Комплексни числа

От училищния курс по математика са добре познати следните числови множества:

(1) Множество $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ на естествените числа.

(2) Множество $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ на целите числа.

(3) Множество $\mathbb{Q} = \{p/q\colon p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ на рационалните числа.

(4) Множество $\mathbb{I}$ на ирационалните числа. Примери за ирационални числа са $\sqrt{2}$, π, e и т.н.

(5) Множество на реалните числа е $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Лесно се проверява, че $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Уравнението

$$x^2 + 1 = 0$$

няма реални корени.

Решавайки го по обучайния начин, получаваме **комплексните (чисто имагинерните) числа**

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}.$$

Определение. Елементът i ($i = \sqrt{-1}$) ще наричаме ***имагинерна единица***. Изпълнено е свойството

$$i^2 = -1.$$

Символът i е въведен от швейцарския математик и физик Леонард Ойлер (1707–1783).

Елементът (числото) $-\sqrt{-1} = -i$ е противоположното число на i.

Ако намерим корените на квадратното уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$, т.е. числата

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i,$$

ще видим, че те също не са реални числа, а са линейни комбинации на реално число и кратни на имагинерната единица i. Това ни дава основание да дадем следното

Определение. Числото $z = a + bi$, където $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, се нарича ***комплексно число в алгебричен вид.***
Реалните числа $a = \mathrm{Re}(z)$ и $b = \mathrm{Im}(z)$ се наричат съответно ***реална част*** и ***имагинерна част*** на z.

Определение. Числовото множество $\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ се нарича ***множество (поле) на комплексните числа.***

Изпълнено е $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, тъй като всяко реално число a може да се запише във вида $a = a + 0i$. В частност числото нула $z = 0 = 0 + 0.i$ ($\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$).

Определение. Комплексните числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ се наричат ***равни,*** ако имат равни съответно реални и имагинерни части, т.е. $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Задача 1. Намерете корените на квадратните уравнения:

а) $2z^2 - 6z + 9 = 0$; Отговор $z_{1,2} = \frac{3 \pm 3i}{2}$;

б) $z^2 + 2z + 5 = 0$.

За подточка б) намираме по формулата

$$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm \sqrt{4.(-1)} = -1 \pm 2\sqrt{-1} = -1 \pm 2i.$$

1. Действия с комплексни числа в алгебричен вид

Събиране на комплексни числа в алгебричен вид

Определение. Ако $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, то комплексното число

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$$

се нарича ***сума*** на комплексните числа z_1 и z_2.

Определение. Ако $z = a + bi$ е комплексно число в алгебричен вид, то числото $(-z) = -a - bi$ се нарича ***противоположно комплексно число*** на числото z.

Очевидно $z + (-z) = z - z = 0 + 0i = 0$.

Числото

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_1 + b_2 i) = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i$$

се нарича ***разлика*** на комплексните числа z_1 и z_2.

Умножение на комплексни числа в алгебричен вид

Определение. Ако $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, то комплексното число

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 =$$

$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

се нарича ***произведение*** на комплексните числа z_1 и z_2.

Задача 2. Нека $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 + 2i$. Намерете: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$.

Решение. Пресмятаме

$$z_1 + z_2 = (2+i) + (3+2i) = (2+3) + (1+2)i = 5+3i,$$

$$z_1 - z_2 = (2+i) - (3+2i) = (2-3) + (1-2)i = -1-i,$$

$$z_1 z_2 = (2+i)(3+2i) = 6+4i+3i+2i^2 = (6-2) + (4+3)i = 4+7i.$$

Задача 3. Намерете алгебричния вид на числата $z_1 = (1-i)^3$ и $z_2 = (1+i)^4$.

Решение. Пресмятаме:

$$z_1 = (1-i)^2(1-i) = (1-2i-1)(1-i) = -2i(1-i) = -2i+2i^2 = -2i-2 = -2+2i,$$

$$z_2 = \left((1+i)^2\right)^2 = (1+2i-1)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4.$$

Задача 4. Намерете корените на квадратното уравнение $z^2 - (4+i)z + 6 + 2i = 0$.

Решение. Пресмятаме дискриминантата на квадратното уравнение

$$D = (4+i)^2 - 4(6+2i) = 16 + 8i + i^2 - 24 - 8i = 16 - 1 - 24 = -9 < 0.$$

Следователно корените са

$$z_{1,2} = \frac{4+i \pm \sqrt{-9}}{2} = \frac{4+i \pm \sqrt{9.(-1)}}{2} = \frac{4+i \pm 3i}{2},$$

т.е.

$$z_1 = \frac{4+i+3i}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2+2i, \quad z_2 = \frac{4+i-3i}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2-i.$$

Проверката с формулите на Виет ни дава

$$z_1 + z_2 = 2+2i+2-i = 4+i, \quad z_1 z_2 = (2+2i)(2-i) = 4-2i+4i-2i^2 = 6+2i.$$

Комплексно спрегнато число на дадено комплексно число

Определение. Нека $z = a + bi$ е произволно комплексно число. Тогава комплексното число $\overline{z} = a - bi$ се нарича ***комплексно спрегнато (число)*** на z.

