4. Матрици

Математиката притежава не само истината, но и върховната красота – красота студена и сурова, като тази на скулптурата.

Бертранд Ръсел

4.1. Действия с матрици.

Определение 4.1. Правоъгълна таблица от елементи от полето $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

се нарича *матрица над* $\mathbb{K}$ *от тип* $m \times n$. За краткост ще означаваме още с $A = (a_{ij})$, където $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Забележка 4.1. Множеството от всички матрици от тип $m \times n$ с елементи от полето $\mathbb{K}$ ще означаваме с $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ако $m = n$, то за краткост ще означаваме $M_n(\mathbb{K})$.

Определение 4.2. Матриците A и B ще наричаме *еквивалентни* и ще означаваме с $A \sim B$, ако се получават една от друга чрез елементарните преобразувания:

(I) размяна на местата на два реда (стълба);
(II) умножаване на елементите на даден ред (стълб) с число, различно от нула;
(III) прибавяне на елементите на даден ред (стълб) към съответните елементи на друг ред (стълб), умножени с едно и също число.

Определение 4.3. Нека $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Тогава матрицата $A^T = (a_{ji}) \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, получена от A чрез размяна на местата на съответни редове и стълбове, се нарича *транспонирана матрица* на A.

Някои забележителни матрици.

(А) Матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

се нарича *квадратна матрица от n-ти ред* (матрица от тип $n \times n$).

(Б) Квадратната матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

се нарича *триъгълна матрица*.

(В) Квадратната матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

се нарича *диагонална матрица*.

(Г) Квадратната матрица

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

се нарича *единична матрица* от n-ти ред.

(Д) Правоъгълната матрица

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

се нарича *нулева матрица*.

Действия с матрици.

I. Линейни действия с матрици

Определение 4.4. Нека $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Тогава матрицата

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

се нарича *сума* на матриците A и B.

Определение 4.5. Нека $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ и $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогава матрицата

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

се нарича *произведение* на матрицата A с λ.

II. Умножение на матрици

Определение 4.6. Нека $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ и $B = (b_{ij}) \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. Тогава матрицата от тип $m \times p$ с елементи c_{ij}, получени по правилото

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}, \tag{4.1}$$

т.е. матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1p}+\cdots+a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1p}+\cdots+a_{2n}b_{np} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}b_{11}+\cdots+a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12}+\cdots+a_{mn}b_{n2} & \cdots & a_{m1}b_{1p}+\cdots+a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

се нарича *произведение* на матриците A и B (в посочения ред) и ще означаваме с AB.

Забележка 4.2. Правилото за умножение на матрици (4.1) накратко се нарича *ред по стълб*, защото елементите от редовете на матрицата A умножават съответните елементи от стълбовете на B. Лесно се проверява, че за така дефинираното произведение не е в сила комутативният закон, т.е. $AB \neq BA$ за произволни A, B. Поради това, когато се говори за произведение (умножение) на матрици, е необходимо да се използват уточненията *умножение отляво* или *умножение отдясно*.

Пример 4.1. Нека $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Тогава от Определение 4.6 получаваме

$$AB = \begin{pmatrix} -1.1 + 1.3 & -1(-1) + 1.2 \\ 2.1 + 0.3 & 2(-1) + 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

и

$$BA = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.1 (Основни свойства)**.** *Нека A, B и C са квадратни матрици от n-ти ред и $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогава са в сила свойствата:*

1) $(AB)C = A(BC)$ – асоциативен закон;
2) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
3) $A(B + C) = AB + AC$ – ляв дистрибутивен закон;
4) $(A + B)C = AC + BC$ – десен дистрибутивен закон;
5) $AE_n = E_n A = A$.

Забележка 4.3. Свойствата 1)–4) са в сила и за правоъгълни матрици при условие, че означените произведения са възможни.

Задача 4.1. *Дадени са матриците*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad и \quad F = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Да се намерят матриците:
а) $A + B$; б) $3B$; в) $2A + 7B$; г) CD; д) DF; е) FD; ж) CDF; з) $AD + E_3$.

Решение. а) От Определение 4.4 получаваме

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) & 4 + 3 \\ -2 + 2 & 5 + (-4) \\ 6 + (-3) & 8 + (-5) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

б) От Определение 4.5 получаваме

$$3B = 3\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-1) & 3.3 \\ 3.2 & 3(-4) \\ 3(-3) & 3(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & -12 \\ -9 & -15 \end{pmatrix}.$$

г) От Определение 4.6 получаваме

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.1+2.0 & 1(-1)+2.2 & 1.1+2(-1) \\ -1.1+(-3)0 & -1(-1)+(-3)2 & -1.1+(-3)(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отговори. в) $\begin{pmatrix} -3 & 29 \\ 10 & -18 \\ -9 & -19 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -2 & 13 & -7 \\ 6 & 10 & -1 \end{pmatrix}$.

