Линейни (векторни) пространства. База и размерност на линейно пространство

1. Определение за линейно пространство и примери

Определение. Непразно множество V се нарича ***линейно (векторно) пространство над числовото поле*** $\mathbb{K}$, ако е снабдено с две действия (линейни действия) – *събиране на елементи от* V, при което на всеки два елемента $u, v \in V$ се съпоставя еднозначно елемент $u + v \in V$, наречен *сума* на u и v и *умножение на елемент от* V *с число от* $\mathbb{K}$, при което на всеки елемент $u \in V$ и $c \in \mathbb{K}$ се съпоставя еднозначно елемента $cv \in V$, наречен *произведение* на c и v, като за произволни $u, v, w \in V$ и $c, d \in \mathbb{K}$ са изпълнени следните свойства (наречени *аксиоми за линейно пространство*):

1. $u + v = v + u$ *(комутативност при събиране)*;

2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(асоциативност при събиране)*;

3. *съществува елемент* o *такъв, че* $v + o = v$ *за всеки елемент* v; *елементът* o *се нарича нулев елемент*;

4. *за всеки елемент* v *съществува елемент* $(-v)$ *такъв, че* $v + (-v) = o$; *елементът* $(-v)$ *се нарича противоположен елемент на* v;

5. $c(u + v) = cu + cv$ *(дистрибутивност относно множител от* $\mathbb{K}$*)*;

6. $(c + d)v = cv + dv$ *(дистрибутивност относно множител от* V*)*;

7. $(cd)v = c(dv)$ *(асоциативност при умножение с множител от* $\mathbb{K}$*)*;

8. $1v = v$.

Елементите на V се наричат ***вектори***. Действията събиране на вектори и умножение на число с вектор се наричат ***линейни действия (операции)***.

Ако $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то V се нарича ***реално векторно пространство***, а ако $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то V се нарича ***комплексно векторно пространство***.

Някои следствия от аксиомите 1–8.

Следствие 1. *Нулевият елемент на всяко векторно пространство е единствен.*

Доказателство. Нека допуснем, че в произволното векторно пространство V съществуват два нулеви елемента, означени с o_1 и o_2, т.е. такива, че $v + o_1 = v + o_2 = v$ за всяко $v \in V$. Тогава нека разгледаме сумата $o_1 + o_2$. От една страна, тъй като o_1 е нулев елемент, то $o_1 + o_2 = o_2$. От друга страна, тъй като и o_2 е нулев елемент, то $o_1 + o_2 = o_1$. Така получихме, че $o_1 = o_2$, следователно нулевият елемент на V е единствен.

Следствие 2. *Противоположният елемент на всеки елемент на векторно пространство е единствен.*

Доказателство. Нека $v \in V$ е произволен елемент и допуснем, че съществуват два негови противоположни елемента във V, т.е. съществуват елементите $v_1, v_2 \in V$ със свойството $v + v_1 = o$ и $v + v_2 = o$, където o е нулевият елемент на V. Имаме

$$v_1 = v_1 + o = v_1 + (v + v_2) = (v_1 + v) + v_2 = o + v_2 = v_2.$$

Следователно $v_1 = v_2$, с което доказахме твърдението.

Следствие 3. $0v = o$ *за всяко* $v \in V$.

Доказателство. Имаме

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v.$$

Следователно при събирането на елемента $x = 0v \in V$ с $0v$ се получава отново същият елемент $x = 0v$. Това показва, че $0v = o$ е нулевият елемент на V.

Следствие 4. $(-1)v = -v$ *за всяко* $v \in V$.

Доказателство. Имаме

$$o = 0v = (1 + (-1))v = 1v + (-1)v = v + (-1)v.$$

Следователно $(-1)v$ съвпада с противоположния елемент на v, т.е. $(-1)v = -v$.

Следствие 5. $co = o$ за всяко $c \in \mathbb{K}$.

Следствие 6. *Ако* $cv = o$, *то или* $c = 0$, *или* $v = o$.

Доказателство. Нека $cv = o$. Ако $c = 0$, то равенството е изпълнено за всяко $v \in V$. Ако $c \neq 0$, то имаме

$$v = 1.v = \left(c.\frac{1}{c}\right) v = \frac{1}{c}(cv) = \frac{1}{c}.o = o,$$

следователно $v = o$.

