_\alpha,\overrightarrow{N}_\beta)=\frac{\overrightarrow{N}_\alpha\overrightarrow{N}_\beta}{|\overrightarrow{N}_\alpha||\overrightarrow{N}_\beta|}=\frac{2\lambda+1}{3\sqrt{\lambda^2+2}}.$$

От друга страна, по условие имаме $\cos\sphericalangle(\alpha,\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. От последните две равенства получаваме $2(2\lambda+1)^2 = 9(\lambda^2+2)$, откъдето следва че $\lambda = 4$.

Задача 13.9. *Намерете уравнението на равнината β, разполовяваща онзи двустенен ъгъл, образуван при пресичането на равнините $\alpha_1\colon 2x - y + 2z - 3 = 0$ и $\alpha_2\colon 3x + 2y - 6z - 1 = 0$, в който се намира точката $M(1, 2, -3)$.*

Решение. Уравненията на двете равнини, разполовяващи двустенния ъгъл, образуван при пресичането на α_1 и α_2, се задават чрез

$$\beta_{1,2}\colon \frac{2x - y + 2z - 3}{\sqrt{4+1+4}} = \pm\frac{3x + 2y - 6z - 1}{\sqrt{9+4+36}}. \tag{13.17}$$

Пресмятаме $\alpha_1(M) = -9 < 0$ и $\alpha_2(M) = 24 > 0$. Ориентираните разстояния от точката M до равнините α_1 и α_2 са с противоположни знаци, следователно търсената равнина е равнината от уравнението (13.17) със знак минус, т.е. $\beta\colon 23x - y - 4z - 24 = 0$.

Задача 13.10. *Намерете стойностите на реалните параметри a и b така, че равнините $\alpha\colon x + 2y - z + b = 0$, $\beta\colon 2x - y + 3z - 1 = 0$ и $\gamma\colon x + ay - 6z + 10 = 0$:*

а) да имат една обща точка;
б) да имат една обща права;
в) да се пресичат в три различни успоредни прави.

Решение. За решаване на задачата ще разгледаме системата от уравненията на трите равнини. Чрез метода на Гаус получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -b \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & a & -6 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -b \\ 0 & -5 & 5 & 2b+1 \\ 0 & a-2 & -5 & b-10 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -b \\ 0 & -5 & 5 & 2b+1 \\ 0 & 0 & a-7 & \frac{a+b+2ab-52}{5} \end{array}\right).$$

а) Трите равнини се пресичат в една точка, точно когато системата от уравненията им има единствено решение, т.е. е съвместима и определена. Това условие е изпълнено, точно когато $a \neq 7$ и $b \in \mathbb{R}$.

б) Трите равнини се пресичат в една права (принадлежат на сноп равнини с носител тази права), точно когато системата от уравненията им е съвместима и неопределена с ранг 2. Това е налице, точно когато $a - 7 = 0$ и $a + b + 2ab - 52 = 0$. Следователно $a = 7$, $b = 3$.

в) Тъй като никои две от равнините не могат да бъдат успоредни помежду си, то те ще се пресичат в три различни успоредни прави, точно когато системата от уравненията им е несъвместима. Това условие е изпълнено, точно когато $a-7=0$, но $a+b+2ab-52\neq 0$. Следователно $a=7$, $b\neq 3$.

Задача 13.11. *Намерете канонично уравнение на правата l, ако:*
а) $l\colon \left| \begin{array}{l} x-y+z-4=0 \\ x+y-2z-2=0 \end{array}\right.$; *б)* $l\colon \left| \begin{array}{l} 2x+y+3z-4=0 \\ x-y+z+1=0. \end{array}\right.$

Решение. а) Ще решим този пример по два начина.

Начин 1. Нормалните вектори на двете равнини, задаващи правата l, са $\overrightarrow{N}_1=(1,-1,1)$ и $\overrightarrow{N}_2=(1,1,-2)$. Тогава тяхното векторно произведение $\overrightarrow{N}_1\times\overrightarrow{N}_2=(1,3,2)$ е направляващ вектор на l. Намираме координатите на една точка от l, например пресечна точка $M(x_0,y_0,0)$ с координатната равнина Oxy. Като заместим координатите на M в уравнението на правата, получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} x_0-y_0-4=0 \\ x_0+y_0-2=0, \end{array}\right.$$

чието решение е $x_0=3$, $y_0=-1$. Следователно $M(3,-1,0)$. Тогава каноничното уравнение на тази права е $l\colon \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$.

Начин 2. Намираме координатите на две точки от правата, например $M(3,-1,0)$ и $N(0,-10,-6)$. Тогава насочената отсечка $\overrightarrow{MN}$ е направляващ вектор за правата l.

Отговори. б) $l\colon \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-3}$.

Задача 13.12. *Определете взаимното положение на правата l и равнината α, ако:*
а) $l\colon \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}$, $\alpha\colon 3x+2y-z-10=0$;
б) $l\colon x=2+2s$, $y=1+4s$, $z=-2-s$, $\alpha\colon 3x-y+2z+5=0$;
в) $l\colon \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{2}$, $\alpha\colon 2x-2y+z+3=0$.

Решение. а) Направляващият вектор на правата е $\vec{l}=(2,-1,3)$, а нормалният на равнината е $\overrightarrow{N}=(3,2,-1)$. Пресмятаме скаларното произведение $\overrightarrow{N}\vec{l}=6-2-3=1\neq 0$. Следователно правата не е компланарна с равнината, т.е. правата l пресича равнината α.

б) Аналогично на а), намираме $\vec{l}=(2,4,-1)$ и $\overrightarrow{N}=(3,-1,2)$ и пресмятаме $\overrightarrow{N}\vec{l}=0$, което показва, че правата е компланарна с равнината, т.е. е успоредна на равнината или лежи в нея. За да разграничим двата случая, избираме една точка от правата l и проверяваме дали тази точка лежи в равнината α. Например точката $A(2,1,-2)$. Заместваме координатите на A в уравнението на α и получаваме $\alpha(A) = 6 \neq 0$. Следователно A не лежи в α, което показва, че правата е успоредна на равнината.

