Линейни преобразувания и техните матрици

Задача 1. Проверете дали изображението f е линейно и в такъв случай намерете образа и първообраза на дадения вектор v:

а) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определено от $f : (x, y) \to (x + y, x - y)$, $v = (2, -4)$;

б) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, определено от $f : (x, y, z) \to (x + y, y + z, z + x)$, $v = (4, -2, -6)$;

в) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определено от $f : (x, y) \to (xy, 0)$, $v = (2, -4)$.

Решение.
б) За да бъде изображението f линейно, трябва за произволни $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ и $c \in \mathbb{R}$ да са изпълнени двете условия: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, $f(cv_1) = cf(v_1)$.

Нека $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ са вектори от $\mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$. Тогава

$$v_1+v_2 = (x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2), \quad cv_1 = c(x_1, y_1, z_1) = (cx_1, cy_1, cz_1).$$

Следователно, съгласно условието, имаме

$$f(v_1 + v_2) = ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2), (z_1 + z_2) + (x_1 + x_2))$$

$$= (x_1 + y_1, y_1 + z_1, z_1 + x_1) + (x_2 + y_2, y_2 + z_2, z_2 + x_2) = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(cv_1) = (cx_1 + cy_1, cy_1 + cz_1, cz_1 + cx_1) = c(x_1 + y_1, y_1 + z_1, z_1 + x_1) = cf(v_1).$$

Следователно f е линейно изображение.

Търсим образа на $v = (4, -2, -6)$. Заествайки координатите на дадения вектор в аналитичното задава на f, получаваме $f(v) = (2, -8, -2)$.

Нека $u = (x, y, z)$ е първообразът на дадения вектор $v = (4, -2, -6)$. Тогава
$f(u) = (x + y, y + z, z + x) = (2, -4, -6)$. Следователно

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 2 \\ y + z = -4 \\ x + z = -6. \end{array} \right.$$

Тази система има единствено решение и то е $x = 0, y = 2, z = -6$. Следователно първообразът на дадения вектор е векторът $u = (0, 2, -6)$.

а) Изображението е линейно. $f(v) = (-2, 6)$. Първообразът на вектора v е векторът $u = (-1, 3)$.

в) Изображението f не е линейно.

Задача 2. Нека f е линейно преобразувание на векторното пространство V и $\{e_1, e_2, e_3\}$ е база на V. Нека

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2e_1 - e_3 \\ f(e_2) &= 4e_1 - 2e_3 \\ f(e_3) &= 4e_2 + 5e_3. \end{aligned}$$

Намерете $f(v)$, където $v = 3e_1 + 2e_2 - e_3$.

Решение.
I начин – чрез директно заместване. Използвайки линейността на f, имаме

$$\begin{aligned} f(v) &= f(3e_1 + 2e_2 - e_3) = 3f(e_1) + 2f(e_2) - f(e_3) \\ &= 3(2e_1 - e_3) + 2(4e_1 - 2e_3) - (4e_2 + 5e_3) \\ &= 14e_1 - 4e_2 - 12e_3. \end{aligned}$$

II начин – чрез матрицата на f и матрично умножение. Съставяме матрицата A на f в базата $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

и използваме, че $f(v) = Av$. Тогава

$$f(v) = Av = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Намерете матрицата на линейното преобразувание f в стандартните (каноничните) база на съответните векторни пространства и чрез нея намерете образа на дадения вектор v:

а) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определено от $f(x, y) \to (x + y, x - y)$, $v = (5, -4)$;

б) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, определено от $f(x, y, z) \to (2x + y, 3y - z)$, $v = (1, 2, 3)$;

в) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, определено от $f(x, y) \to (x + y, x + 2y, y)$, $v = (-1, 2)$;

г) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, определено от $f(x, y, z) \to (x + y, y + z, x - z)$, $v = (3, -2, 1)$;

д) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, определено от $f(x, y, z, t) \to (x + y, z + t)$, $v = (1, -1, 1, -1)$.