Следствие 7. *Ако* u *и* v *са произволни вектори от* V, *то уравнението* $u + x = v$ *има единствено решение* $x \in V$, *което се определя от* $x = v + (-u)$ *и се нарича разлика на векторите* v *и* u *(означаваме с* $v - u$*).*

Примери за векторни пространства

1. Всяко числово поле $\mathbb{K}$ е векторно пространство над себе си. Следователно векторни пространства са множеството на реалните числа $\mathbb{R}$ и множеството на комплексните числа $\mathbb{C}$ относно естествените операции събиране и умножение с число, дефинирани над тези числови множества.

2. Множеството на свободните (геометричните) вектори, т.е. на насочените отсечки, с линейните действия събиране на вектори (по правилото на триъгълника или правилото на успоредника) и умножение на вектор с реално число е реално векторно пространство. Нарича се ***геометрично векторно пространство.***

3. Множеството $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$, на ***наредените n-торки от реални числа*** е векторно пространство над $\mathbb{R}$ относно операциите събиране и умножение с реално число, дефинирани съответно чрез:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$
$$c(x_1, x_2, ..., x_n) = (cx_1, cx_2, ..., cx_n)$$

за произволни $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ и $c \in \mathbb{R}$.

Нулевият елемент на $\mathbb{R}^n$ е наредената n-торка $(0, 0, ..., 0)$.

Тогава противоположният елемент на $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ е $(-x_1, -x_2, ..., -x_n)$.

Същото важи и за множеството $\mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, ..., z_n) | z_1, z_2 ..., z_n \in \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$, на наредените n-торки комплексни числа – то е векторно пространство над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$.

В частност множеството на наредените двойки реални числа $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$, е векторно пространство над $\mathbb{R}$ относно операциите събиране и умножение с реално число, дефинирани съответно чрез:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$c(x_1, y_1) = (cx_1, cy_1)$$

за произволни $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ и $c \in \mathbb{R}$.

Нулевият елемент на $\mathbb{R}^2$ е наредената двойка $(0, 0)$.

Тогава противоположният елемент на $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ е $(-x, -y)$.

Геометричната интерпретация на $\mathbb{R}^2$ е множеството от всички точки (x, y) в равнината.

4. Множествата $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ на матриците от тип $m \times n$ с елементи съответно реални или комплексни числа относно действията събиране на матрици от един и същ тип и умножение на матрица с реално или съответно комплексно число (дефинирани в предната лекция) са съответно реално и комплексно векторно пространство.

5. Множеството $\mathbb{R}_n[x]$ на полиномите на x с реални коефициенти от степен $\leq n$, $n \in \mathbb{N}$, е реално векторно пространство относно операциите събиране на полиноми и умножение на полином с реално число.

Ако $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ и $g(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + b_0$ са елементи на $\mathbb{R}_n[x]$, а $c \in \mathbb{R}$, то:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + ... + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$

$$(cf)(x) = cf(x) = c(a_n x^n + ... + a_1 x + a_0) = ca_n x^n + ... + ca_1 x + ca_0.$$

Нулевият елемент на $\mathbb{R}_n[x]$ е числото 0, а противоположният елемент на произволен $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ се определя от

$$(-f)(x) = -f(x) = -a_n x^n - ... - a_1 x - a_0.$$

6. Множеството $C[a,b]$ на всички реални непрекъснати функции в интервала $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$ е реално векторно пространство относно следните операции:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x),$$

където $f(x), g(x) \in C[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$. Нулевият елемент на $C[a,b]$ е нулевата функция, т. е. числото 0. Противоположният елемент на $f(x) \in C[a,b]$ е $-f(x)$.

Определение. Непразното подмножество W на векторното пространство V ($\emptyset \neq W \subseteq V$) се нарича ***векторно подпространство*** на V, ако W е векторно пространство относно линейните действия, дефинирани над елементите на V. В такъв случай записваме $W \leq V$.