в) Отново $\overrightarrow{N}\vec{l} = 0$. Затова избираме една точка от правата l, например $A(-1,2,3)$, и пресмятаме $\alpha(A) = 0$. Следователно правата l лежи в равнината α.

Ще отбележим, че задачата може да се реши и като се изследва броя на общите точки между правата и равнината, т.е. се реши системата от техните уравнения.

Задача 13.13. *Намерете уравнението на равнина, която:*

а) съдържа точката $A(2,3,1)$ *и правата*

$$l\colon \left|\begin{array}{l} 3x-2y+5z-2=0 \\ x-4y+z+3=0 \end{array}\right. ;$$

б) е перпендикулярна на $\alpha\colon x+2y+3z+5=0$ *и съдържа правата*

$$l\colon \left|\begin{array}{l} 2x+y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{array}\right. ;$$

в) е на разстояние $\sqrt{14}$ *от координатното начало и съдържа правата*

$$l\colon \left|\begin{array}{l} 2x-3y-z=0 \\ 4x+y+5z-28=0. \end{array}\right.$$

Решение. а) Търсената равнина принадлежи на снопа равнини с носител правата l. Следователно нейното уравнение е от вида

$$\beta\colon \lambda(3x-2y+5z-2)+\mu(x-4y+z+3)=0. \tag{13.18}$$

Като се вземе предвид, че точката A лежи в равнината β, получаваме $\lambda - 2\mu = 0$. Избираме една двойка ненулеви стойности за параметрите, която удовлетворява последното условие, например $\lambda = 2$, $\mu = 1$, и заместваме тези стойности в уравнението (13.18). Така получаваме $\beta\colon 7x-8y+11z-1=0$.

в) Уравнението на търсената равнина е от вида

$$2(\lambda+2\mu)x+(\mu-3\lambda)y+(5\mu-\lambda)z-28\mu=0.$$

От условието $d(O,\beta) = \sqrt{14}$ получаваме $\frac{28|\mu|}{\sqrt{14(\lambda^2+3\mu^2)}} = \sqrt{14}$. Последното уравнение е еквивалентно на $\lambda^2 = \mu^2$, откъдето $\lambda = \pm\mu$. При $\lambda = 1$, $\mu = 1$ получаваме равнината $\beta_1\colon 3x-y+2z-14=0$, а при $\lambda = 1$, $\mu = -1$ получаваме $\beta_2\colon x+2y+3z-14=0$.

Упътване. б) Използвайте Зад. 13.8 а).

Отговори. б) $\beta\colon x+y-z+1=0$.

Задача 13.14. *Намерете уравнението на правата l, която минава през точката $A(2,1,-2)$, пресича оста Oy и е перпендикулярна на правата $p\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{1}$.*

Решение. Най-напред ще намерим уравненията на две равнини, съдържащи l. Понеже точката A е от правата l, то тези равнини ще съдържат A. Тъй като правата l пресича правата Oy, то те лежат в една равнина α. Това е равнината α през точката A и Oy, т.е. $\alpha\colon x+z=0$. Тъй като l е перпендикулярна на p, то l лежи в равнина β през A, перпендикулярна на p. Уравнението на тази равнина е $\beta\colon 2x-y+z-1=0$. Следователно

$$l\colon \left|\begin{array}{l} x+z=0 \\ 2x-y+z-1=0. \end{array}\right.$$

Задача 13.15. *Намерете ортогоналната проекция на:*

а) *точката $A(1,2,-3)$ в равнината $\alpha\colon x+y-2z+3=0$ и разстоянието от A до α;*

б) *точката $B(0,2,4)$ върху правата $g\colon x=2+s, y=2-s, z=2s$ и разстоянието от B до g;*

в) *правата $l\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{1}$ върху равнината $\beta\colon x+2y-z+4=0$.*

Решение. а) Построяваме правата p през A, перпендикулярна на равнината α. Тази права има уравнения

$$p\colon \left|\begin{array}{l} x=1+s \\ y=2+s \\ z=-3-2s. \end{array}\right.$$

Тогава пресечната точка A' на p и α е търсената ортогонална проекция на A върху α. Заместваме изразите за x, y и z от уравнението на правата p в уравнението на равнината α и достигаме до уравнението $6s+12=0$, откъдето намираме $s=-2$. След заместване на тази стойност на параметъра в уравнението на правата получаваме $A'(-1,0,1)$. Разстоянието от A до α пресмятаме чрез формулата (13.9) или чрез $|\overrightarrow{AA'}|=2\sqrt{6}$.

б) Построяваме равнината γ през точката B, перпендикулярна на правата g. Тази равнина има уравнение $\gamma\colon x-y+2z-6=0$. Тогава пресечната точка B' на g и γ е търсената ортогонална проекция на B върху g. Аналогично на подточка а), намираме $B'(3,1,2)$. Разстоянието от B до g пресмятаме чрез $|\overrightarrow{BB'}|=\sqrt{14}$.

в) Построяваме равнината δ през правата l и перпендикулярна на равнината β. Получаваме $\delta\colon y + 2z - 1 = 0$. Тогава търсената ортогонална проекция l' на правата l върху равнината β е пресечницата на равнините β и δ. Следователно $l'\colon y+2z-1 = 0,\ x+2y-z+4 = 0$.

Задача 13.16. *Даден е триъгълник с върхове* $A(-2,1,4)$, $B(4,1,-2)$ *и* $C(2,0,-2)$. *Намерете уравнението на височината през върха* C.

Решение. Аналогично на Задача 13.15 б), намираме ортогоналната проекция $H(3,1,-1)$ на точката C върху правата AB. Тогава търсената права минава през C и H и има уравнение $h\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$.