Решение.
б) Стандартната база на $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ чрез f се преобразува във векторите от $\mathbb{R}^2$:

$$f(e_1) = (2, 0), \quad f(e_2) = (1, 3), \quad f(e_3) = (0, -1).$$

Елементите на трите наредени двойки съвпадат с координатите им относно стандартната база $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$ на $\mathbb{R}^2$. Следователно компонентите на трите наредени двойки формират съответните стълбове в матрицата A от тип 2×3 на линейното преобразуване f:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$f(v) = Av = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

д) Стандартната база $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$ на $\mathbb{R}^4$ се преобразува в

$$f(e_1) = (1,0), \quad f(e_2) = (1,0), \quad f(e_3) = (0,1), \quad f(e_4) = (0,1).$$

Следователно матрицата A на f в стандартните бази на $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^2$ има вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пресмятаме

$$f(v) = Av = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отг.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $f(v) = (1,9)$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(v) = (1,3,2)$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(v) = (1,-1,2)$.

Задача 4. За всяко от дадените линейни преобразувания намерете матрицата му B в дадената база (като използвате матрицата му A в стандартната база):

а) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определено от $f(x,y) \to (x+y, x-y)$ в базата $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,2)$;

б) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определено от $f(x,y) \to (3x-y, x+2y)$ в базата $v_1 = (1,-1)$, $v_2 = (-1,2)$;

в) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, определено от $f(x,y,z) \to (x+y, y-z, x-z)$ в базата $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (1,-1,1)$, $v_3 = (-1,1,1)$.

Решение.

б) Матрицата A на f в стандартната база $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ на $\mathbb{R}^2$ е

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицата T на прехода от стандартната база $\{e_1, e_2\}$ към базата от векторите $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (-1, 2)$ е

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обратната матрица на T намираме съгласно изведеното правило

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следователно матрицата B на f в базата $\{v_1, v_2\}$ е

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

в) Аналогично на предходната подточка. Матрицата A на f в стандартната база $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ на $\mathbb{R}^3$ е

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицата T на прехода от стандартната база $\{e_1, e_2, e_3\}$ към базата от векторите $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (-1, 1, 1)$ е

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратната матрица на T намираме съгласно метода на адюнгираните количества или метода на Гаус-Жордан

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогава матрицата B на f в базата $\{v_1, v_2, v_3\}$ е

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отг. а) $B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Задача 5. Намерете ранга и дефекта на всяко от следните линейни преобразувания f и посочете по една база на областта на стойностите $\mathsf{im}f$ и ядрото $\mathsf{ker}f$ на f, ако f се задава чрез следната матрица:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.
а) За намиране на ранга на f търсим ранга на матрицата A на f, т.е. търсим трапецовидната форма на A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следователно $\mathsf{rang}(f) = \mathsf{rang}(A) = 2$.

Дефектът $\mathsf{def}(f)$ е размерността на ядрото $\mathsf{ker}f$ – векторното пространство на векторите, които се изобразяват в нулевия вектор чрез f. Следователно търсим онези $v = (x, y, z)^T$, за които $f(v) = Av = o = (0, 0)^T$. Търсените вектори са решенията на системата хомогенни линейни уравнения с основна матрица A, която съгласно полученото по-горе е еквивалентна на

$$\left| \begin{array}{l} x - y - 2z = 0 \\ y + z = 0. \end{array} \right.$$

Тъй като рангът на системата (матрицата A) е 2, а броят на неизвестните е 3, то системата е неопределена (има безброй много ненулеви решения). Общото решение зависи от един параметър. Ако изберем $z = p \in \mathbb{R}$, то $y = -p$, $x = p$. Следователно решенията на системата са $(p, -p, p)$, откъдето

$$\mathsf{ker}f = \{\ (p, -p, p)\ \mid\ p \in \mathbb{R}\}.$$

Векторите от ядрото могат да се представят във вида

$$(p, -p, p) = p(1, -1, 1),$$

следователно са колинеарни на вектора $u = (1, -1, 1)$. Този вектор е една база на $\mathsf{ker}f$ и имаме $\mathsf{def}(f) = \dim(\mathsf{ker}f) = 1$. Можем да проверим, че е изпълнено равенството

$$\mathsf{rang}(f) + \mathsf{def}(f) = \mathsf{dim}V,$$

където $V = \mathbb{R}^3$ е векторното пространство на първообразите ($f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$).