Твърдение. *Непразното подмножество W на векторното пространство V е векторно подпространство на V, точно когато е изпълнено едно от следните еквивалентни условия*:

1) *W е затворено относно линейните действия над елементите на V, т. е. за произволни $u, v \in W$ и $c \in \mathbb{K}$ имаме*: $u + v \in W$ и $cv \in W$;

2) *За всеки $u, v \in W$ и $c, d \in \mathbb{K}$ имаме $cu + dv \in W$.*

Множеството $\{o\}$ е векторно пространство и се нарича *нулево векторно пространство.*

Очевидно за всяко векторно пространство V е изпълнено $V \leq V$, $\{o\} \leq V$. Тези векторни подпространства се наричат *тривиални* векторни подпространства на V.

Нулевият елемент на дадено векторно пространство V принадлежи на всяко негово векторно подпространство.

Примери.

Подмножеството $M = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ на векторното пространство $\mathbb{R}^3$ на наредените тройки реални числа е векторно подпространство на $\mathbb{R}^3$, защото за всеки $v = (x_1, y_1, 0)$, $w = (x_2, y_2, 0)$ от M и $c \in \mathbb{R}$ е изпълнено

$$v + w = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in M, \quad cv = (cx_1, cy_1, 0) \in M,$$

т.е. множеството M е затворено относно линейните действия в $\mathbb{R}^3$.

Подмножеството $N = \{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ на векторното пространство $\mathbb{R}^3$ не е векторно подпространство на $\mathbb{R}^3$, тъй като за $v = (x_1, y_1, 1)$ и $w = (x_2, y_2, 1)$ от N сумата $v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 2)$ не е елемент на N.

Друг начин да установим същото е като забележим, че нулевият елемент на $\mathbb{R}^3$, т.е. наредената тройка $o = (0, 0, 0)$, не принадлежи на множеството N.

2. Линейна зависимост и линейна независимост на вектори

Определение. Нека V е векторно пространство над полето $\mathbb{K}$, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ е произволна система от вектори на V, а $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{K}$. Вектор u от вида

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$$

се нарича ***линейна комбинация*** на векторите $v_1, v_2, ..., v_n$.

Една линейна комбинация се нарича ***тривиална***, ако всички коефициенти в тази комбинация са равни на нула. Очевидно за произволна система от вектори $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \in V$ е изпълнено

$$0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n = o.$$

Множеството $\mathsf{span}\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ от всички линейни комбинации на $v_1, v_2, ..., v_n$ е векторно пространство над $\mathbb{K}$ и още по-точно, векторно подпространство на V. Нарича се ***линейна обвивка*** на V.

Ако $u = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$ и $w = d_1v_1 + d_2v_2 + ... + d_nv_n$, където $c_1, ..., c_n, d_1, ..., d_n \in \mathbb{K}$, са два елемента на $\mathsf{span}\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и $a \in \mathbb{K}$, то

$$u + w = (c_1 + d_1)v_1 + (c_2 + d_2)v_2 + ... + (c_n + d_n)v_n \in \mathsf{span}\{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

$$au = a(c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n) = ac_1v_1 + ac_2v_2 + ... + ac_nv_n \in \mathsf{span}\{v_1, v_2, ..., v_n\}.$$

Следователно $\mathsf{span}\{v_1, v_2, ..., v_n\} \leq V$.

Определение. Система от вектори $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ се нарича ***линейно зависима***, ако съществуват числа $c_1, c_2, ..., c_n$, поне едно от които е различно от нула, така че да е в сила равенството

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = o.$$

Векторите на линейно зависима система се наричат ***линейно зависими вектори.***

С други думи, една система от вектори на дадено векторно пространство е линейно зависима, ако нулевият вектор на това пространство може да се представи като тяхна *нетривиална линейна комбинация.*

Пример. Нека разгледаме векторното пространство $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Системата от вектори $v_1(1, 1, -1)$, $v_2(0, 1, 1)$, $v_3(1, 2, 0)$ е линейно зависима, тъй като

$$v_1 + v_2 - v_3 = o = (0, 0, 0).$$

Забелязваме, че поне един от векторите v_1, v_2 и v_3 (в този случай и трите вектора) може да се представи като линейна комбинация на останалите два:

$$v_1 = v_3 - v_2, \qquad v_2 = v_3 - v_1, \qquad v_3 = v_1 + v_2.$$

Както ще видим по-нататък, това е една важна характеристика на векторите, принадлежащи на линейно зависима система.

