Линейна алгебра
1. Комплексни числа

специалности: Математика, Бизнес математика, Приложна математика, I курс

лектор: Марта Теофилова

Кратка история

- Първата документирана "поява" на комплексните числа в математическата литература е в труд на Херон Александрийски (~ 60 г. от н.е.), когато при изчисляване на обема на пресечена пирамида той получил отрицателна величина под корен квадратен ($\sqrt{81-144}$). Тъй като по онова време древногръцките математици не признавали отрицателните числа, Херон поправил грешката си чрез смяна на знака на подкоренната величина и продължил изчисленията си.
- Около 215 години по-късно Диофант се "сблъскал" с комплексните числа при решаването на задача за намиране на дължините на катетите на нереален правоъгълен триъгълник с периметър 12 и лице 7 (за дължината на един от катетите достигнал до квадратното уравнение с отрицателна дискриминанта $6x^2-43x+84=0$).

Кратка история

- На квадратно уравнение с отрицателна дискриминанта се натъкнал и италианският математик Джироламо Кардано при решаването на системата от уравнения $x + y = 10$, $xy = 40$, за чиито решения той намерил $5 + \sqrt{-15}$ и $5 - \sqrt{-15}$.
- Джироламо Кардано е първият математик, който използвал комплексни числа – в своя труд *Ars Magna* от 1545 г. като средство за намиране на реалните корени на непълното кубично уравнение $x^3 + ax + b = 0$, чрез което намира корените на произволно кубично уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
- Рафаел Бомбели е първият математик след Кардано, "повярвал" в комплексните числа. В книгата си "Алгебра" от 1572 г. представя символа $\sqrt{-1}$ и показва как от комплексни числа могат да се получат реални числа (идея за комплексно спрегнато число на дадено комплексно число).

Кратка история

- Рене Декарт дал идеята за алгебричен вид на комплексно число (1637 г.). Карл Гаус дефинирал операциите с комплексни числа събиране и умножение.
- Джон Уолис, Каспар Весел и Жан Робер Арган – геометричен вид на комплексно число.
- Леонард Ойлер въвел символа i (имагинерна единица) за $\sqrt{-1}$ (1777 г.). Намерил комплексните корени на уравнението $x^n = 1$. Въвел тригонометричния запис на комплексно число.
  Формула на Ойлер:
  $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$
  от която при $\varphi = \pi$ следва известното тъждество $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Алгебричен вид на комплексно число

Уравнението $x^2 + 1 = 0$ няма реални корени. Решавайки го, получаваме комплексните (чисто имагинерните) числа $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$.

Определение

Числото $i = \sqrt{-1}$ (т.е. $i^2 = -1$) се нарича **имагинерна единица.**

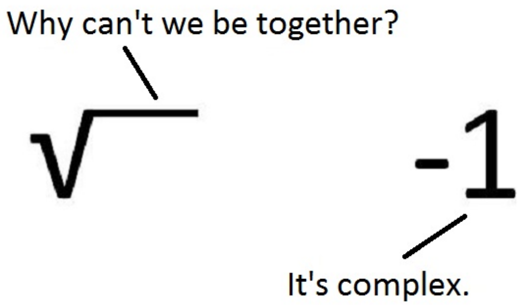
Определение

Числото $z = a + bi$, където $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, се нарича **комплексно число в алгебричен вид.** Реалните числа $a = \mathrm{Re}(z)$ и $b = \mathrm{Im}(z)$ се наричат съответно **реална част** и **имагинерна част** на z.

Определение

Числовото множество $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ се нарича **множество на комплексните числа.**

Математически хумор



Алгебричен вид на комплексно число

Пример

Намерете корените на квадратното уравнение $z^2 - 2z + 2 = 0$. Пресмятаме $D = 1 - 2 = -1 < 0$. Следователно корените на това уравнение са комплексните числа $z_{1,2} = 1 \pm i$.

Определение

Комплексните числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ се наричат равни, ако $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Действия с комплексни числа в алгебричен вид

Определение

Ако $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, то комплексното число $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$ се нарича **сума** на комплексните числа z_1 и z_2.

Определение

Ако $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, то комплексното число $z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$ се нарича **произведение** на комплексните числа z_1 и z_2.

