Системи линейни уравнения

Задача 1. Решете системите линейни уравнения:

$$
\text{а)}\ \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -3 \end{array} \right. ; \quad
\text{б)}\ \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 3 \end{array} \right. ; \quad
\text{в)}\ \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \end{array} \right. ;
$$

$$
\text{г)}\ \left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 14x_3 - 7x_4 = 18 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 19 \end{array} \right. ; \qquad
\text{д)}\ \left| \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{array} \right. ;
$$

$$
\text{е)}\ \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 5 \end{array} \right. ; \quad
\text{ж)}\ \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{array} \right.
$$

Решения.

$$
\text{а)}\ \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -3 \end{array} \right.
$$

I начин – чрез метода на Гаус

Основна матрица A и разширена матрица $\bar{A}$ на системата

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & -3 \end{array}\right).
$$

Извършваме елементарни преобразувания по редовете на разширената матрица $\bar{A}$, за да получим трапецовидната ѝ форма

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2)\ \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \\ |\cdot 1/2 \end{array} \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

От последната матрица се вижда, че $\mathsf{rang}(A) = \mathsf{rang}(\bar{A}) = 3$. Следователно системата е съвместима. Тъй като и броят на неизвестните $n = 3$, то система е определена, т.е. има единствено решение. Последната получена матрица по метода на Гаус е еквивалентна на следната система

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -3 \\ x_3 = 1. \end{array} \right.$$

Заместваме $x_3 = 1$ от последното уравнение във второто и намираме $x_2 = -2$ и след заместване в първото получаваме $x_1 = 4$. Решението на системата е $(4, -2, 1)$.

II начин – чрез метода на Гаус-Жордан

След анулиране на елементите под главния диагонал продължаваме към анулиране на елементите и над главния диагонал и превръщаме елементите по главния диагонал в единици, т.е. продължаваме от последната матрица, получена по метода на Гаус

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

По този начин основната матрица на система е превърната в единичната квадратна матрица. Тогава стълбът от свободните членове в последната матрица съдържа единственото решение на системата.

III начин – чрез формулите на Крамер

Тъй като основната матрица на системата е квадратна и нейната детерминанта е

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

то системата е определена (има единствено решение), което може да бъде намерено чрез формулите на Габриел Крамер. Формираме детерминантите, в които заменяме съответно първия, втория и третия стълб на Δ със стълба от свободните членове в системата:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -8, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 4, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Тогава, съгласно формулите на Крамер, за единственото решение на системата имаме:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{-2} = 4, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{-2} = -2, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

IV начин – чрез матрично уравнение

Тъй като основната матрица A на системата е обратима, то системата може да се реши и като матрично уравнение. Матричният запис на системата е $AX = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Тогава единственото решение на системата ще намерим от $X = A^{-1}B$. Първо намираме обратната матрица A^{-1} на A по метода на адюнгираните количества или по метода на Гаус-Жордан. Тук е представено намирането на A^{-1} чрез Гаус-Жордан

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot 1/2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 9 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 13 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Следователно

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -4 & -2 \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 13 & -4 & -2 \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

б) $$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 3 \end{array}\right. ;$$

Чрез метода на Гаус последователно получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot(-1/5) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid \cdot(1/5) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

От последната матрица се вижда, че $\mathsf{rang}(A) = \mathsf{rang}(\bar{A}) = 4$, следователно системата е съвместима. Броят на неизвестните също е 4. Следователно системата е определена. Последната матрица е еквивалентна на системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_3 - x_4 = -2 \\ x_4 = 2. \end{array}\right.$$

Последователно намираме: от третото уравнение $x_3 = 0$, от второто $x_2 = -1$ и от първото $x_1 = 1$. Решението на системата е $(1, -1, 0, 2)$.

в) $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \end{array}\right.$

Чрез метода на Гаус последователно получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{ccc} \cdot(-2) & \cdot(-3) & \cdot(-1) \\ + & & \\ & + & \\ & & + \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{cc} \cdot(-1) & \cdot(-3) \\ + & \\ & + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot(-1/6) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

От последната матрица се вижда, че $\mathsf{rang}(A) = \mathsf{rang}(\bar{A}) = 3$, следователно системата е съвместима. Тъй като обаче броят на неизвестните $n = 4 > 3$, то системата е неопределена. Общото решение на системата ще зависи от $(4 - 3) = 1$ параметър. Последната матрица е еквивалентна на системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_3 - x_4 = -1. \end{array}\right.$$

Ако изберем x_4 за параметър, т.е. $x_4 = p \in \mathbb{R}$, то от последното уравнение намираме $x_3 = p - 1$. От второто уравнение получаваме $x_2 = -p$ и от първото намираме $x_1 = p + 1$. Системата има безброй много решения от вида $(p + 1, -p, p - 1, p)$, $p \in \mathbb{R}$.