Пример. Още един пример за линейно зависима система от вектори на $\mathbb{R}^3$ е следната: $u = (1, -1, 2)$, $v = (3, 0, -1)$, $w = (9, -3, 4)$, за които е в сила

$$3u + 2v - w = o,$$

а също и равенствата

$$w = 3u + 2v, \qquad v = \frac{1}{2}w - \frac{3}{2}u, \qquad u = \frac{1}{3}w - \frac{2}{3}v.$$

Пример. Векторите $u = (1, 2, -3)$ и $v = (-2, -4, 6)$ също са линейно зависими, тъй като $v = -2u$.

Определение. Система от вектори $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ се нарича ***линейно независима***, ако само тяхната тривиална линейна комбинация е равна на нулевия вектор, т. е. равенството

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = o.$$

е изпълнено, точно когато $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Векторите на линейно независима система се наричат ***линейно независими вектори***.

Пример. Нека разгледаме наредените тройки (вектори на $\mathbb{R}^3$):
$v_1 = (1, -1, 2)$ и $v_2 = (3, 0, -1)$. Използвайки определенията, ще проверим дали системата от двата вектора $\{v_1, v_2\}$ е линейно зависима или линейно независима.

Приравняваме произволна линейна комбинация на тези вектори, т.е. израза $xv_1 + yv_2$ $(x, y \in \mathbb{R})$ на нулевия вектор $o = (0, 0, 0)$. Така получаваме $xv_1 + yv_2 = o$. Ще търсим стойностите на x и y, за които е изпълнено последното равенство, т.е.

$$xv_1 + yv_2 = x(1, -1, 2) + y(3, 0, -1) = (x + 3y, -x, 2x - y) = o = (0, 0, 0).$$

Равенството $(x + 3y, -x, 2x - y) = (0, 0, 0)$ е еквивалентно на следната система хомогенни линейни уравнения

$$\left|\begin{array}{l} x + 3y = 0 \\ -x = 0 \\ 2x - y = 0. \end{array}\right.$$

Тъй като единственото решение на горната система е $x = y = 0$, то нулевият вектор се изразява само като нулева линейна комбинация на v_1 и v_2. Следователно тези вектори са линейно независими.

Пример. Нека разгледаме матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

принадлежащи на векторното пространство $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Нека x, y, z са произволни реални числа. За да установим дали системата $\{A, B, C\}$ е линейно зависима или независима, разглеждаме линейната комбинация $xA + yB + zC$ и я приравняваме на нулевия вектор на $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, т.е. нулевата квадратна матрица от втори ред. Имаме следното матрично равенство (уравнение относно коефициентите x, y и z)

$$x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

След сравняване на съответните компоненти на матриците от двете страни на последното равенство достигаме до системата

$$\left|\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + z = 0. \end{array}\right.$$

Единственото решение на горната система е нулевото, т.е. $x = y = z = 0$. Следователно само нулевата линейна комбинация на матриците A, B и C е равна на нулевата матрица, т.е. тези матрици на линейно независими.

Никоя от матриците A, B или C не може да се представи като линейна комбинация на останалите две. Същото важи и за линейно независимите вектори от предния пример.

Както ще видим по-късно, това е в сила за векторите на всяка линейно независима система.

В тази лекция проверката за линейна зависимост или независимост на вектори правим, използвайки само определенията от теорията. По-нататък тази проверка ще извършваме чрез понятието ранг на матрица и/или апарата на детерминантите, което значително облекчава техническата част на задачата.

Твърдение. *Система от един вектор е линейно зависима, точно когато този вектор е нулевият.*

Система от два или повече вектора е линейно зависима, точно когато поне един от тези вектори може да се представи като линейна комбинация на останалите вектори от системата.

