Ранг на система от вектори и на матрица

1. Ранг на система от вектори

Определение. Нека V е векторно пространство и $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ е система от вектори на V. ***Ранг на системата*** $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ се нарича максималният брой линейно независими вектори от $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Означаваме $\mathsf{rang}\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

С други думи рангът на система вектори е броят на векторите във всяка нейна максимално линейно независима подсистема. Това число е и минималният брой измежду векторите, които пораждат цялата система (които са необходими, за да може чрез техните линейни комбинация да се изразят всички вектори от системата).

Ако $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ са вектори в n-мерно векторно пространство и $\mathsf{rang}\{v_1, v_2, ..., v_n\} = r$, то $0 \leq r \leq n$.

Рангът на система, съставена само от нулевия вектор на дадено векторно пространство, е нула, т.е. $\mathsf{rang}\{o\} = 0$, тъй като нулевият вектор е линейно зависим.

Рангът на всяка база на дадено векторно пространство е равен на броя на векторите в базата (размерността на пространството), тъй като базисните вектори са линейно независими помежду си.

Ранг на системата от вектори $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ е размерността на векторното пространство, породено от тези вектори (линейната обвивка на тези вектори), т.е.

$$\mathsf{rang}\{v_1, v_2, ..., v_n\} = \dim \mathsf{span}\{v_1, v_2, ..., v_n\}.$$

Намирането на ранга на система от вектори се състои в отделянето на максимално линейно независима подсистема от тези вектори. След въвеждането на понятието ранг на матрица, ще се запознаем с по-удобен от практическа гледна точка метод за определяне на ранга.

Нека преди това видим няколко примера за определяне на ранга на система от вектори само чрез определението за понятието ранг.

Примери:

Нека разгледаме векторите $u = (1, 2)$ и $v = (3, 4)$. Очевидно координатите на двата вектора не са пропорционални, т.е. не съществува $c \in \mathbb{R}$, така че $v = cu$. Следователно системата $\{u, v\}$ е линейно независима, откъдето $\mathsf{rang}\{u, v\} = 2$.

Същият извод може да бъде направен и като пресметнете детерминантата от координатите на двата вектора и установите, че тя е различна от нула

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Следователно двете наредени двойки са база на $\mathbb{R}^2$.

Нека разгледаме векторите $u = (1, 2, 3)$ и $v = (2, 4, 6)$.

Тъй като имаме $v = 2u$, то системата $\{u, v\}$ е линейно зависима и нейният ранг не може да бъде максимален (т.е. две). Всеки от двата вектора в системата е линейно независим сам по себе си (тъй като не е нулев) и следователно максималният брой линейно независими вектори в системата $\{u, v\}$ е един, т.е. $\mathsf{rang}\{u, v\} = 1$.

2. Ранг на матрица

Нека A е матрица от тип $m \times n$, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Означаваме с $\mathsf{row}(A)$ векторното подпространство на $\mathbb{R}^n$, породено от системата от редовете на A (породено от всевъзможните линейни комбинации на редовете на A, т.е. тяхната линейна обвивка, span) и с $\mathsf{col}(A)$ векторното подпространство на $\mathbb{R}^m$, породено от системата от стълбовете на A.

Тогава рангът на системата от редовете на A е $\dim \mathsf{row}(A)$, а рангът на системата от стълбовете на A е $\dim \mathsf{col}(A)$. Ще докажем следното

Твърдение. *За всяка матрица A от тип $m \times n$ е изпълнено $\dim \mathsf{row}(A) = \dim \mathsf{col}(A)$.*

Доказателство. Нека A е матрица от тип $m \times n$ и да означим редовете на A по следния начин

$$r_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$
$$r_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$r_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}).$$

Нека рангът на системата от редовете на A е k, т.е. $\dim \mathsf{row}(A) = k$. Нека изберем една база на $\mathsf{row}(A)$, състояща се от k на брой линейно независими вектора, означени с

$$v_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n})$$
$$v_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$v_k = (b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kn}).$$

Следователно всеки ред на A може да се представи (разложи) като линейна комбинация на тези базисни вектори, т.е. имаме представянията

$$\begin{aligned} r_1 &= c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + ... + c_{1k}v_k \\ r_2 &= c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + ... + c_{2k}v_k \\ &.. \\ r_m &= c_{m1}v_1 + c_{m2}v_2 + ... + c_{mk}v_k, \end{aligned} \tag{1}$$

където c_{ij} са коефициентите в линейните представяния.

