Детерминанти. Свойства и пресмятане

1. Детерминанти от втори ред

Нека разгледаме системата линейни уравнения с две неизвестни (x и y)

$$\left| \begin{array}{l} ax + by = p \\ cx + dy = q. \end{array} \right. \tag{1}$$

Чрез последователно изключване на x и y от двете уравнения получаваме

$$\left| \begin{array}{l} (ad - bc)x = dp - bq \\ (ad - bc)y = aq - cp. \end{array} \right.$$

От горните две уравнения се вижда, че коефициентът $\Delta = ad - bc$ има съществено значение за броя на решенията на дадената система.

Системата има единствено решение

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}, \qquad y = \frac{aq - cp}{ad - bc}, \tag{2}$$

точно когато $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Формулите (2) са известни като **формули на Крамер (за система от 2-ри ред).**

В случай, че $\Delta = 0$, то имаме следните две възможности:

- Ако $dp - bq = aq - cp = 0$, то системата има безброй много решения.
- Ако поне едно от двете числа $dp - bq$ или $aq - cp$ е различно от нула, то системата няма решения.

Ако формираме квадратната матрица A от втори ред от коефициентите пред неизвестните в системата (1)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

то числото $\Delta = ad - bc$ се нарича **детерминанта на квадратната матрица A (детерминанта от втори ред)** и се записва

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Елементите a и d формират **главния диагонал** на A, а b и c — **вторія диагонал** на A.

Тогава всяка детерминанта от 2-ри ред е равна на разликата от произведенията на елементите по главния и вторія си диагонал.

В класически (индексни означения) на елементите на матрицата имаме следното

Определение. Нека A е квадратна матрица от втори ред, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогава числото $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ се нарича ***детерминанта на матрицата*** A (***детерминанта от втори ред***) и се означава с

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример. Пресметнете следните детерминанти от втори ред:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2,$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2.4 - 1.(-3) = 11,$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1.6 - 2.3 = 0.$$

2. Детерминанти от трети ред

По аналогичен начин, решавайки система от три линейни уравнения за три неизвестни, както е направил Лайбниц, може да се дефинира детерминанта от трети ред (и от произволен ред).

Определение. Нека A е квадратна матрица от трети ред, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогава числото

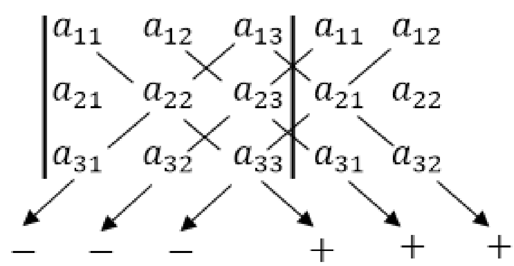
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array} \tag{3}$$

се нарича ***детерминанта на матрицата*** A (***детерминанта от трети ред***).

Известни са две правила за по-лесно пресмятане на детерминанти от трети ред — правило на Сарус (по името на френския математик Пиер Фредерик Сарус) и правило на триъгълниците. **И двете правила важат само за детерминанти от трети ред.**

Правило на Сарус за детерминанти от трети ред

След детерминантата се преписват последователно първият и вторият ѝ стълб. Тогава събираемите, които участват със знак плюс в (3), са произведенията на елементите от главния диагонал и от двата диагонала, успоредни на него. Събираемите, които участват със знак минус в (3), са произведенията на елементите от втория диагонал и от двата диагонала, успоредни на него.

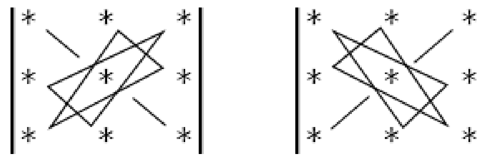


Правило на триъгълниците за детерминанти от трети ред

Съгласно това правило, събираемите, които участват със знак плюс в (3), са произведенията на елементите от главния диагонал и още две произведения, които се получават от елементите във върховете на двата равнобедрени триъгълника с основи, успоредни на главния диагонал. Събираемите, участващи със знак минус в (3), се получават по аналогичен начин от втория диагонал.