Пример

Нека $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 + 2i$. Намерете $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$.
Пресмятаме $z_1 + z_2 = (2 + 3) + (1 + 2)i = 5 + 3i$,
$z_1 - z_2 = (2 - 3) + (1 - 2)i = -1 - i$,
$z_1 z_2 = (2 + i)(3 + 2i) = (6 - 2) + (4 + 3)i = 4 + 7i$.

Действия с комплексни числа в алгебричен вид

Пример (Степени на i.)

Изпълнено е: $i^2 = -1$, $i^3 = i^2.i = -i$, $i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$.
Изобщо

$$i^n = \begin{cases} i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3 \\ 1, & n = 4k, \quad k = 0, 1, 2... \end{cases}$$

Пример

Намерете алгебричния вид на числата $z_1 = (1-i)^3$ и $z_2 = (1+i)^4$.
Пресмятаме: $z_1 = (1-i)^2(1-i) = (1-2i-1)(1-i) - 2i(1-i) = -2i + 2i^2 = -2 - 2i$.
$z_2 = \left((1+i)^2\right)^2 = (1+2i-1)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$.

Комплексно спрегнато и модул на комплексно число

Определение

Нека $z = a + bi$ е произволно комплексно число. Тогава комплексното число $\overline{z} = a - bi$ се нарича **комплексно спрегнато** (число) на z.

Твърдение

Нека $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. В сила са следните свойства:

- $\overline{\overline{z}} = z$; $\quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$;
- $z = \overline{z}$, точно когато z е реално число;
- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

Определение

Нека $z = a + bi$ е произволно комплексно число. Тогава неотрицателното реално число $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ се нарича **модул** (абсолютна стойност) на z.

Комплексно спрегнато и модул на комплексно число

Очевидно са изпълнени: $|z| = |\overline{z}|$, $|z| \geq \mathrm{Re}(z)$, $|z| \geq \mathrm{Im}(z)$.

Пример

Намерете комплексно спрегнатото и модула на числото $z = 3 + 4i$.
Отговор. $\overline{z} = 3 - 4i$; $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Твърдение

Нека $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Тогава са валидни следните свойства:

- $|z| \geq 0$, като $|z| = 0$, точно когато $z = 0$;
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (неравенство на триъгълника).

Делене на комплексни числа

Определение

Нека $z = a + bi$, $z \neq 0$ (т.е. $a^2 + b^2 \neq 0$). Тогава елементът

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

се нарича обратен елемент на z, т.е. $z.\frac{1}{z} = 1$.

Определение

Нека $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ са комплексни числа, като $z_2 \neq 0$. Тогава комплексното число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

се нарича частно на z_1 и z_2.

Делене на комплексни числа

Пример

Нека $z = 2 - i$. Намерете z^{-1}.
Имаме $\overline{z} = 2 + i$. Тогава $\frac{1}{z} = \frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2}{5} + \frac{i}{5}$.

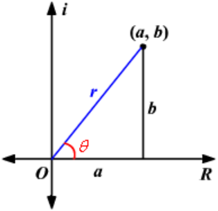
Пример

Намерете алгебричния вид на $\frac{z_1}{z_2}$, където $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 + 2i$.
Тъй като $\overline{z}_2 = 3 - 2i$, то пресмятаме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{3+2i} = \frac{(2+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{8-i}{9+4} = \frac{8}{13} - \frac{i}{13}.$$

Тригонометричен вид на комплексно число

На всяко комплексно число $z = a+bi$ може да се съпостави еднозначно точка в равнината с абсциса a и ордината b относно правоъгълна координатна система.



Фиг.: Използвано изображение от www.varsitytutors.com

Тогава, съгласно питагоровата теорема, положителното число r (дължината на отсечката Oz при $z \neq 0$) съвпада с модула на z, т.е. $|z| = r$. Ъгълът θ, който Oz сключва с положителната посока на абсцисната ос, се нарича **аргумент** на z и се означава с $\arg z$.

Тригонометричен вид на комплексно число

Изпълнени са следните зависимости:

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}, \;\; a \neq 0. \tag{1}$$

Отбелязваме, че ако θ е аргумент на z, то $\theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ също е аргумент на z. Обикновено за аргумент се избира стойност в $[0; 2\pi)$ или $(-\pi; \pi]$ и тази стойност се нарича главна стойност на аргумента. Числото $z = 0$ няма аргумент.