От двете страни на равенствата (1) участват вектори с n на брой координати и следователно тези равенства са изпълнени за всяка от техните n координати. Нека разпишем равенствата (1) по координатно, като за да краткост ги запишем за произволна j-та координата на векторите ($j = 1, 2, ..., n$). Така получаваме

$$\begin{aligned} a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + c_{12}b_{2j} + ... + c_{1k}b_{kj} \\ a_{2j} &= c_{21}b_{1j} + c_{22}b_{2j} + ... + c_{2k}b_{kj} \\ &.. \\ a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + c_{m2}b_{2j} + ... + c_{mk}b_{kj}. \end{aligned} \tag{2}$$

Поради повтарящите се коефициенти b_{ij}, равенствата (2) могат да се представят и в следния еквивалентен векторен вид (чрез вектор-стълбове)

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = b_{1j} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + b_{2j} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + b_{kj} \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{mk} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

В лявата страна на горното равенство е записан j-тият стълб на матрицата A при $j = 1, 2, ..., n$, т.е. произволен стълб на A. В дясната страна е записана линейна комбинация на k на брой вектора. Следователно равенствата (3) показват, че всеки стълб на A може да се представи линейно като комбинация на k на брой вектора. Следователно пораждащата система на векторното пространство на стълбовете на A се състои от най-много k на брой вектора, т.е. $\dim \mathsf{col}(A) \leq k$.

И така – допуснахме, че $\dim \mathsf{row}(A) = k$ и като следствие от това получихме, че $\dim \mathsf{col}(A) \leq k$, т.е. $\dim \mathsf{col}(A) \leq \dim \mathsf{row}(A)$.

По аналогичен начин, ако допуснем, че $\dim \mathsf{col}(A) = l$, ще получим $\dim \mathsf{row}(A) \leq l$, т.е. $\dim \mathsf{row}(A) \leq \dim \mathsf{col}(A)$.

Следователно ще получим твърдението, а именно, че $\dim \mathsf{row}(A) = \dim \mathsf{col}(A)$.

Определение. ***Ранг на матрица*** се нарича максималният броя линейно независими редове (стълбове) на тази матрица. Рангът на матрицата A означаваме с $\mathsf{rang}(A)$, т.е.

$$\mathsf{rang}(A) = \dim \mathsf{row}(A) = \dim \mathsf{col}(A).$$

Изпълнено е $0 \leq \mathsf{rang}(A) \leq \min(m, n)$.

Определение. *Минор от k-ти ред* на една матрица се нарича всяка детерминанта от k-ти ред с елементи, в които се пресичат произволно взети k на брой реда и k на брой стълба на матрицата.

Ненулев минор от k-ти ред се нарича ***базисен минор на матрица***, ако всеки минор от $(k+1)$-ви ред (в случай, че съществува) е равен на нула.

Теорема. (Ф. Г. Фробениус) *Редът на базисния минор на една матрица е равен на ранга на системата от редовете (стълбовете) ѝ, т.е. на ранга на матрицата.*

Следователно рангът на всяка матрица е равен на реда на базисния ѝ минор. Това определение за ранг е дадено от немския математик Фердинанд Георг Фробениус през 1879 г. Но идеята за ранг е била използвана и по-рано, още през 1851 г. от английския математик Джеймс Силвестър.

Без да доказваме теоремата, нека разгледаме един пример с матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Нека първо определим реда на базисния минор на A.

Редът на базисния минор на A би бил равен на 0, ако всички детерминанти от 1-ви ред, които могат да се формират от елементите на A (т.е. самите елементи на A), са равни на 0. Очевидно това не е изпълнено.

Редът на базисния минор на A би бил равен на 1, ако всички детерминанти от 2-ри ред, които могат да се формират от елементите на A, са равни на 0. Да разгледаме една такава детерминанта – например тази от първите два реда и първите два стълба на A (адюнгирания минор M_{33})

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Следователно редът на базисния минор на A не е равен на 1.