Забележка 13.7. Задачата може да бъде решена и като директно се намери вектор, колинеарен с височината, както в Задача 9.19.

Задача 13.17. *Дадени са равнината* $\alpha\colon 2x - 3y + z + 3 = 0$ *и точката* $A(1,-2,3)$. *Намерете ортогонално симетричната точка* A' *на* A *относно* α.

Решение. Ще разделим решението на три стъпки:

Стъпка 1. Построяваме правата p, минаваща през A и перпендикулярна на α. Скаларно параметричните уравнения на тази права са

$$p\colon \left|\begin{array}{l} x = 1 + 2s \\ y = -2 - 3s \\ z = 3 + s. \end{array}\right.$$

Стъпка 2. Намираме координатите на пресечната точка M на правата p и равнината α (ортогоналната проекция на A в α). Това е точката $M(-1,1,2)$.

Стъпка 3. Тъй като M е среда на отсечката AA', то за координатите на трите точки е изпълнено $M = \frac{A+A'}{2}$, откъдето $A' = 2M - A$. Така получаваме $A'(-3,4,1)$.

Задача 13.18. *Дадени са правата* $l\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ *и точката* $A(2,3,-6)$. *Намерете ортогонално симетричната точка* A' *на* A *относно* l.

Решение. Ще разделим решението на три стъпки:

Стъпка 1. Равнината α, минаваща през точката A и перпендикулярна на l, има уравнение $\alpha\colon 2x + 2y - z - 16 = 0$.

Стъпка 2. Пресечната точка на правата l и равнината α (ортогоналната проекция на A върху l) е $M(4,3,-2)$.

Стъпка 3. Тъй като M е среда на отсечката AA', то $A'(6,3,2)$.

Задача 13.19. *Светлинен лъч, пуснат от точката $A(1,1,3)$ успоредно на оста Ox, се отразява от равнината $\alpha\colon x+y-z-5=0$. Намерете точката на отражение и уравнението на правата, съдържаща отразения лъч.*

Решение. Уравнението на правата, съдържаща пуснатия от точка A светлинен лъч, е $l\colon x=1+s$, $y=1$, $z=3$. Точката на отражението, т.е. пресечната точка на l и α, е $B(7,1,3)$. Тъй като правата l', съдържаща отразения лъч, също минава през B и ъгълът на падане е равен на ъгъла на отразяване, то нормалният вектор на равнината на отразяване е ъглополовяща на ъгъла, образуван от падащия и отразения лъч. Оттук следва, че ортогонално симетричната точка относно равнината α на произволна точка от l лежи върху l' и обратно. Намираме ортогонално симетричната точка $A'(5,5,-1)$ на A. Тогава, като се вземе предвид, че A' и B лежат върху l', получаваме следното уравнение: $l'\colon \frac{x-5}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+1}{2}$.

Задача 13.20. *Светлинен лъч, пуснат от координатното начало, след отразяването си от равнината $\alpha\colon 2x+3y+z-14=0$, става успореден на Oy. Намерете уравнението на правата, съдържаща падащия лъч.*

Решение. Намираме координатите на точката $O'(4,6,2)$, ортогонално симетрична на координатното начало O относно равнината α. Уравнението на правата, съдържаща отразения лъч, е $l'\colon x=4$, $y=6+s$, $z=2$. Тогава пресечната точка на l' и α е $B(4,\frac{4}{3},2)$. Тъй като правата l, съдържаща падащия лъч, минава през точките O и B, то нейното уравнение е $l\colon \frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

Задача 13.21. *Определете взаимното положение на правите:*

$$\text{а)}\ l\colon \left|\begin{array}{l} x=3+s\\ y=-4-2s\\ z=-4-s\end{array}\right. \quad \text{и}\quad p\colon \left|\begin{array}{l} x=2+t\\ y=3+3t\\ z=2t\end{array}\right.;$$

$$\text{б)}\ l\colon \left|\begin{array}{l} x=2+s\\ y=3-s\\ z=1+2s\end{array}\right. \quad \text{и}\quad p\colon \left|\begin{array}{l} x=2t\\ y=1+t\\ z=2-t\end{array}\right.;$$

$$\text{в)}\ l\colon \left|\begin{array}{l} x=2+2s\\ y=-1+s\\ z=1-s\end{array}\right. \quad \text{и}\quad p\colon \left|\begin{array}{l} x=4t\\ y=2+2t\\ z=3-2t\end{array}\right.;$$

$$\text{г)}\ l\colon \left|\begin{array}{l} x=4+s\\ y=2-2s\\ z=1+3s\end{array}\right. \quad \text{и}\quad p\colon \left|\begin{array}{l} x=3-t\\ y=4+2t\\ z=-2-3t.\end{array}\right.$$

Ако правите се пресичат, намерете координатите на пресечната им точка. В случай че правите определят единствена равнина, намерете нейното уравнение.

Решение. а) Направляващите вектори $\vec{l}(1,-2,-1)$ и $\vec{p}(1,3,2)$ на двете прави не са колинеарни. Следователно двете прави не са успоредни и не съвпадат. Дали правите се пресичат или са кръстосани, ще проверим по два начина.

Начин 1. Избираме по една точка от всяка от правите, например $A(3,-4,-4) \in l$ и $B(2,3,0) \in p$, и намираме $\overrightarrow{AB}(-1,7,4)$. Тъй като смесеното произведение е

$$\vec{l}\,\vec{p}\,\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0, \tag{13.19}$$

то векторите $\vec{l}$, $\vec{p}$ и $\overrightarrow{AB}$, а следователно и правите l и p са компланарни. От друга страна, $\vec{l} \nparallel \vec{p}$, което означава че правите се пресичат. Пресечната точка на двете прави намираме, като решим системата от техните уравнения. Приравняваме съответните изрази за x, y и z от уравненията на правите и достигаме до

$$\left| \begin{array}{l} s - t = -1 \\ 2s + 3t = -7 \\ s + 2t = -4. \end{array} \right. \tag{13.20}$$

Горната система има единствено решение $s = -2$, $t = -1$. Като заместим намерените стойности на параметрите съответно в уравнението на l или p, получаваме координатите на пресечната им точка $M(1,0,-2)$.