Остава да намерим една база на $\mathsf{im}f$ (векторното пространство на първообразите), за която знаем, че трябва да се състои от 2 вектора, тъй като $\mathsf{rang}(f) = \mathsf{dim}(\mathsf{im}f) = 2$. За намирането на една такава база търсим максимално линейно независима подсистема от стълбовете на матрицата A. За удобство вместо стълбовете на A разглеждаме редовете на A^T и търсим трапецовидната форма на A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следователно линейно независимите редове в трапецовидната форма на A^T (т.е. ненулевите редове в трапецовидната форма) са една база на $\mathsf{im}f$: $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (0, 1)$. Могат да бъдат получени и други бази в зависимост от избраните елементарни действия върху матрицата.

б) Търсим трапецовидната форма на A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следователно $\mathsf{rang}(f) = \mathsf{rang}(A) = 2$.

За намирането на $\mathsf{def}(f)$ решаваме системата хомогенни линейни уравнения с основна матрица A, която съгласно полученото по-горе за A е еквивалентна на

$$\left|\begin{array}{l} x + y = 0 \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Тази система е определена (има единствено решение) и затова единственото ѝ решение е нулевото $x = 0, y = 0$. Следователно ядрото $\mathsf{ker}f$ се състои само от нулевия вектор $o = (0, 0)$, т.е. $\mathsf{ker}f = \{o\}$ и затова $\mathsf{def}(f) = \dim(\mathsf{ker}f) = 0$. Нулевото векторно пространство не притежава база.

Можем да проверим, че е изпълнено равенството

$$\mathsf{rang}(f) + \mathsf{def}(f) = \mathsf{dim}V,$$

където $V = \mathbb{R}^2$ е векторното пространство на първообразите ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$).

За намирането на една база на $\mathsf{im}f$ работим с редовете на A^T и търсим трапецовидната форма на A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Следователно линейно независимите редове в трапецовидната форма на A^T са една база на $\mathsf{im}f$: $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (0, 3, 1)$.

в) Търсим трапецовидната форма на A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Следователно $\mathsf{rang}(f) = \mathsf{rang}(A) = 3$ (можете за проверите и че $\det(A) = 6 \neq 0$).

Системата хомогенни линейни уравнения с основна матрица A е определена, има само нулевото решение и следователно $\mathsf{ker} f = \{o\}$, откъдето $\mathsf{def}(f) = 0$.

Тъй като $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ и $\mathsf{rang}(f) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ (рангът на f е максимален), то $\mathsf{im} f = \mathbb{R}^3$, откъдето следва, че всяка база на $\mathbb{R}^3$ (напр. стандартната база) е база и на $\mathsf{im} f$.

д) Търсим трапецовидната форма на A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{lll} \cdot(-3) & \cdot(-4) & \\ + & & \\ & + & \\ & & + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} & \\ & \\ + & \\ & + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ | \cdot (-1/5) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следователно $\mathsf{rang}(f) = \mathsf{rang}(A) = 2$.

Ядрото $\mathsf{ker} f$ съдържа наредените четворки $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, за които $f(v) = Av = o = (0, 0, 0, 0)^T$. Системата хомогенни линейни уравнения с основна матрица A е еквивалентна на системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{array} \right.$$

Рангът на системата е 2, броят на неизвестните е също 2. Следователно системата е неопределена и общото ѝ решение зависи от 2 параметъра. Ако изберем $x_3 = p \in \mathbb{R}$ и $x_4 = q \in \mathbb{R}$, то $x_2 = p - 2q$, $x_1 = -p + q$. Следователно

$$\mathsf{ker} f = \{(-p + q, p - 2q, p, q) \ \mid \ p, q \in \mathbb{R}\}.$$

Тъй като произволен вектор v от $\mathsf{ker} f$ може да се представи във вида

$$v = (-p + q, p - 2q, p, q) = p(-1, 1, 1, 0) + q(1, -2, 0, 1),$$

то u е линейна комбинация на векторите $v_1 = (-1, 1, 1, 0)$ и $v_2 = (1, -2, 0, 1)$. Следователно $\{v_1, v_2\}$ е една база на $\mathsf{ker} f$ и $\mathsf{def}(f) = \mathsf{dim}(\mathsf{ker} f) = 2$.