Доказателство. Нека V е произволно векторно пространство над $\mathbb{K}$, $\{v\}$ е система от един вектор $v \in V$ и $c \in \mathbb{K}$. Тогава, за да установим линейна зависимост или независимост, трябва да разгледаме решенията на $cv = o$ за c. Знаем, че за да бъде $\{v\}$ линейно зависим е необходимо и достатъчно да бъде изпълнено $cv = o$ при $c \neq 0$. Но съгласно следствие от аксиомите за векторно пространство $cv = o$ е изпълнено, точно когато $c = 0$ или $v = o$. Тъй като вече изключихме първата възможност $c \neq 0$, то ни остава само втората възможност $v = o$. Следователно твърдението е вярно.

За да докажем втората част на твърдението, нека $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $n > 1$, е система вектори на V и $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{K}$.

Първо предполагаме, че тази система и линейно зависима и следователно равенството

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_i v_i + ... + c_n v_n = o,$$

е изпълнено, като поне един от коефициентите е различен от нула. Нека този коефициент е $c_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$. Тогава можем да разделим двете страни на горното равенство на c_i и от полученото равенство можем да изразим вектора v_i по следния начин

$$v_i = -\frac{c_1}{c_i} v_1 - \frac{c_2}{c_i} v_2 - ... - \frac{c_n}{c_i} v_n.$$

Обратно, ако предположим, че един от векторите от разглежданата система се изразява чрез останалите, например $v_1 = c_2 v_2 + ... + c_n v_k$, то получаваме: $(-1)v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n = o$, където със сигурност поне един от коефициентите е различен от нула – този пред вектора v_1.

Твърдение. *Всяка система от вектори, която съдържа линейно зависима подсистема, е линейно зависима.*

Доказателство. Нека $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ е система от вектори на V, която съдържа линейно зависима подсистема, и без ограничение на общността можем да считаме, че векторите $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$, $k \leq n$, са линейно зависими. Следователно съществуват $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{K}$, поне едно от които е различно от нула, такива че

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_k v_k = o.$$

Тогава е изпълнено и

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_k v_k + 0 v_{k+1} + ... + 0 v_n = o,$$

като поне едно от числата $c_1, c_2, ..., c_n$ е различно от нула. Следователно системата от вектори $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ е линейно зависима.

Твърдение. *Всяка линейно независима система съдържа само линейно независими подсистеми.*

Твърдение. *Ако една система от вектори съдържа нулевия вектор, то тази система е линейно зависима.*

Доказателство. Следва директно от твърдението, че всяка система от вектори, която съдържа линейно зависима подсистема, е линейно зависима, тъй като нулевият вектор $\{o\}$ е линейно зависим и образува линейно зависима подсистема.

Може да се докаже и директно. Нека разгледаме системата $\{o, v_1, v_2, ..., v_n\}$. Изпълнено е

$$c.o + 0 v_1 + 0 v_2 + ... + 0 v_n = o$$

при $c \neq 0$. Следователно системата $\{o, v_1, v_2, ..., v_n\}$ е линейно зависима.

3. Пораждащи системи от вектори

Определение. Системата от вектори $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ на векторното пространство V се нарича ***пораждаща*** за V , ако всеки вектор на V се изразява като линейна комбинация на $v_1, v_2, ..., v_n$, т.е. $V = \mathsf{span}\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

Казва се още, че тази система поражда V , а V е породено от нея.

Векторите на една пораждаща система могат да бъдат както линейно независими, така и линейно зависими. Ще разгледаме такива примери.

Определение. Векторно пространство V се нарича ***крайномерно***, ако притежава пораждаща система от краен брой вектори.

В противен случай V се нарича ***безкрайномерно***.

Примери за пораждащи системи

Пример. Нека разгледаме векторите $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$ на векторното пространство $\mathbb{R}^2$.

Тъй като всеки вектор $u = (a, b)$ на $\mathbb{R}^2$ може да се представи във вида

$$u = ae_1 + be_2 = a(1, 0) + b(0, 1) = (a, b),$$

то системата $\{e_1, e_2\}$ е пораждаща за $\mathbb{R}^2$.

Освен това от горното равенство се вижда, че всеки вектор на $\mathbb{R}^2$ се представя по единствен начин като линейна комбинация на e_1 и e_2. Както ще видим по-късно, това се дължи на факта, че двата вектора от тази система са линейно независими.