Като използваме координатите на M и направляващите вектори на двете прави, получаваме уравнението $x + 3y - 5z - 11 = 0$ на равнината, която ги съдържа.

Начин 2. Чрез приравняване на x, y и z от уравненията на правите достигаме до системата линейни уравнения (13.20). Тъй като тази система има единствено решение, то заключаваме, че правите се пресичат. Пресечната точка M намираме по предходния начин.

б) Както в подточка а), направляващите вектори на двете прави $\vec{l}(1,-1,2)$ и $\vec{p}(2,1,-1)$ не са колинеарни. Пресмятаме детерминантата от координатите на $\vec{l}$, $\vec{p}$ и $\overrightarrow{AB}(-2,-2,1)$, където $A(2,3,1) \in l$ и $B(0,1,2) \in p$, и установяваме, че тази детерминанта е различна от нула. Това показва, че двете прави не са компланарни. Получените резултати показват, че правите са кръстосани.

в) Тъй като $\vec{l}(2,1,-1) \parallel \vec{p}(4,2,-2)$, но $\overrightarrow{AB}(-2,3,2) \nparallel \vec{l}$, където $A(2,-1,1) \in l$ и $B(0,2,3) \in p$, то правите са успоредни и определят единствена равнина. Като се вземе предвид, че точката A (или B) и векторите $\vec{l}$ и $\overrightarrow{AB}$ са компланарни с тази равнина, получаваме нейното уравнение $5x - 2y + 8z - 20 = 0$.

г) Направляващите вектори $\vec{l}(1,-2,3)$ и $\vec{p}(-1,2,-3)$ на правите са колинеарни. Пресмятаме $\overrightarrow{AB}(-1,2,-3)$, където $A(4,2,1) \in l$ и $B(3,4,-2) \in p$. Тъй като трите вектора $\vec{l} \parallel \vec{p} \parallel \overrightarrow{AB}$, то правите l и p са сливащи се (двете уравнения задават една и съща права).

Задача 13.22. *Намерете трансверзалата*[1] *на кръстосаните прави:*

а) $l\colon \left| \begin{array}{l} x = 1 + s \\ y = 2 - s \\ z = 1 + s \end{array} \right.$ *и* $p\colon \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = 3 + t \\ z = -3 + 2t \end{array} \right.$,
която лежи в равнината $\alpha\colon x + y + 2z - 3 = 0$;

б) $l\colon \left| \begin{array}{l} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array} \right.$ *и* $p\colon \left| \begin{array}{l} x + y + 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{array} \right.$ *през т.* $A(1,-2,1)$;

в) $l\colon \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{1}$, $p\colon \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$, *която е успоредна на правата* $g\colon \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}$;

г) $l\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$, $p\colon x = 1 + 2s, y = -2s, z = -1 + s$, *перпендикулярна на тези прави (ос на правите).*

Решение. Проверете, че дадените прави са кръстосани.

а) Търсената трансверзала минава през пресечните точки на правите l и p с равнината α, които са съответно $A(0,3,0)$ и $B(1,4,-1)$. Следователно нейното уравнение е $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$.

б) По същия начин като в Задача 13.13 а) намираме уравнението на равнината $\alpha\colon x + y + z = 0$ през A и правата l и равнината $\beta\colon 3x + 2y - z + 2 = 0$ през A и правата p. Тогава трансверзалата на двете прави е пресечницата на α и β.

в) Построяваме равнината $\alpha\colon x - 2y + 3z + 3 = 0$ през правата l и успоредна на правата g, както и равнината $\beta\colon y - 3z - 5 = 0$ през p, успоредна на g. Търсената трансверзала е пресечницата на равнините α и β.

г) Направляващите вектори на двете прави са съответно $\vec{l}(2,4,1)$ и $\vec{p}(2,-2,1)$. Векторът $\vec{v} = \vec{l} \times \vec{p} = (6,0,-12)$ е перпендикулярен

[1]Трансверзала е права, която пресича две кръстосани прави.

на направленията на правите l и p и следователно е колинеарен с тяхната ос. Построяваме равнината $\alpha\colon 8x - 5y + 4z - 10 = 0$ през правата p и успоредна на $\vec{v}$ и равнината $\beta\colon 4x + 5y + 2z - 2 = 0$ през p и успоредна на $\vec{v}$. Тогава оста на двете прави е пресечницата на α и β.

Задача 13.23. *Уравнението на движението на точка $M(x, y, z)$ е*

$$\left| \begin{array}{l} x = 5 - 2t \\ y = -3 + 2t \\ z = 5 - t. \end{array} \right. \tag{13.21}$$

Намерете скоростта, с която се движи M, и разстоянието d, което точката изминава от $t_0 = 0$ до $t_1 = 4$.

Решение. Точката M се движи по правата с уравнение (13.21). Скоростта на движение V е равна на дължината на направляващия вектор $\vec{v} = (-2, 2, -1)$ на тази права, т.е. $V = |\vec{v}| = 3$.

При $t = t_0 = 0$ точката се намира в началното си положение $M_0(5, -3, 5)$, а при $t = t_1 = 4$ точката е в положение $M_1(-3, 5, 1)$. Разстоянието d, което точката изминава от M_0 до M_1, е равно на дължината на $\overrightarrow{M_0M_1}$, т.е. $d = |\overrightarrow{M_0M_1}| = 12$.