Пример. Пресметнете следните детерминанти от трети ред:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$



$+ \qquad -$

$$\det A = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right.$$

$$= 1.(-2)(-1) + 5.1.1 + 1.2.(-1) - 1.(-2).1 - 1.1.(-1) - 5.2.(-1)$$
$$= 18.$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2.4.3 + 1.2.(-1) + 3.0.0 - 1.4.0 - 2.2.0 - 3.(-1).(-3) = 13.$$

3. Детерминанти от n-ти ред

Пермутации на n елемента

Определение. Всяка наредба $(i_1, i_2, ..., i_n)$ на числата 1,2,...,n, сред които няма равни, се нарича ***пермутация*** на тези числа.

Пермутацията $(1, 2, ..., n)$ се нарича *нормална*.

Броят на пермутациите на n елемента е равен на $n! = 1.2.3...n$.

$1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 1.2.3 = 6$, $4! = 1.2.3.4 = 24$ и т.н.

Определение. Числата i и j в дадена пермутация образуват ***инверсия***, ако $i > j$, но i стои в пермутацията пред j.

Пермутацията се нарича *четна*, ако елементите ѝ образуват четен брой инверсии, а *нечетна* – в противен случай.

Броят на инверсиите в пермутацията $(i_1, i_2, ..., i_n)$ означаваме с $[i_1, i_2, ..., i_n]$.

Очевидно за нормалната пермутация имаме $[1,2,...,n]=0$.

Броят на четните пермутации на дадени n елемента е равен на броя на нечетните пермутации на същите елементи (равен е на $\frac{n!}{2}$).

Всяка размяна на местата на два елемента в една пермутация се нарича ***транспозиция*** на пермутацията. Всяка транспозиция променя четността на пермутацията.

Например в пермутацията $(2,1,3)$ има една инверсия ($[2,1,3]=1$, тъй като 1 и 2 са в инверсия) и затова тя е нечетна, докато в пермутацията $(2,3,1)$ има две инверсии ($[2,3,1]=2$, тъй като 1 и 2, както и 1 и 3 са в инверсия), затова втората пермутация е четна. Двете пермутации се получават една от друга чрез транспозиция на елементите 1 и 3. В естествената пермутация $(1,2,3)$ няма инверсии, т.е. $[1,2,3]=0$.

Определение. ***Детерминанта на квадратна матрица от n-ти ред*** $A=(a_{ij})$ се нарича алгебричната сума

$$\sum_{(j_1,j_2,...,j_n)}(-1)^{[j_1,j_2,...,j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n},$$

разпростряна върху всевъзможните пермутации $(j_1,j_2,...,j_n)$ на числата $1,2,...,n$ и означаваме

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1,j_2,...,j_n)}(-1)^{[j_1,j_2,...,j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}. \tag{4}$$

Детерминантата от n-ти ред е алгебрична сума на от $n!$ на брой събираеми, като всяко събираемо е произведение на n елемента на детерминантата – по един от всеки ред и всеки стълб. Знакът пред всяко събираемо се определя от четността на пермутацията на индексите им.

Тази сума се нарича *развитие на детерминантата*, а събираемите ѝ – *членове в развитието.*

От формула (4), при $n=2$ и $n=3$ следват формулите за детерминанти съответно от 2-ри и 3-ти ред, които вече дефинирахме и разгледахме.

Например, нека разгледаме формулата (4) при $n=2$. Съществуват две пермутации на първите две естествени числа – те са $(j_1,j_2)=(1,2)$ и $(j_1,j_2)=(2,1)$. Първата пермутация е четна, а втората е нечетна, тъй като $[1,2]=0$, $[2,1]=1$. Тогава при $n=2$ от общата формула за детерминанта от n-те ред (4) имаме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1,j_2)}(-1)^{[j_1,j_2]}a_{1j_1}a_{2j_2}=(-1)^{[1,2]}a_{11}a_{22}+(-1)^{[2,1]}a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Формулата (4) за детерминанта от n-ти ред е неудобна за пресмятане при $n \geq 4$. В развитието на детерминанта от 4-ти ред участват $4! = 24$ събираеми. Затова ще разгледаме друга, по-удобна формула (формула на Лаплас), която ще прилагаме в комбинация със свойствата на детерминантите.

4. Свойства на детерминантите

Определение. *Транспониране на матрица (детерминанта)* се нарича действие, при което редовете и стълбовете си разменят местата, запазвайки своя пореден номер. В резултат на транспонирането на матрицата A от тип $m \times n$ се получава нова матрица A^T от тип $n \times m$, наречена *транспонирана матрица* на A.