Пример. Нека разгледаме друга система от вектори на $\mathbb{R}^2$, състояща се от $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, -1)$, $u_3 = (2, 0)$.

Нека $v = (a, b)$ е произволен вектор на $\mathbb{R}^2$. Търсим представяне от вида

$$v = xu_1 + yu_2 + zu_3 = x(1, 1) + y(1, -1) + z(2, 0),$$

където $x, y, z \in \mathbb{R}$. Горното равенство е еквивалентно на

$$(a, b) = (x + y + 2z, x - y),$$

откъдето след приравняване на двете компоненти, достигаме до системата линейни уравнения за x, y, z:

$$\left| \begin{array}{l} x + y + 2z = a \\ x - y = b. \end{array} \right.$$

Последната система има безброй много решения за x, y, z

$$x = \frac{a + b - 2z}{2}, \quad y = \frac{a - b - 2z}{2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Следователно всеки вектор $v \in \mathbb{R}^2$ може да се представи като линейна комбинация на системата от вектори $\{u_1, u_2, u_3\}$, откъдето достигаме до извода, че $\{u_1, u_2, u_3\}$ е пораждаща за $\mathbb{R}^2$, но представянето не е единствено (всеки вектор от $\mathbb{R}^2$ може да се представи по безброй много начини като линейна комбинация на $\{u_1, u_2, u_3\}$).

Съществената разлика между двете пораждащи системи на $\mathbb{R}^2$, които разгледахме, е следната.

Чрез векторите $\{e_1, e_2\}$ всеки вектор се представя по единствен начин, докато чрез $\{u_1, u_2, u_3\}$ всеки вектор се представя по безброй много начини. Това се дължи на факта, че системата $\{e_1, e_2\}$ е линейно независима (e_1 и e_2 не се изразяват един чрез друг), докато системата $\{u_1, u_2, u_3\}$ е линейно зависима ($u_3 = u_1 + u_2$).

Забелязаното от нас в предходните два примера се потвърждава от следното

Твърдение. *Нека системата от вектори $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ на векторното пространство V е пораждаща за V. Тогава системата $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ е линейно независима, точно когато всеки вектор на V се представя по единствен начин като линейна комбинация на $v_1, v_2, ..., v_n$.*

Доказателство. Нека $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ е пораждаща система за V.

Нека системата е $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ линейно независима. Ще докажем, че всеки вектор на V се изразява по единствен начин чрез $v_1, v_2, ..., v_n$. Нека допуснем, че $u \in V$ се изразява по два начина чрез $v_1, v_2, ..., v_n$, т.е.

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n, \quad u = d_1v_1 + d_2v_2 + ... + d_nv_n,$$

където $c_1, .., c_n, d_1, ..., d_n \in \mathbb{K}$ са две линейни представяния на u. Изваждаме почленно тези две равенства и получаваме

$$o = u - u = (c_1 - d_1)v_1 + (c_2 - d_2)v_2 + ... + (c_n - d_n)v_n.$$

Но тъй като системата $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ е линейно независима, то нулевият вектор $o \in V$ се представя само като нулева линейна комбинация на $v_1, v_2, ..., v_n$. Следователно

$$c_1 - d_1 = 0, \quad c_2 - d_2 = 0, \quad ... \quad c_n - d_n = 0,$$

откъдето следва $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$, ..., $c_n = d_n$. Следователно двете представяния на u съвпадат и оттам всеки вектор на V се представя по единствен начин чрез $v_1, v_2, ..., v_n$.

Обратно. Нека всеки вектор на V се представя по единствен начин като линейна комбинация на векторите от пораждащата система $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Това важи и за нулевия вектор на V. Знаем, че нулевият вектор е нулевата (тривиалната) линейна комбинация на векторите $v_1, v_2, ..., v_n$, т.е.

$$o = 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n.$$

Но това представяне трябва да бъде единствено. Следователно само нулевата линейна комбинация на векторите $v_1, v_2, ..., v_n$ е равна на нулевия вектор, откъдето получаваме, че системата $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ е линейно независима.

4. База (базис) на векторно пространство

Определение. Наредена система от вектори на ненулево векторно пространство V, която е линейно независима и пораждаща за V, си нарича ***база (базис)*** на V.