Задача 13.24. *Съставете уравнението на движението на точката $M(x, y, z)$ с начално положение $M_0(3, -1, -5)$, движеща се равномерно праволинейно по направление на вектора $\vec{p} = (-2, 6, 3)$ със скорост $V = 21$.*

Решение. Точката M се движи по права през M_0 с направляващ вектор $\vec{v}$, колинеарен на $\vec{p}$ и с дължина 21. Тъй като $|\vec{p}| = 7$, то $\vec{v} = 3\vec{p} = (-6, 18, 9)$. Тогава уравнението на движението на точката M е правата

$$l : \left| \begin{array}{l} x = 3 - 6t \\ y = -1 + 18t \\ z = -5 + 9t. \end{array} \right.$$

13.2. **Уравнение на сфера.**

Определение 13.7. Множеството от точки в пространството, които се намират на равни разстояния от една фиксирана точка C, се нарича *сфера.* Точката C се нарича *център* на сферата, а разстоянието от C до точките от сферата – *радиус.*

Теорема 13.10. *Нека $Oxyz$ е ортонормирана КС. Тогава уравнението на сфера S с център точката $C(a,b,c)$ и радиус $r>0$ е*

$$S\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \tag{13.22}$$

Теорема 13.11. *Нека $l^2+m^2+n^2-4p>0$, където $l,m,n,p\in\mathbb{R}$. Тогава*

$$x^2+y^2+z^2+lx+my+nz+p=0 \tag{13.23}$$

е уравнение на сфера с център $C(-\frac{l}{2},-\frac{m}{2},-\frac{n}{2})$ и радиус

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{l^2+m^2+n^2-4p}.$$

В следващите задачи ще считаме координатната система за дясна ортонормирана, освен ако е указано друго.

Задача 13.25. *Намерете уравнението на сфера:*

а) с център $C(5,-3,7)$ и радиус $r=2$;
б) с център координатното начало и радиус $r=3$;
в) с център $C(4,-4,-2)$, минаваща през координатното начало;
г) с краища на един неин диаметър точките $A(2,-3,5)$ и $B(4,1,-3)$;
д) с център точката $C(-2,0,1)$, допираща се до равнината $\alpha\colon 2x+2y+z+15=0$.

Решение. а) Заместваме координатите на центъра и радиуса в (13.22) и получаваме търсеното уравнение $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=4$.

в) Тъй като точката $O(0,0,0)$ лежи върху сферата, а C е нейният център, то $r=|\overrightarrow{OC}|=6$. Тогава търсеното уравнение е

$$(x-4)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=36.$$

г) Центърът C на тази сфера е средата на отсечката AB, а радиусът ѝ е $r=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$. Тогава $C(3,-1,1)$ и $r=\sqrt{21}$, следователно сферата има уравнение $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$.

д) Тъй като сферата се допира до равнината α, то разстоянието от центъра ѝ C до α е равно на радиуса, т.е. $d(C,\alpha)=4=r$. Следователно уравнението на тази сфера е

$$(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=16.$$

Отговори. б) $x^2+y^2+z^2=9$.

Задача 13.26. *Установете кои от следващите уравнения задават сфера и намерете центъра и радиуса ѝ:*

а) $x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z-14=0$;
б) $4x^2+4y^2+4z^2+8x-16y-8z-1=0$;
в) $x^2+y^2+z^2-6z+18=0$;

г) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 10 = 0.$

Решение. а) Чрез отделяне на точни квадрати в лявата страна на даденото уравнение установяваме, че то е еквивалентно на

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 64.$$

Това уравнение задава сфера с център $C(3, -4, 5)$ и радиус $r = 8$.

б) Разделяме двете страни на уравнението на 4 и чрез отделяне на точни квадрати получаваме $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 25/4$. Следователно даденото уравнение определя сфера с център $C(-1, 2, 1)$ и радиус $r = 5/2$.

в) Даденото уравнение е еквивалентно на $x^2+y^2+(z-3)^2 = -9$, което не е уравнение на реална сфера, тъй като $r = 3i$.

Отговори. г) $C(-1, 3, -\frac{1}{2})$, $r = 9/2$.

Задача 13.27. *Намерете уравнението на сфера с радиус $r = 3$, която се допира до равнината $\alpha\colon x + 2y + 2z + 3 = 0$ в точката $M(1, 1, -3)$.*

Решение. Центърът C на търсената сфера лежи върху правата p, която минава през M и е перпендикулярна на α. Скаларно параметричните уравнения на тази права са

$$p\colon \left|\begin{array}{l} x = 1 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = -3 + 2s. \end{array}\right.$$

Следователно центърът е $C(1 + s_0, 1 + 2s_0, -3 + 2s_0),\ s_0 \in \mathbb{R}$. Тъй като $d(C, \alpha) = r = 3$, то $|s_0| = 1$. При $s_0 = -1$ имаме $C(0, -1, -5)$ и уравнението на сферата е

$$x^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 9.$$

При $s = 1$ имаме $C(2, 3, -1)$ и сферата има уравнение

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

Задача 13.28. *Намерете уравнението на равнина, която се допира до сферата $S\colon x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$ в точка $M(6, -3, -2)$.*

Решение. Центърът на дадената сфера е $O(0, 0, 0)$. Търсената допирателна равнина минава през M и е перпендикулярна на $\overrightarrow{OM}$. Следователно уравнението ѝ е $6x - 3y - 2z - 49 = 0$.

Задача 13.29. *Намерете уравненията на допирателните равнини към сферата $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = 9$, които са успоредни на равнината $\alpha\colon x + 2y - 2z + 13 = 0$.*

Решение. Центърът и радиусът на дадената сфера са съответно $C(0,0,0)$ и $r = 3$. Тъй като търсените допирателни равнини са успоредни на α, то те имат уравнения от вида $\beta\colon x+2y-2z+D = 0$. Свободния член D определяме от условието $d(C,\beta) = r$, откъдето получаваме $D_1 = -9$ и $D_2 = 9$. Следователно търсените равнини са $\beta_1\colon x+2y-2z-9 = 0$ и $\beta_2\colon x+2y-2z+9 = 0$.