4.2. **Обратна матрица. Матрични уравнения.**

Лесно се вижда, че на всяка квадратна матрица може да се постави в съответствие детерминанта. Нека A е квадратна матрица. Тогава детерминантата на A ще означаваме с $\det A$ или $|A|$.

Определение 4.7. Квадратната матрица A се нарича *неособена* или *неизродена*, ако $\det A \neq 0$. В противен случай се нарича *особена* или *изродена*.

Определение 4.8. Нека A е неособена матрица. Тогава квадратната матрица A^{-1} се нарича *обратна* на A, ако

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Теорема 4.2 (Метод на адюнгираните количества)**.** *Всяка неособена матрица A притежава единствена обратна матрица*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

където A_{ij} са адюнгираните количества на елементите a_{ij} на $|A|$.

Следствие 4.1. *Нека матрицата* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *е неособена. Тогава*

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Метод на Гаус-Жордан[1] за намиране на обратна матрица:

1) Образуваме разширената матрица $(A|E_n)$.
2) Извършваме краен брой елементарни преобразувания само по редовете на $(A|E_n)$ така, че

$$(A|E_n) \sim \cdots \sim (E_n|B).$$

Тогава $B = A^{-1}$.

Забележка 4.4. Понятието *обратна матрица* ни дава възможност да решаваме матрични уравнения от вида

$$AX = B \quad \text{и} \quad YA = B,$$

където X и Y са неизвестни матрици. Наистина, ако A притежава обратна матрица A^{-1}, то от Определение 4.8 получаваме съответно $X = A^{-1}B$ и $Y = BA^{-1}$.

Задача 4.2. *Да се намерят обратните матрици на матриците:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 3 & -5 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix};$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & -4 \\ -1 & -4 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & -5 & -4 \end{pmatrix};$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ -3 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 6 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

[1] Вилхелм Жордан (1842–1899) – немски геодезист.

Решение. Тъй като $\det A = -1$, то A е неособена. За намирането на A^{-1} можем да използваме метода на адюнгираните количества, т.е. Следствие 4.1. Така от (4.3) получаваме

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ще намерим F^{-1} по два начина.

Начин 1. Тъй като $\det F = 2$, то F е неособена. Тогава за намирането на F^{-1} можем да приложим Теорема 4.2. За адюнгираните количества получаваме:

$$F_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad F_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad F_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$F_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad F_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad F_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$F_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad F_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8; \quad F_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7.$$

Тогава от (4.2) получаваме

$$F^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 2 & -4 & 8 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Начин 2. Ще използваме метода на Гаус-Жордан за намиране на обратна матрица. Разширяваме матрицата F с единичната квадратна матрица E от същия ред като F, т.е. трети, след което извършваме елементарни преобразувания само по редовете на цялата матрица $(F|E)$ така, че E да премине на мястото на F. Съгласно използвания метод, матрицата, получена вдясно (на мястото на E), ще бъде F^{-1}.

$$
\begin{aligned}
(F|E) \quad &= \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \quad | \cdot (-1/2) \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right) = (E|F^{-1}).
\end{aligned}
$$

Отговори.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\ C^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & 11/3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$D^{-1} \quad \text{не съществува} \quad ; G^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}; \quad J^{-1} = \begin{pmatrix} 23/3 & -2 & -4/3 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ -8/3 & 1 & 1/3 \end{pmatrix};$$

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -2 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -10 & 1 & -4 & -8 \\ 13 & -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}; \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 8 & -5 & 12 \\ 1 & 5 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.3. *Да се намери неизвестната матрица X от уравнението:*

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & -7 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$;

г) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

д) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

е) $X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Въвеждаме означението

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогава, като използваме някой от методите, представени в Задача 4.2, намираме

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножавайки отляво двете страни на уравнението с A^{-1}, получаваме:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & -7 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отговори. б) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

г) $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; д) $X = \begin{pmatrix} -7/2 & 1/2 & 5/2 \\ -7/2 & -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$;

е) $X = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$; ж) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Забележка 4.5. За решаването на г), д) и е) е необходимо двете страни на уравненията да се умножат отдясно. При решаването на ж) трябва да се умножава отляво и отдясно.