Редът на базисния минор на A би бил равен на 2, ако всички детерминанти от 3-ти ред, които могат да се формират от елементите на A, са равни на 0. Има една единствена такава детерминанта и това е детерминантата на самата матрица A, за която пресмятаме

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 - 8 - 8 + 12 = 0.$$

Следователно редът на базисния минор на матрицата A е равен на 2.

Какво можем да кажем за ранга на системата от редовете (стълбовете) на матрицата A, т.е. $\mathsf{rang}(A) = ?$

Нека разгледаме редовете на A, които означаваме $v_1 = (1,2,-1)$, $v_2 = (-2,0,4)$, $v_3 = (-1,2,3)$. Нека забележим, че

$$v_3 = v_1 + v_2$$

и векторите v_1 и v_2 са линейно независими. Следователно рангът на системата от редовете на A е също равен на 2.

Аналогични разсъждения могат да бъдат проведени и за стълбовете на матрицата A: $u_1 = (1,-2,-1)$, $u_2 = (2,0,2)$, $u_3 = (-1,4,3)$, за които $u_2 = 4u_1 + 2u_3$. Рангът на системата от стълбовете на A е също равен на 2.

Нека A е квадратна матрица от n-ти ред, за която $\det A = 0$. Следователно редът на базисния минор на A трябва да бъде по-малък от n, тъй като минорът от възможно най-висок ред за тази матрица, а именно нейната детерминанта, е равен на нула.

Съгласно определението за ранг на Фробениус това означава, че $\mathsf{rang}(A) < n$, откъдето следва, че системата от редовете (стълбовете) на A е линейно зависима. Така установихме верността на следното

Твърдение. *Ако една детерминанта е равна на нула, то системата от редовете (стълбовете) ѝ е линейно зависима.*

Като вземем предвид установеното от нас в предишната тема, следва, че детерминанта на квадратната матрица A от n-ти ред е равна на нула, точно когато системата редовете (стълбове) на A е линейно зависима, т.е. $\det A = 0 \Leftrightarrow \mathsf{rang}(A) < n$ (и съответно $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \mathsf{rang}(A) = n$).

Определение. Матрица A от тип $m \times n$ от вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

се нарича ***трапецовидна*** (или с ***трапецовидна форма***), ако $a_{ii} \neq 0$ за $i = 1, 2, ..., r$.

Първите r на брой реда на матрицата са ненулеви, а редовете след тях (в случай, че съществуват) са задължително нулеви.

Например следните матрици са трапецовидни

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

За матрицата C може да се каже още, че е горнотриъгълна.

Твърдение. *Рангът на трапецовидната матрица A, определена от (4), е равен на броя на ненулевите ѝ редове, т.е.* $\mathsf{rang}(A) = r$.

Доказателство. Верността на твърдението следва непосредствено от теоремата на Фробениус за ранга на матрица, след като забележим, че редът на базисния минор на матрицата A, определена от (4), е равен на r.

Наистина, нека разгледаме детерминантата Δ от ред r, формирана от първите r на брой реда и r на брой стълба на A. Тази детерминанта е триъгълна и поради условието $a_{ii} \neq 0$ за $i = 1, 2, ..., r$, стойността ѝ е различна от нула ($\Delta = a_{11}a_{22}...a_{kk} \neq 0$). Следователно редът на базисния минор на A е по-голям или равен на r. Ако обаче формираме произволна детерминанта от $(r+1)$-ви ред от елементите на матрицата A, то тази детерминанта задължително ще съдържа поне един нулев ред, тъй като в A има точно r на брой ненулеви реда, и следователно стойността на всеки минор от $(r+1)$-ви ред ще бъде нула. Така установихме, че редът на базисния минор и следователно рангът на A е равен на r.