Задача 13.30. *Намерете уравнението на сферата, която е описана около тетраедъра с върхове $A(1,0,2)$, $B(1,-2,-2)$, $C(-3,2,-2)$ и $D(-1,4,2)$.*

Решение. Ще решим задачата по два начина.

Начин 1. Ще използваме, че всяка сфера има уравнение от вида $x^2+y^2+z^2+lx+my+nz+p = 0$ и че всяка от дадените четири точки удовлетворява това уравнение. Чрез заместване на координатите на тези точки в уравнението на сферата получаваме следната система линейни уравнения

$$\left|\begin{array}{l} l+2n+p = -5 \\ l-2m-2n+p = -9 \\ 3l-2m+2n-p = 17 \\ l-4m-2n-p = 21. \end{array}\right.$$

Тази система има единствено решение $l = -4$, $m = -6$, $n = 4$, $p = -9$. Следователно търсената сфера има уравнение

$$x^2+y^2+z^2-4x-6y+4z-9 = 0.$$

Начин 2. Ще намерим уравненията на три равнини, минаващи през центъра на сферата (диаметрални равнини). Избираме три отсечки с краища дадените точки и през средата на всяка от тях построяваме равнина, перпендикулярна на съответната отсечка. Например през $M(1,-1,0)$, $N(-1,1,0)$ и $P(0,2,2)$, които са среди съответно на AB, AC и AD, построяваме съответно равнините $\alpha\colon y+2z+1 = 0$, $\beta\colon 2x-y+2z+3 = 0$ и $\gamma\colon x-2y+4 = 0$. Пресечната точка на тези три равнини е центърът $Q(2,3,-2)$ на сферата. Разстоянието от Q до всяка от четирите дадени точки е равно на радиуса $r = \sqrt{26}$. Следователно търсената сфера има уравнение $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2 = 26$, което е еквивалентно на уравнението, получено по първия начин.

14. Аналитично представяне на линии в $\mathbb{R}^3$

> Чистият математик, също като музиканта, е свободен създател на своя свят на подредена красота.
>
> *Бертранд Ръсел*

Определение 14.1. Непрекъснатото изображение $l\colon J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ се нарича *линия в пространството* и се представя аналитично с *векторно-параметричното уравнение*

$$l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \tag{14.1}$$

където $t \in J$ се нарича *параметър* на линията.

Определение 14.2. Нека $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t))$, където x, y и z са диференцируеми функции. Тогава векторът $\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ се нарича *първа производна* на $\mathbf{r}$.

Определение 14.3. Линията l се нарича *m-кратно гладка в интервал J*, ако $\mathbf{r} \in C^m[J]$ и $\dot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{0}$ за всяко $t \in J$.

Ако $m = 1$, то линията ще наричаме просто *гладка*.

Определение 14.4. Нека $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t)) \in C^3[J]$. Векторите

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)), \quad \dddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}\ddot{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} = (\dddot{x}(t), \dddot{y}(t), \dddot{z}(t))$$

се наричат съответно *втора производна* и *трета производна* на $\mathbf{r}$.

Забележка 14.1. Ако разглеждаме линията $l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ като траектория на движение на материална точка, то векторите $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$ са съответно *вектор на скоростта* и *вектор на ускорението* на точката.

Определение 14.5. Нека l е гладка линия в интервал J и $t_0 \in J$ е фиксирана точка. Тогава дължината на дъгата $s(t)$ от линията l между точките t_0 и $t \in J$ ще наричаме *естествен параметър на линията l*.

Забележка 14.2. Ако s е естествен параметър на гладката линия l, то уравнението (14.1) може да се запише във вида

$$l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \tag{14.2}$$

т.е. за всяка гладка линия може да се намери *естествена параметризация*.

Теорема 14.1. *Параметърът s е естествен за гладката линия $l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, точно когато $|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1$.*

Забележка 14.3. Нека $\mathbf{r} = (x(s), y(s), z(s))$. Тогава от (14.2) получаваме следните *скаларно параметрични уравнения* на l

$$l\colon \left| \begin{array}{l} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{array} \right. . \tag{14.3}$$

Определение 14.6. Нека $r(s)$ е точка от естествено параметризирана линия l. Тогава векторът:

1) $\mathbf{p}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s)$ се нарича *допирателен вектор* в точката $r(s)$;
2) $\mathbf{n}(s) = \dfrac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|}$ се нарича *нормален вектор* в точката $r(s)$;
3) $\mathbf{b}(s) = \mathbf{p}(s) \times \mathbf{n}(s)$ се нарича *бинормален вектор* в точката $r(s)$.

Определение 14.7. Координатната система $r(s)_{\mathbf{pbn}}$ се нарича *триедър на Френе*[1] на линията l в точката $r(s)$.

Забележка 14.4. Векторите $\mathbf{p}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ са единични и взаимно перпендикулярни. Триедърът на Френе е дясна ортонормирана координатна система.

Определение 14.8. Нека $r(s)_{\mathbf{pbn}}$ е триедърът на Френе в точката $r(s)$ на естествено параметризирана линия l. Тогава правата:

1) $p\colon \mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(s) + \lambda\dot{\mathbf{r}}(s)$ се нарича *допирателна* в $r(s)$;
2) $n\colon \mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(s) + \lambda\ddot{\mathbf{r}}(s)$ се нарича *главна нормала* в $r(s)$;
3) $b\colon \mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(s) + \lambda(\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s))$ се нарича *бинормала* в $r(s)$.