Пример. Нека

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Тогава

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}, \qquad (\det B)^T = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

Нека се върнем на детерминантата $\det A$, за която пресметнахме

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 18.$$

След като транспонираме матрицата A и пресметнем нейната детерминанта, получаваме

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-2)(-1) + 5.1.1 + 2.(-1).1 - 1.1(-2) - 1.1.(-1) - 5.2.(-1) = 18.$$

Следователно $\det A^T = \det A$. Това свойство се оказва, че е изпълнено за произволна детерминанта.

Твърдение. *При транспониране детерминантата не променя стойността си, т.е. ако A е квадратна матрица от n-ти ред, то е изпълнено* $\det A^T = \det A$.

Следователно редовете и стълбовете на една детерминанта са равноправни. Всяко действие, което е доказано за редовете, е в сила и за стълбовете на произволна детерминанта.

Елементарни действия (операции) с редовете на детерминанта

По редовете (стълбовете) на една детерминанта могат да бъдат извършени следните елементарни действия:

- Размяна на местата на два реда.
- Умножаване на всички елементи от даден ред с число.
- Прибавяне към елементите на даден ред съответните им елементи от друг ред, умножени с число.

Размяна на местата на два реда (стълба)

Твърдение. *Ако в една детерминанта се разменят местата на два реда (стълба), се получава детерминанта с противоположна стойност.*

Следствие. *Детерминанта с два равни реда (стълба) е равна на нула.*

Доказателство. Нека е дадена детерминанта Δ от n-ти ред с два произволни равни реда – например, нека i-тият и j-тият ред на Δ да бъдат равни и нека детерминантата Δ_1 е получена от Δ чрез размяна на местата на тези два реда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вижда се, че $\Delta_1 = \Delta$. Но съгласно твърдението $\Delta_1 = -\Delta$. Следователно $\Delta = -\Delta$, откъдето получаваме $\Delta = 0$.

Примери:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 = -\Delta, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Умножаване на всички елементи на ред (стълб) с число

Твърдение. *Ако всички елементи от даден ред (стълб) на една детерминанта се умножат с някакво число, то цялата детерминанта се умножава с това число.*

Това свойство означава, че елементите в един ред (стълб) на детерминанта съдържат общ множител, то той може да се изнесе пред знака на детерминантата.

Примери

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -4 = 2\Delta.$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 6 & 18 & 54 \\ 7 & 28 & 112 \end{vmatrix} = 5.6.7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 210(48+16+18-12-36-32) = 210.2 = 420.$$

Следствие. *Детерминанта, съдържаща нулев ред или нулев стълб (ред или стълб само от нули), е равна на нула.*

Доказателство. Нека детерминантата Δ от n-ти ред съдържа нулев ред. Тогава след изнасяне на общия множител 0 от i-тия ред пред знака на детерминантата получаваме

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{12} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие. *Детерминанта с два пропорционални реда (стълба) е равна на нула.*

Доказателство. Нека детерминантата Δ от n-ти ред съдържа два пропорционални реда – например, нека j-тият ред да е пропорционален на i-тия с коефициент на пропорционалност k. Тогава съгласно свойството изнасяме k от j-тия ред пред знака на детерминантата и получаваме равна на нея детерминанта, в която i-тия и j-тия ред съвпадат.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{k\ a_{i1}} & \mathbf{k\ a_{i2}} & \dots & \mathbf{k\ a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k.0 = 0.$$

Примери

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Твърдение. *Ако всеки елемент в i-тия ред (стълб) на една детерминанта се представя като сума $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ за всяко j, то детерминантата е равна на сумата от две детерминанти, в които всички редове (стълбове), освен i-тия, са непроменени, а в i-тия ред (стълб) на първата детерминанта са елементите a'_{ij}, а във втората елементите a''_{ij}.*

Например детерминантата $\det A$ може да се представи като следната сума

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+1 & 1+4 & 3+4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавяне към елементите на даден ред съответните елементи на друг ред, умножени с число

Следствие. *Стойността на детерминантата не се променя, ако към елементите на даден неин ред (стълб) прибавим съответните им елементи на друг ред (стълб), умножен с произволно число.*