Друг начин да се докаже твърдението е, като непосредствено се провери, че първите r реда на A са линейно независими (а останалите, поради това, че са нулеви, са линейно зависими) и следователно те формират една база на $\mathsf{row}(A)$, откъдето $\mathsf{rang}(A) = \dim \mathsf{row}(A) = r$. Нека означим първите r реда на A по следния начин

$$
\begin{aligned}
&v_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{1r}, ..., a_{1n}) \\
&v_2 = (0, a_{22}, a_{23}, ..., a_{2r}, ..., a_{2n}) \\
&v_3 = (0, 0, a_{33}, ..., a_{3r}, ..., a_{3n}) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&v_r = (0, 0, ..., 0, a_{rr}, ..., a_{rn}).
\end{aligned}
$$

За да установим линейна независимост, съставяме тяхна произволна линейна комбинация, която приравняваме на нулевия вектор на съответното векторно пространство $\mathbb{R}^n$, т.е. нулевата наредена n-торка $o = (0, 0, ..., 0)$:

$$
c_1v_1 \ + \ c_2v_2 + \ \dots \ + \ c_rv_r = o. \tag{5}
$$

Векторното равенство (5) е еквивалентно на системата хомогенни линейни уравнения:

$$
\left|
\begin{aligned}
&c_1a_{11} = 0 \\
&c_1a_{12} + c_2a_{22} = 0 \\
&c_1a_{13} + c_2a_{23} + c_3a_{33} = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&c_1a_{1r} + c_2a_{2r} + ... + c_ra_{rr} = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + ... + c_ra_{rn} = 0.
\end{aligned}
\right. \tag{6}
$$

От първото уравнение, поради $a_{11} \neq 0$, следва $c_1 = 0$. Заместваме тази стойност във второто уравнение, откъдето поради $a_{22} \neq 0$, следва $c_2 = 0$. Заместваме $c_1 = c_2 = 0$ в третото уравнение и поради $a_{33} \neq 0$ от него получаваме $c_3 = 0$. Продължаваме аналогично и получаваме $c_1 = c_2 = ... = c_{r-1} = 0$, които заместваме в уравнението с пореден номер r, от което поради $a_{rr} \neq 0$ следва $c_r = 0$.

Така установихме, че произволна линейна комбинация (5) на първите r реда на A е равна на нулевия вектор, точно когато всички коефициенти в комбинацията са равни на нула. Следователно системата от първите r реда на A е линейно независима.

Нека се върнем на трапецовидните матрици от примера

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Тъй като рангът на всяка матрица е равен на максималния брой линейно независими редове, а този брой в трапецовидна матрица е равен на брой на ненулевите редове, то за горните три трапецовидни матрици имаме: $\mathsf{rang}(A) = 2$, $\mathsf{rang}(B) = 2$, $\mathsf{rang}(C) = 3$.

Нека обърнем внимание, че матрицата C е квадратна триъгълна матрица и следователно нейната детерминанта е равна на произведението на елементите от главния ѝ диагонал, т.е. $\det C = 1.4.6 = 24 \neq 0$. Следователно трите реда (стълба) на C са линейно независими.

Определение. ***Елементарни преобразувания*** върху редовете (стълбовете) на една матрица се наричат преобразуванията:

- разменяне местата на два реда или два стълба;
- умножаване на даден ред или даден стълб с произволно число, различно от нула;
- прибавяне към елементите на даден ред (стълб) на съответните им елементи от друг ред (стълб), умножени с произволно число.

С помощта на трите елементарни действия всяка матрица може да бъде превърната в трапецовидна (да бъде получена трапецовидната ѝ форма).

Теорема. *Извършването на трите елементарни действия по редовете (стълбовете) на една матрица не променя нейния ранг.*

Алгоритъм за намиране на ранг на матрица и система от вектори

Привеждаме матрицата в трапецовидна форма чрез извършване на елементарни действия по редовете (стълбовете) на матрицата. Броят на ненулевите редове в трапецовидната форма на матрицата е равен на нейния ранг.

За търсене на ранг на система от вектори записваме координатите им в матрица и търсим ранга на тази матрица.

Определение. Матрици, които имат равни рангове, се наричат ***еквивалентни***.

Ако $\mathsf{rang}(A) = \mathsf{rang}(B)$, то за краткост ще записваме $A \sim B$.

Следователно матриците, получени една от друга чрез трите елементарни действия, са еквивалентни.