Определение

Нека $z = a + bi$ е комплексно число. Тогава записът

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

където са изпълнени равенствата (1), се нарича **тригонометричен вид** на z.

Тригонометричен вид на комплексно число

Пример

Намерете тригонометричния вид на $z = 1 + i$.
Имаме $a = b = 1$, следователно $r = |z| = \sqrt{2}$ и $\operatorname{tg}\theta = 1$. Следователно за аргумент можем да изберем $\theta = \frac{\pi}{4}$, тъй като точката с координати $(1, 1)$ се намира в първи квадрант. Тогава тригонометричният вид на това число е $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Пример

Намерете тригонометричния вид на $z = i$.
В този случай имаме $a = 0$, $b = 1$ и следователно $r = |z| = 1$. Тъй като $a = 0$, не можем да използваме формулата за $\operatorname{tg}\theta$ като в предния пример. Можем да използваме обаче, че $\operatorname{cotg}\theta = \frac{a}{b} = 0$. Тъй като $b > 0$, то $\theta = \arg z = \frac{\pi}{2}$. Следователно тригонометричният вид на $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.
При $a = 0$, $b < 0$ имаме $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

Умножение и деление на комплексни числа в тригонометричен вид

Твърдение

Нека $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ $(z_1, z_2 \neq 0)$. Тогава:

- $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$;
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right)$.

Формули на Моавър за степенуване и кореенуване на комплексни числа

Твърдение (Абрахам дьо Моавър (1667–1754))

Нека $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z \neq 0$. Тогава:

- $z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $n \geq 2$.

Фундаментална теорема на алгебрата

През 1799 г. Карл Гаус доказва следната известна теорема

Твърдение (Карл Фридрих Гаус (1777–1855))

Всеки полином $p(z)$ от степен $n \geq 1$ с комплексни коефициенти има поне един комплексен корен.

Друга формулировка на теоремата е

Твърдение

Всеки полином $p(z)$ от n-та степен $(n \geq 1)$ с комплексни коефициенти има точно n на брой комплексни корена (броени с тяхната кратност). Ако $z_1, z_2, ..., z_k$ са различните корени на $p(z)$, съответно с кратности $n_1, n_2, ..., n_k$ (където $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$), то

$$p(z) = (z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2}...(z - z_k)^{n_k}.$$

Фундаментална теорема на алгебрата

Ако $p(z)$ е полином с реални коефициенти и комплексното число z_0 е корен на $p(z)$, то и комплексно спрегнатото $\overline{z}_0$ на z_0 също е корен на $p(z)$.

Например, ако търсим полином от 2-ра степен $p(z)$ с реални коефициенти, на който знаем, че единият корен е $z_1 = 2 + 3i$, то съгласно горното твърдение и теоремата на Гаус, другият корен на полинома е $z_2 = \overline{z}_1 = 2 - 3i$. Тогава имаме $z_1 + z_2 = 4$ и $z_1 z_2 = 13$. Следователно, прилагайки формулите на Виет, за коефициентите на търсения полином $p(z) = az^2 + bz + c$ е изпълнено: $z_1 + z_1 = -\frac{b}{a}$ и $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$, откъдето получаваме $p(z) = z^2 - 4z + 13$.

Литература

- Т. Моллов, Ст. Миховски. Линейна алгебра. Пловдивско университетско издателство Паисий Хилендарски, Пловдив, 2008.
- П. Балючев, К. Коликов, А. Стоянова. Ръководство за решаване на задачи по линейна алгебра. Пловдивско университетско издателство Паисий Хилендарски, Пловдив, 1996.
- D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald. Linear algebra and its applications, 5th ed. Pearson, 2016.
- G. Strang. Linear algebra and its applications, 4th ed. Nelson Engineering, 2007.
- G. Strang, Introduction to linear algebra, 5th ed. Wellesley-Cambridge Press, 2016, http://math.mit.edu/∼gs/linearalgebra/.
- H. Anton, C. Rorres. Elementary linear algebra (applications version), 11th ed. Wiley, 2014.
- P. J. Olver, Ch. Shakiban. Applied linear algebra, 2nd ed. Springer, 2018.
- T. S. Shores. Applied linear algebra and matrix analysis, 2nd ed. Springer, 2018.