г) $\left|\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 14x_3 - 7x_4 = 18 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 19 \end{array}\right.$

Чрез метода на Гаус последователно получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & -2 & 5 \\ 6 & -3 & 14 & -7 & 18 \\ 4 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 10 & -5 & 5 & -8 & 19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 2 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

От последната матрица се вижда, че $\mathsf{rang}(A) = \mathsf{rang}(\bar{A}) = 2$. Следователно системата е съвместима. Тъй като броят на неизвестните $n = 4 > 2$, то системата е неопределена. Общото решение зависи от $(4-2) = 2$ а брой параметъра. От последната матрица имаме

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ 5x_3 - x_4 = 3 \end{array}\right.$$

Ако изберем $x_3 = q \in \mathbb{R}$ за параметър, то от второто уравнение получаваме $x_4 = 5q - 3$. Нека изберем $x_1 = p \in \mathbb{R}$ за другия параметър. Тогава от първото уравнение намираме $x_2 = 2p - 7q + 1$. Решенията на системата са всички наредени четворки от вида
$(p, 2p - 7q + 1, q, 5q - 3)$.

д) $\left|\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{array}\right.$

Чрез метода на Гаус последователно получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 9 & -6 & 9 & 7 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

За ранговете на основната и разширената матрица имаме $\mathsf{rang}(A) = \mathsf{rang}(\bar{A}) = 2$, което показва, че система е съвместима. Тъй като броят на неизвестните е по-голям от ранга на системата ($n = 4 > 2$), то системата е неопределена и общото ѝ решение зависи от 2 параметъра:

$$\left(\frac{12p + q + 7}{18}, p, \frac{1 - 5q}{6}, q\right), \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

е) $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 5 \end{array}\right.$

Чрез метода на Гаус последователно получаваме

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

От последната матрица се вижда, че $\mathsf{rang}(A) = 2$, но $\mathsf{rang}(\bar{A}) = 3$.
Следователно $\mathsf{rang}(A) \neq \mathsf{rang}(\bar{A})$, откъдето можем да направим извода, че системата е несъвместима и следователно няма решения. Същият факт можем да установим и от третия ред на последната матрица, който записан като уравнение има вида $0 = 6$, което очевидно няма решения.

ж) $$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right.$$

Системата е хомогенни (стълбът от свободните членове съдържа само нули). Тъй като при извършване на елементарни действия по редовете свободните членове няма да се променят, можем да работим само с основната матрица. Нека да си припомним, че всяка хомогенна система е съвместима. Хомогенна система е определена, точно когато има само нулевото решение, т.е. рангът на системата е равен на броя на неизвестните и е неопределена, точно когато има и ненулеви решения, т.е. рангът на системата е по-малък от броя на неизвестните.

Чрез метода на Гаус последователно получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} | \cdot (-1/2) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | \cdot (-1/2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тъй като рангът на система е $\mathsf{rang}(A) = \mathsf{rang}(\bar{A}) = 3$, а броят на неизвестните е $n = 5 > 3$, то системата е неопределена и общото решение ще зависи от $(5-3) = 2$ на брой параметъра.
Последната матрица е еквивалентна на системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{array} \right.$$

Нека изберем за параметри $x_4 = p$, $x_5 = q$. Тогава решенията на системата са от вида

$$(0, p+q, p-q, p, q), \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

За системата хомогенни линейни уравнения ще намерим и една фундаментална система решения. Припомняме, че фундаментална система решения на система хомогенни линейни уравнения се нарича всяка база на векторното пространство от решенията на системата.

Тъй като наредените 5-торки от решенията могат да бъдат представени по следния начин

$$(0, p+q, p-q, p, q) = p(0, 1, 1, 1, 0) + q(0, 1, -1, 0, 1),$$

то всяко решение е линейна комбинация $pv_1 + qv_2$ на линейно независимите помежду си вектори $v_1 = (0, 1, 1, 1, 0)$ и $v_2 = (0, 1, -1, 0, 1)$. Следователно $\{v_1, v_2\}$ е база на векторното пространство от решенията на системата, т.е. фундаментална система решения.

Задача 2. Намерете решенията на системата в зависимост от стойностите на реалните параметри a, b

$$\left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 5 \\ 4x + ay = b \end{array} \right. .$$

Решение. Тъй като основната матрица на системата е квадратна, можем да изследваме нейната детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 2a + 12 = 2(a+6).$$

Следователно при $a \neq -6$ е изпълнено $\Delta \neq 0$, т.е. системата има единствено решение (съвместима и определена), което можем да получим чрез формулите на Крамер

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ b & a \end{vmatrix} = 5a + 3b, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & b \end{vmatrix} = 2b - 20 = 2(b-10),$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5a+3b}{2(a+6)}, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{b-10}{a+6}, \qquad a \neq -6.$$

Ако $a = -6$, то $\Delta = 0$ и за системата имаме две възможности:

- системата е съвместима и неопределена в случай, че $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Замествайки $a = -6$, установяваме, че условието $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ е изпълнено при $b = 10$. Решенията на системата в този случай са $(x, \frac{2x-5}{3})$, $x \in \mathbb{R}$.
- системата е несъвместима (няма решение) в случай, че поне една от двете детерминанти Δ_1 или Δ_2 е различна от нула. Последното условие е изпълнено при $b \neq 10$.

Да обобщим:

- при $a \neq -6$ и $b \in \mathbb{R}$ системата има единствено решение;
- при $a = -6$ и $b = 10$ системата има безброй много решения;
- при $a = -6$ и $b \neq 10$ системата няма решения.