Доказателство. Нека е дадена детерминантата от n-ти ред Δ и детерминантата от n-ти ред Δ_1 е получена от Δ, като j-тия ѝ ред е прибавен i-тия, умножен с числото k:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{j1}} & \mathbf{a_{j2}} & \dots & \mathbf{a_{jn}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{k\ a_{i1} + a_{j1}} & \mathbf{k\ a_{i2} + a_{j2}} & \dots & \mathbf{k\ a_{in} + a_{jn}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ще покажем, че $\Delta_1 = \Delta$. Нека приложим свойството от горното твърдение върху j-тия ред на Δ_1 и я представим като сума на две детерминанти по следния начин

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{k\ a_{i1}} & \mathbf{k\ a_{i2}} & \dots & \mathbf{k\ a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{j1}} & \mathbf{a_{j2}} & \dots & \mathbf{a_{jn}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \ + \ \Delta = \Delta.$$

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Нека разгледаме детерминанта, получена от Δ чрез умножаване на първия ред с (-3) и прибавянето му към втория ред:

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} \begin{array}{l} \urcorner^{(-3)} \\ \hookleftarrow_{+} \end{array} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{vmatrix} = -2.$$

Следствие. *Ако редовете (стълбовете) на една детерминанта са линейно зависими, детерминантата е равна на нула.*

Доказателство. Нека докажем твърдението за детерминанта от 3-ти ред. Аналогично се доказва за детерминанта от произволен n-ти ред.

Нека Δ е детерминанта от 3-ти ред с линейно зависими редове. Това е изпълнено, точно когато поне един от редовете е линейна комбинация на останалите. Без ограничение на общността можем да запишем, че третият ред е линейна комбинация на първия и втория

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ \lambda a_{11}+\mu b_{21} & \lambda a_{12}+\mu b_{22} & \lambda a_{13}+\mu b_{23}\end{vmatrix}.$$

Тогава можем да представим Δ като сума на две детерминанти по следния начин

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ \mu b_{21} & \mu b_{22} & \mu b_{23}\end{vmatrix} = 0 \ + \ 0 = 0.$$

Всяка от двете горни детерминанти съдържа два пропорционални реда и следователно е равна на нула. Затова и $\Delta = 0$.

Чрез понятието ранг на матрица ще докажем и обратното твърдение – ако една детерминанта е равна на нула, то системата от нейните редове (стълбове) е линейно зависима.

Пример. Детерминанта $\det A$ е равна на нула, тъй като вторият ѝ ред е получен от първия чрез умножаване с 3. Втората детерминанта е нула, тъй като третият ѝ стълб е сума на първия и втория.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 6 & 9 & 12\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0, \qquad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 6 & 5\end{vmatrix} = 0.$$

5. Адюнгиран минор и адюнгирано количество на елемент на матрица (детерминанта)

Определение. ***Адюнгиран минор на елемента*** a_{ij} от детерминантата от n-ти ред

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

се нарича детерминантата M_{ij} от $(n-1)$-ви ред, получена от $\det(a_{ij})$ чрез премахване на i-тия ред и j-тия стълб.

Числото $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ се нарича ***адюнгирано количество на елемента*** a_{ij} в $\det(a_{ij})$.

Нека се върнем на детерминантата $\det A$, за която пресметнахме

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 18.$$

Тогава адюнгираните количества на елементите от дадената детерминанта са съответно:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-5+1) = 4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-5) = 6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

Нека разгледаме изразите по-долу, получени по следния начин – събрани са произведенията на всеки елемент от даден ред на детерминантата и съответното му адюнгирано количество

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1.3 + 5.3 + 1.0 = 18 = \Delta,$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 2.4 + (-2)(-2) + 1.6 = 18 = \Delta,$$

$$a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 1.7 + (-1).1 + (-1).(-12) = 18 = \Delta.$$

6. Правило на Лаплас за пресмятане на детерминанти от n-ти ред

Теорема. *(Правило на Лаплас) Всяка детерминанта е равна на сумата от произведенията на елементите от произволен неин ред (стълб) със съответните им адюнгирани количества*

$$\det(a_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \qquad \det(a_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}.$$

Пресмятането на детерминанта съгласно правилото на Лаплас се нарича *развиване на детерминанта по даден ред или стълб.*

Както видяхме в примера, чрез прилагане на правилото на Лаплас, пресмятането на детерминанта от 3-ти ред се свежда до пресмятането на 3 детерминанти от 2-ри ред.