Определение 14.9. Нека $r(s)_{\mathbf{pbn}}$ е триедърът на Френе в точката $r(s)$ на естествено параметризирана линия l. Тогава:

1) Равнината, определена от векторите $\mathbf{n}$ и $\mathbf{p}$, се нарича *оскулачна* и се задава с уравнението:
$$\alpha_{\mathbf{np}}\colon (\mathbf{R}(s) - \mathbf{r}(s))(\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)) = 0;$$
2) Равнината, определена от векторите $\mathbf{p}$ и $\mathbf{b}$, се нарича *ректифицираща* и се задава с уравнението:
$$\beta_{\mathbf{pb}}\colon (\mathbf{R}(s) - \mathbf{r}(s))\ddot{\mathbf{r}}(s) = 0;$$
3) Равнината, определена от векторите $\mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$, се нарича *нормална* и се задава с уравнението:
$$\gamma_{\mathbf{bn}}\colon (\mathbf{R}(s) - \mathbf{r}(s))\dot{\mathbf{r}}(s) = 0.$$

[1]Жан Фредерик Френе (1816–1900) – френски математик и астроном.

Определение 14.10. Нека $l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ е естествено параметризирана линия. Тогава величината $\varkappa(s) = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|$ се нарича *кривина* на линията в точката $r(s)$.

Теорема 14.2. *Линията $l \in C^2[J]$ е права тогава и само тогава, когато $\varkappa = 0$ във всяка точка от l.*

Определение 14.11. Нека $l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ е естествено параметризирана линия. Тогава величината $\tau(s) = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(s)\ddot{\mathbf{r}}(s)\dddot{\mathbf{r}}(s)}{\ddot{\mathbf{r}}(s)^2}$ се нарича *торзия* на линията в точката $r(s)$.

Теорема 14.3. *Линията $l \in C^3[J]$ лежи в една равнина тогава и само тогава, когато $\tau = 0$ във всяка точка от l.*

Забележка 14.5. Често използването на естествена параметризация се оказва неудобно за пресмятане на векторите от триедъра на Френе, кривината и торзията. В случай че разглежданата линия е зададена спрямо произволен (неестествен) параметър t, за намиране на векторите $\mathbf{p}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ се използват следните формули:

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}, \quad \mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}, \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{p}(t). \tag{14.4}$$

Кривината и торзията спрямо произволен параметър се пресмятат чрез:

$$\varkappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}, \qquad \tau(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)\ddot{\mathbf{r}}(t)\dddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|^2}. \tag{14.5}$$

Задача 14.1. *Дадена е витлова линия*

$$l\colon \mathbf{r} = \left(\frac{4}{5}\cos t, \frac{4}{5}\sin t, \frac{3}{5}t\right).$$

Докажете, че t е естествен параметър за линията и намерете:

а) уравненията на правите и равнините от триедъра на Френе;
б) кривината и торзията в произволна точка на линията.

Решение. а) Като използваме определенията за производна на вектор и векторно произведение на два вектора, намираме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \left(-\tfrac{4}{5}\sin t, \tfrac{4}{5}\cos t, \tfrac{3}{5}\right) \parallel (-4\sin t, 4\cos t, 3),\\ \ddot{\mathbf{r}} &= \left(-\tfrac{4}{5}\cos t, -\tfrac{4}{5}\sin t, 0\right) \parallel (\cos t, \sin t, 0),\\ \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} &= \left(\tfrac{12}{25}\sin t, -\tfrac{12}{25}\cos t, \tfrac{16}{25}\right) \parallel (3\sin t, -3\cos t, 4). \end{aligned} \tag{14.6}$$

Тъй като $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 1$, то t е естествен параметър за линията l, т.е. дадената линия е естествено параметризирана.

Оттук и от Определение 14.8, като се има предвид (14.3), получаваме следните скаларно параметрични уравнения

$$p\colon \left| \begin{array}{l} x = \frac{4}{5}\cos t - 4\lambda \sin t \\ y = \frac{4}{5}\sin t + 4\lambda \cos t \\ z = \frac{3}{5}t + 3\lambda \end{array} \right. , \qquad n\colon \left| \begin{array}{l} x = \frac{4}{5}\cos t + \lambda \cos t \\ y = \frac{4}{5}\sin t + \lambda \sin t \\ z = \frac{3}{5}t \end{array} \right.$$

и

$$b\colon \left| \begin{array}{l} x = \frac{4}{5}\cos t + 3\lambda \sin t \\ y = \frac{4}{5}\sin t - 3\lambda \cos t \\ z = \frac{3}{5}t + 4\lambda. \end{array} \right.$$

От Определение 14.9 и (14.6) за уравнението на оскулачната равнина получаваме

$$\alpha_{\mathbf{np}}\colon \left((x, y, z) - \left(\frac{4}{5}\cos t, \frac{4}{5}\sin t, \frac{3}{5}t\right)\right)(3\sin t, -3\cos t, 4) = 0.$$

Оттук, използвайки определенията за разлика и скаларно произведение на вектори, получаваме

$$\alpha_{\mathbf{np}}\colon 3\left(x - \frac{4}{5}\cos t\right)\sin t - 3\left(y - \frac{4}{5}\sin t\right)\cos t + 4\left(z - \frac{3}{5}t\right) = 0,$$

което е еквивалентно на

$$\alpha_{\mathbf{np}}\colon 3x\sin t - 3y\cos t + 4z - \frac{12}{5}t = 0.$$

Аналогично, за ректифициращата и нормалната равнини получаваме съответно

$$\beta_{\mathbf{pb}}\colon x\cos t - y\sin t - \frac{4}{5} = 0$$

и

$$\gamma_{\mathbf{bn}}\colon 4x\sin t - 4y\cos t - 3z + \frac{9}{5}t = 0.$$

б) От (14.6) пресмятаме $|\ddot{\mathbf{r}}| = \frac{4}{5}$. Следователно съгласно Определение 14.10, за кривината получаваме $\varkappa = \frac{4}{5}$.

Пресмятаме още

$$\dddot{\mathbf{r}} = \left(\tfrac{4}{5}\sin t, -\tfrac{4}{5}\cos t, 0\right),$$
$$\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}} = (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})\dddot{\mathbf{r}} = \tfrac{48}{125}.$$

Тогава, съгласно Определение 14.11, за торзията намираме $\tau = \frac{3}{5}$.