Пример. Намерете ранга на системата вектори $v_1 = (1,1,0,2)$, $v_2 = (1,-1,3,3)$, $v_3 = (2,0,-1,2)$, $v_4 = (-1,0,3,1)$.

Разполагаме координатите на дадените вектори по редовете или стълбовете на матрица и след това чрез елементарни преобразувания по редовете или стълбовете привеждаме тази матрица в трапецовидна (или триъгълна) форма. Това е показано по-долу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Следователно $\mathsf{rang}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = 4$. Това показва, че рангът на системата от вектори е равен на броя вектори в системата, т.е. всички вектори от системата са линейно независими. Оттук може да се направи изводът, че системата четирите наредени четворки $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ е база на векторното пространство $\mathbb{R}^4$.

Установете същия резултат с помощта на детерминанта.

Пример. Проверете дали векторите $\{u, v, w\}$ са линейно зависими или линейно независими:

а) $u = (1,2,0,3)$, $v = (-1,0,1,1)$, $w = (2,1,-1,-1)$;

б) $u = (1,2,0,3)$, $v = (-1,0,1,1)$, $w = (-2,4,4,10)$;

Търсим ранга на системата от дадените вектори. В случай, че рангът е равен на броя на векторите, то векторите в системата са линейно независими (и никой от тях не може да се изрази като линейна комбинация на останалите).

Такава е ситуацията в подточка а), тъй като получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} .$$

Тъй като рангът на последната матрица е равен на 3, то и $\mathsf{rang}\{u, v, w\} = 3$ и следователно трите вектора са линейно независими.

б) Тук получаваме следното:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Сега рангът на последната получена матрица е 2 и следователно $\mathsf{rang}\{u, v, w\} = 2$. Тъй като рангът е по-малък от броя на векторите в системата, то системата и линейно зависима.

Пример. Намерете база на векторното подпространство на $\mathbb{R}^4$, породено от векторите $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (-1, -1, -4, -2)$ и $w = (3, 4, 11, 8)$, т.е. на $\mathsf{span}\{u, v, w\}$.

Един начин да решим задачата е като намерим $\mathsf{rang}\{u, v, w\}$ чрез ранга на матрицата от координатите на векторите. Ако рангът на системата от вектори е максимален (в този случай 3), то векторите са линейно независими помежду си и образуват база на $\mathsf{span}\{u, v, w\}$.

В случай, че рангът е по-малък от максималния възможен, векторите в системата са линейно зависими. Тогава ненулевите редове в трапецовидната форма на матрицата от координатите на векторите образуват една база на $\mathsf{span}\{u, v, w\}$.

Извършваме елементарните преобразувания:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Следователно $\mathsf{rang}\{u, v, w\} = \mathsf{rang}(A) = 2$. Можете да се убедите, че $w = u - 2v$.

Една база на $\mathsf{span}\{u, v, w\}$ е например системата от вектори $\{a, b\}$, където $a = (1, 2, 3, 4)$ и $b = (0, 1, -1, 2)$.

Пример.

Една система от n или повече вектора на n-мерно векторно пространство V е пораждаща за V, точно когато системата съдържа n линейно независими вектора, т.е. рангът ѝ е равен на n.

Нека разгледаме два примера в тримерното пространство $\mathbb{R}^3$.

Първата система от вектори съдържа $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 2, 0)$ и $v_3 = (-1, 2, 0)$. Проверете, че $\mathsf{rang}\{v_1, v_2, v_3\} = 2$.

Наистина, тази система не е пораждаща за $\mathbb{R}^3$, тъй като вектор $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, за който $z \neq 0$, не може да се представи като линейна комбинация на векторите от $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Втората система от вектори е $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, където $v_4 = (1, 1, 1)$.

Проверете, че $\mathsf{rang}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = 3$ (рангът се повиши с единица, тъй като към $\{v_1, v_2, v_3\}$ добавихме вектора v_4, който е линейно независим с първите три вектора, т.е. не е тяхна линейна комбинация).

Втората система вече е пораждаща за $\mathbb{R}^3$ (проверете и чрез определението за пораждаща система и извлечете от нея база на $\mathbb{R}^3$).