Векторите, които образуват база, се наричат ***базисни.***

Нулевото векторно пространство $\{o\}$ не притежава база, тъй като всички негови вектори, т.е. векторът o, са линейно зависими.

Да разгледаме отново векторното пространство $\mathbb{R}^2$ и системата от вектори $\{e_1, e_2\}$, където $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. За тази система от вектори вече установихме, че е пораждаща за $\mathbb{R}^2$ и е линейно независима. Следователно $\{e_1, e_2\}$ е една база на $\mathbb{R}^2$.

Всяка ненулево крайномерно векторно пространство има безброй много бази. Така например $\{u_1 = (1, 1), u_2 = (1, -1)\}$ също е база $\mathbb{R}^2$.

Твърдение. *Всяко ненулево крайномерно векторно пространство притежава база.*

Доказателство. Нека $V \neq \{o\}$ е крайномерно векторно пространство. Следователно V притежава пораждаща система, състояща се от краен брой вектори. Нека $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ е такава система. Тогава всеки вектор $u \in V$ има представяне

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k.$$

Освен това поне един от векторите на пораждащата система е ненулев. След евентуално преномериране можем да считаме, че $v_1 \neq o$. Тогава системата $L_1 = \{v_1\}$ е линейно независима. Ако тя е и пораждаща, то L_1 е база на V и твърдението е доказано.

Нека L_1 не е пораждаща. Тогава съществува вектор $v \in \{v_2, v_3, ..., v_k\}$, за който системата $L_2 = \{v_1, v\}$ е линейно независима. Това е вярно, тъй като в противен случай всеки вектор от $\{v_2, v_3, ..., v_k\}$ би се изразявал линейно чрез v_1 ($v_2 = d_2v_1$,..., $v_k = d_kv_1$) и тогава за произволен $u \in V$ ще следва

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k = c_1v_1 + (c_2d_2)v_1 + ... + (c_kd_k)v_1 = (c_1 + c_2d_2 + ... + c_kd_k)v_1.$$

Тогава системата L_1 ще бъде пораждаща, което е противоречие. След евентуално преномериране в системата $\{v_2, v_3, ..., v_k\}$ можем да считаме, че $v = v_2$. Ако линейно независимата система L_2 е и пораждаща, то твърдението е доказано.

Нека L_2 не е пораждаща. Повтаряйки горните разсъждения, установяваме съществуването на вектор $w \in \{v_3, v_4, ..., v_k\}$, за който системата $L_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ е линейно независима. Ако тя е и пораждаща, твърдението е доказано. В противен случай горният процес продължава по същия начин до получаването на линейно независима система L_p, $1 \leq p \leq k$, която е пораждаща. Тъй като първоначалната пораждаща система $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ е крайна, то описаният процес също е краен – евентуално може да приключи за $L_k = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Следователно получената система L_p е база на V.

Следствие. *От всяка пораждаща система от вектори наненулево крайномерно векторно пространство може да се извлече база на това пространство.*

Твърдение. *Всяка линейно независима система от вектори на крайномерно векторно пространство може да се допълни до база на пространството.*

Твърдение. *Нека системата от вектори* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *на* V *е база на ненулевото крайномерно векторно пространство* V. *Тогава всяка система от вектори на* V, *която съдържа повече от* n *на брой вектора, е линейно зависима.*

Твърдение. *Всички бази на ненулево крайномерно векторно пространство съдържат равен брой вектори.*

Определение. Броят на векторите в произволна база на ненулевото крайномерно векторно пространство V се нарича ***размерност*** на V и се означава с $\dim V$. За размерност на нулевото векторно пространство се приема числото нула, т.е. $\dim\{o\} = 0$.

Твърдение. *За* n*-мерно векторно пространство са в сила следните твърдения*:

1) *всяка линейно независима система има най-много* n *вектора*;

2) *всяка пораждаща пространството система има най-малко* n *вектора*;

3) *всяка линейно независима система от* n *вектора е база*;

4) *всяка пораждаща пространството система от* n *вектора е база*;

5) *всяка система от* $n+1$ *вектора е линейно зависима.*

Стандартни бази и размерност на някои векторни пространства

Стандартната база на $\mathbb{R}^n$ се състои от наредените n-торки:

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, 0..., 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, .., 0), ..., \quad e_n = (0, 0, 0, ..., 1).$$

Следователно $\dim \mathbb{R}^n = n$. В частност, $\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

В частност, стандартната база на $\mathbb{R}^2$ се състои от векторите $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$, а тази на $\mathbb{R}^3$ — от векторите $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ и $e_3 = (0, 0, 1)$.