Задача 14.2. *Дадена е линията*

$$l\colon \mathbf{r} = (3t, 3t^2, 2t^3).$$

Намерете:

а) векторите от триедъра на Френе в произволна точка от линията;

б) кривината и торзията в произволна точка от линията.

Решение. а) Пресмятаме $\dot{\mathbf{r}} = (3, 6t, 6t^2)$. Тогава

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} = 3(2t^2 + 1).$$

Следователно $|\dot{\mathbf{r}}(t)| \neq 1$, което показва, че t не е естествен параметър за дадената линия. Ще използваме формулите (14.4) спрямо произволен параметър. Пресмятаме още

$$\begin{aligned}
&\ddot{\mathbf{r}} = (0, 6, 12t)\\
&\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (36t^2, -36t, 18), \quad |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = 18(2t^2 + 1).
\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= \tfrac{1}{3(2t^2+1)}(3, 6t, 6t^2) = \tfrac{1}{2t^2+1}(1, 2t, 2t^2),\\
\mathbf{b}(t) &= \tfrac{1}{18(2t^2+1)}(36t^2, -36t, 18) = \tfrac{1}{2t^2+1}(2t^2, -2t, 1),\\
\mathbf{n}(t) &= \tfrac{1}{(2t^2+1)^2}\left(-2t(2t^2+1), (1-2t^2)(1+2t^2), 2t(2t^2+1)\right)\\
&= \tfrac{1}{2t^2+1}(-2t, 1-2t^2, 2t).
\end{aligned}$$

б) Пресмятаме $\dddot{\mathbf{r}} = (0, 0, 12)$ и $\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}} = 216$. Следователно, от (14.5) получаваме

$$\varkappa(t) = \frac{2}{3(2t^2+1)^2}, \quad \tau(t) = \frac{2}{3(2t^2+1)^2}.$$

Задача 14.3. *Намерете кривината и торзията в произволна точка на линията:*

а) $l\colon \mathbf{r} = (\frac{t^3}{3}, t^2, 2t+2)$;

б) $l\colon \mathbf{r} = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$.

Отговори. а) $\varkappa(t) = \frac{2}{(t^2+2)^2}$, $\tau(t) = -\frac{2}{(t^2+2)^2}$; б) $\varkappa(t) = \tau(t) = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$.

Задача 14.4. *Докажете, че линията*

$$l\colon \mathbf{r} = (t^2 + t + 1, t^2, 1 - t)$$

лежи в една равнина и намерете уравнението на тази равнина.

Решение. Пресмятаме $\dot{\mathbf{r}} = (2t+1, 2t, -1)$, $\ddot{\mathbf{r}} = (2, 2, 0)$ и $\dddot{\mathbf{r}} = (0, 0, 0)$. Следователно смесеното произведение $\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}} = 0$. Тогава чрез (14.5) за торзията получаваме $\tau = 0$, което съгласно Теорема 14.3, означава, че линията лежи в една равнина. Тази равнина е оскулачната равнина на линията. За да намерим уравнението ѝ, пресмятаме вектора

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (2, -2, 2),$$

който съгласно (14.4) е колинеарен на бинормалния вектор **b**. Следователно оскулачната равнина в произволна точка на дадената линия се определя от уравнението

$$\alpha_{\mathbf{np}}\colon 2(x-(t^2+t+1)) - 2(y-t^2) + 2(z-(1-t)) = 0,$$

което е еквивалентно на

$$\alpha_{\mathbf{np}}\colon x - y + z - 2 = 0.$$

Литература

[1] Балючев П., К. Коликов, А. Стоянова, Ръководство за решаване на задачи по линейна алгебра, Университетско издателство „Паисий Хилендарски“, Пловдив, 1996.

[2] Буров А.Н., Э. Г. Соснина, Линейная алгебра и аналитическая геометрия, НГТУ, Новосибирск, 2006.

[3] Генов Г.К., Ст. В. Миховски, Т.Ж. Моллов, Алгебра, Университетско издателство „Паисий Хилендарски“, Пловдив, 2006.

[4] Георгиева П., А. Георгиева, Е. Димитрова, Математика, Блаком, Пловдив, 2004.

[5] Грибачев К., И. Градева, Ръководство по математика за икономисти, Галик, София, 1999.

[6] Гьонов А., Н. Стоев, Сборник от задачи по аналитична геометрия, София, 1964.

[7] Димова В., А. Витанов, Г. Караджов, Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, I част, Техника, София, 1965.

[8] Клетеник Д.В., Сборник задач по аналитической геометрии, Наука, Москва, 1980.

[9] Мекеров Д., Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, Линейна алгебра и аналитична геометрия, Университетско издателство „Паисий Хилендарски“, Пловдив, 1997.

[10] Мекеров Д., П. Рангелова, Б. Царева, Е. Павлов, Ръководство за решаване на задачи по аналитична геометрия, Университетско издателство „Паисий Хилендарски“, Пловдив, 1994.

[11] Обрешков Н., Висша алгебра, Наука и изкуство, София, 1958.

[12] Петканчин Б., Аналитична геометрия, Наука и изкуство, София, 1996.

[13] Станилов Г., Аналитична геометрия, Софтех, София, 1993.

[14] Станилов Г., Диференциална геометрия, Тилия, София, 1997.

[15] Lay D.C., S.R. Lay, J.J. McDonald, Linear Algebra and Its Applications, 5th Edition, Pearson, London, 2016.

[16] Poole D., Linear Algebra A Modern Introduction, 4th Edition, Cengage Learning, Stamford, 2015.

[17] Riddle D.F., Analytic geometry, 6th Edition, Brooks Cole Publishing Co, Salt Lake City, 1995.

Марта Теофилова, Стоил Иванов

РЪКОВОДСТВО ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

Българска, първо издание

Предпечатна подготовка: Марта Теофилова, Стоил Иванов
Коректор: Жанет Желязкова
Печат и подвързия: УИ „Паисий Хилендарски"

Пловдив, 2017
ISBN 978-619-202-247-1