Аналогично важи и за случая на детерминанта от n-ри ред – чрез формулата на Лаплас пресмятането на детерминанта от n-ти ред се свежда до пресмятането на n на брой детерминанти от $(n-1)$-ви ред.

Процесът на пресмятане на детерминанта от произволен ред може още да се опрости, ако не се налага пресмятането на адюнгираните количества на част от елементите от реда (стълба), по който я развиваме. Това се случва, когато тези елементи имат стойност нула (в развитието на детерминантата тези нулеви елементи умножават съответните си адюнгирани количества).

Пример. Развитието на следната детерминанта по първия ѝ ред има вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$-1.(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 258.$$

Следствие. *Ако всички елементи в даден ред или стълб на една детерминанта са нули, с изключение евентуално на един, то детерминантата е равна на произведението на този елемент със съответното му адюнгирано количество.*

Например

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 100 & 1 \\ 7 & 8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 100.(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Пресмятане на детерминанти от n-ти ред

И така, идеята за пресмятане на детерминанти от n-ти ред е следната. Първо с помощта на трите елементарни действия да бъдат превърна- ти в нули всички елементи на даден ред (стълб) с изключение на един. След това този ред (стълб) вече е удобен за развиване съгласно правилото на Лаплас – детерминантата ще бъде равна на произведението на единствения ненулев елемент в реда (стълба) и неговото адюнгирано количество. Така на всяка стъпка редът на детерминантата се понижава с единица.

Да разгледаме следната детерминанта и да я пресметнем чрез развиване съгласно правилото на Лаплас по първия ѝ стълб, като предварително чрез елементарните действия получим детерминанта, равна на нея, в която всички елементи в първия стълб, с изключение на един, са равни на нула:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -12 & -1 \\ 0 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -12 & -1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 24 - 6 = 18.$$

Пример – детерминанта от 4-ти ред

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1).(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Пример – детерминанта от 4-ти ред

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{vmatrix} = (-4)(-8)(-12) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие. *Всяка триъгълна детерминанта е равна на произведението на елементите от главния ѝ диагонал.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \dots a_{nn}.$$

Свеждането на дадена детерминанта до триъгълна (чрез трите елементарни действия) е още един начин за нейното пресмятане.

Например

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 9 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.2.3.4.5 = 5! = 120.$$

Теорема. *Сумата от произведенията на елементите от произволен ред (стълб) на една детерминанта със съответните адюнгирани количества на елементите от друг ред (стълб) на същата детерминанта е равна на нула.*

Някои от по-съществените приложения на детерминантите, които ще разгледаме в този курс по линейна алгебра, са:

- За установяване дали n вектора на n-мерно векторно пространство образуват негова база – точно когато детерминантата от координатите им е различна от нула.
- Формули на Крамер за решаване на системи линейни уравнения, които имат единствено решение.
- Формула за обратната матрица на дадена неособена квадратна матрица. Проверка дали дадена квадратна матрица е обратима (неособена).

- Намиране на характеристичния полином на дадена квадратна матрица (линейно преобразувание).

- Пресмятане на лице на триъгълник (в равнината Oxy) и обем на паралелепипед (и тетраедър) – в курса по аналитична геометрия.

Нека разгледаме следния пример. В $\mathbb{R}^3$ са дадени векторите $v_1(1, 2, 3)$, $v_2(-1, 4, 3)$, $v_3(2, 0, 1)$.

Тъй като броят на векторите и броят на координатите им е равен, то ако ги запишем в матрица, тази матрица ще бъде квадратна и можем да намерим нейната детерминанта.

За да проверим дали тези вектори са линейно независими, съставяме детерминантата от техните координати, като ги разполагаме по редове или стълбове.

Използваме твърдението, че една детерминанта е равна на нула, точно когато системата от нейните редове (стълбове) е линейно зависима.

Следователно, ако стойността на тази детерминанта е нула, то векторите са линейно зависими и не могат да образуват база, а ако е различна от нула, то векторите са линейно независими и тъй като броят им е равен на броя на координатите им (размерността на съответното векторно пространство), то те образуват база.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 12 - 24 + 2 = -6 \neq 0.$$

Следователно векторите v_1, v_2, v_3 са линейно независими. Тъй като са три линейно независими вектора в тримерно пространство, те са база на $\mathbb{R}^3$.