Стандартната база на $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ се състои от матриците:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ...,$$

$$E_{1n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ..., E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следователно $\dim \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$.

В частност, стандартната база на векторното пространство $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ на квадратните матрици от втори ред се състои от матриците:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и затова $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$.

Стандартната база на $\mathbb{R}_n[x]$ се състои от полиномите $1, x, x^2, ..., x^n$, тъй като всеки полином $f(x)$ от $\mathbb{R}_n[x]$ е от вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

и полиномите $1, x, x^2, ..., x^n$ са линейно независими. Тогава $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

Пример. Докажете, че подмножеството $\mathrm{G} = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0\}$ на $\mathbb{R}^4$ е линейно подпространство на $\mathbb{R}^4$, посочете една негова база и намерете неговата размерност.

Условието $x + y = 0$ е еквивалентно на $y = -x$. Следователно можем да зададем множеството G и по следния еквивалентен начин

$$G = \{(x, -x, z, t) \mid x, z, t \in \mathbb{R}\}.$$

Нека докажем, че G е векторно подпространство на $\mathbb{R}^4$. Взимаме два произволни елемента $v_1 = (x_1, -x_1, z_, t_1)$ и $v_2 = (x_2, -x_2, z_2, t_2)$ на G и $c \in \mathbb{R}$. Тогава

$$v_1 + v_2 = (x_1, -x_1, z_, t_1) + (x_2, -x_2, z_2, t_2) = (x_1 + x_2, -(x_1 + x_2), z_1 + z_2, t_1 + t_2) \in G,$$

$$cv_1 = c(x_1, -x_1, z_, t_1) = (cx_1, -cx_1, cz_1, ct_1) \in G.$$

Следователно множеството G е затворено относно двете линейни действия в $\mathbb{R}^4$ и оттам е векторно подпространство на $\mathbb{R}^4$, т.е. $G \leq \mathbb{R}^4$.

Ще намерим една база на G. Нека зададем на параметрите x, z, t, определящи произволен елемент на G, система от линейно независими стойности, например

x	z	t	$v_i \in G$
1	0	0	$v_1 = (1, -1, 0, 0)$
0	1	0	$v_2 = (0, 0, 1, 0)$
0	0	1	$v_3 = (0, 0, 0, 1)$

Проверете, че така получените вектори $v_1, v_2, v_3 \in G$ са линейно независими.

Освен това системата $\{v_1, v_2, v_3\}$ е пораждаща за G, тъй като за произволен вектор $v = (x, -x, z, t) \in G$ е изпълнено

$$v = (x, -x, z, t) = xv_1 + zv_2 + tv_3 = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1).$$

Следователно системата $\{v_1, v_2, v_3\}$ е база на G и тогава $\dim G = 3$.

Координати на вектор относно база

Нека V е n-мерно векторно пространство над $\mathbb{K}$ с база $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Тогава произволен вектор $v \in V$ се представя по единствен начин като линейна комбинация на векторите $e_1, e_2, ..., e_n$, т.е. изразяването

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n \tag{1}$$

еднозначно, където $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}$.

Определение. Числата от наредената n-торка $(x_1, x_2, ..., x_n)$, определена от (1), се наричат ***координати*** на вектора v относно базата $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Често вместо равенството (1) записваме $v(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Координатите на наредена n-торка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ относно естествената база на $\mathbb{R}^n$ съвпадат със съответните елементи на наредената n-торка.

Координатите на всяка матрица $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ относно стандартната база на $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ са съответните елементи a_{ij} на тази матрица.

Координатите на полинома $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ относно стандартната база $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ на $\mathbb{R}_n[x]$ са коефициентите a_i пред съответните степени на x. Тогава можем да запишем $f(x)(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$.