Търсим трапецовидната форма на A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{lll} \cdot(-2) & & \cdot(-3) \\ + & & \\ & + & \\ & & + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} & \\ & \cdot(-2) \\ + & \\ & + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ | \cdot (-1/5) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следователно векторите $u_1 = (1, 3, -4, -1)$, $u_2 = (0, 1, -1, -1)$ са една база на $\mathsf{im}f$.

Отг. г) $\mathsf{rang}(f) = 3$, $\mathsf{def}(f) = 1$, $\mathsf{ker}f = \{(-2p, p, p, 0) \mid p \in \mathbb{R}\}$, една база на $\mathsf{ker}f$ се състои от вектора $v = (-2, 1, 1, 0)$, една база на $\mathsf{im}f$ се състои от векторите $u_1 = (1, 2, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1, -2)$, $u_3 = (0, 0, 1, 6)$.

Задача 6. Нека изображението $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ е определено от

$$f(X) = MX - XM$$

за всяка $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, където

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Докажете, че f е линейно изображение, намерете матрицата му в стандартната база на $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathsf{rang}(f)$ и $\mathsf{def}(f)$, като посочите по една база на $\mathsf{im}f$ и $\mathsf{ker}f$.

Решение. Нека

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Тогава

$$f(X) = MX - XM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z-3y & -2x-3y+2t \\ 3x+3z-3t & 3y-2z \end{pmatrix}.$$

Следователно матрицата с координати (x, y, z, t) в стандартната база на $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ чрез f се изобразява в матрицата с координати $(2z-3y,\ -2x-3y+2t,\ 3x+3z-3t,\ 3y-2z)$, т.е.

$$f : (x, y, z, t) \to (2z-3y,\ -2x-3y+2t,\ 3x+3z-3t,\ 3y-2z)$$

е аналитичният вид на f (в координатен запис).

Използвайки аналитичния вид на f, докажете, че f е линейно изображение.

Намираме образите на матриците от стандартната база $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

чрез f и за удобство ще запишем координатите на матриците $f(E_i)$ чрез стандартната база вместо да запишем тези матрици в матричен вид

$$f(E_1) = (0, -2, 3, 0)$$
$$f(E_2) = (-3, -3, 0, 3)$$
$$f(E_3) = (2, 0, 3, -2)$$
$$f(E_4) = (0, 2, -3, 0.)$$

Следователно матрицата A на f в стандартната база на $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ е

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Намираме ранга на A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и така установяваме, че $\mathsf{rang}(f) = \mathsf{rang}(A) = 2$.

Намираме $\mathsf{ker} f$ като решенията на системата хомогенни линейни уравнения относно елементите на матрицата X, получена от условието $MX - XM = O$ (т.е. X са матриците, които комутират с M) или като системата хомогенни линейни уравнения с основна матрица A.

Поради намерената по-горе трапецовидна форма на A, тази система е еквивалентна на

$$\left| \begin{array}{l} x + z - t = 0 \\ 3y - 2z = 0. \end{array} \right.$$

Решенията ѝ са $x = q - 3p$, $y = 2p$, $z = 3p$, $t = q$, където $p, q \in \mathbb{R}$, т.е. матриците от вида

$$X = \begin{pmatrix} q - 3p & 2p \\ 3p & q \end{pmatrix}.$$

Следователно $\mathsf{ker} f$ е 2-мерно векторно пространство, т.е. $\mathsf{def}(f) = \mathsf{dim}(\mathsf{ker} f) = 2$ и една негова база се състои от матриците

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

За намиране на една база на $\mathsf{im} f$ търсим база на линейната обвивка на стълбовете на матрицата A. Записваме A^T и я привеждаме в трапецовидна форма по редовете

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следователно векторите с координати $(1, 1, 0, -1)$ и $(0, -2, 3, 0)$, т.е. матриците

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

образуват едва база на $\mathsf{im} f$.