Твърдение. *Нека $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. В сила са следните свойства:*

1) $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$;

2) $\overline{z} = z$, точно когато z е реално число;

3) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.

Доказателство. От 1) ще докажем последното свойство. Знаем, че ако $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, то

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Тогава

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i} = a_1 a_2 - b_1 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$$

$$\overline{z_1}\ \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i = \overline{z_1 z_2}.$$

За 2) се вижда, че числата $z = a + bi$ и $\overline{z} = a - bi$ са равни, точно когато

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\overline{z}) \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(\overline{z}) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} a = a \\ b = -b, \end{array}\right.$$

откъдето $a \in \mathbb{R}$ и $b = 0$, т.е. $z = a$ е реално число.

За свойствата 3) имаме

$$z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a = 2\mathrm{Re}(z), \quad z - \overline{z} = a + bi - (a - bi) = 2bi = 2i\mathrm{Im}(z).$$

Определение. Нека $z = a + bi$ е произволно комплексно число. Тогава неотрицателното реално число $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ се ***нарича модул (абсолютна стойност)*** на z.

Нека отбележим, че ако $z = a = a + 0i$ е реално число, то съгласно горното определение модулът на z е равен на

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|,$$

т.е. определението за модул на комплексно число разширява понятието модул на реално число.

Очевидно са изпълнени свойствата: $|z| = |\overline{z}|$, $|z| \geq \mathrm{Re}(z)$, $|z| \geq \mathrm{Im}(z)$.
Второто свойство следва от

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| \geq a = \mathrm{Re}(z).$$

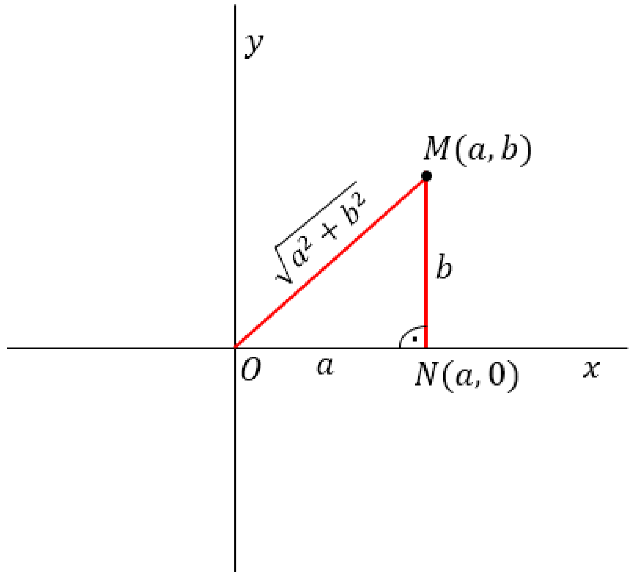
Задача 5. Намерете комплексно спрегнатото и модула на числото $z = 3 + 4i$.

Решение. Пресмятаме

$$\overline{z} = 3 - 4i, \quad |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Нека $z = a + bi$ и да разгледаме в равнината относно декартова координатна система Oxy точката $M(a, b)$. Нека ортогоналната ѝ проекция върху абсцисната ос е точката $N(a, 0)$. Тогава триъгълникът ONM е правоъгълен ($\measuredangle ONM = 90°$) с катети с дължини съответно $ON = a$ и $MN = b$. Тогава от питагоровата теорема знаем, че дължината на хипотенузата е $OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Ако свържем точките O и M, ще получим насочената отсечка (вектора) $\overrightarrow{OM}$ (който ще наричаме радиус-вектор на точката M). Тогава $|\overrightarrow{OM}| = OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.



Идеята за разглеждане на комплексните числа като точки в равнината (наредени двойки реални числа), т.е. за геометричната интерпретация на комплексните числа, е на френския математик Жан Робер Арган (1804 г.). По този начин на всяко комплексното число $z = a + bi$ еднозначно се съпоставя точка в равнината с декартови координати (a, b).

В такъв случай събирането на комплексни числа ни дава идея за събиране на наредени двойки (координати на точки и вектори в равнината). Сумата на $z_1 = a_1+b_1 i$ и $z_2 = a_2+b_2 i$ можем да представим чрез наредени двойки по следния начин

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Твърдение. *Нека $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. В сила са следните свойства:*

1) $|z| \geq 0$, като $|z| = 0$, точно когато $z = 0$;

2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;

3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (неравенство на триъгълника).

Доказателство.

1) От $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и свойствата на функцията корен квадратен от реален аргумент ($f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$) следва, че $|z| \geq 0$, като $|z| = 0$, точно когато $a^2 + b^2 = 0$, точно когато $a = b = 0$.

2) Нека $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$. Имаме $z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

$$|z_1 z_2|^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2,$$

$$(|z_1||z_2|)^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + b_1^2 b_2^2,$$

откъдето се вижда, че $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$. Тъй като двете страни на полученото тъждество са неотрицателни, то можем да ги коренуваме и да получим търсеното равенство.

Така доказахме, че за произволни реални числа a_1, a_2, b_1, b_2 е в сила тъждеството (тъждество на Брахмагупта)

$$(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2).$$

Това свойство може да се докаже и по-лесен начин с другото определение за модул на комплексно число.

$$|z_1z_2| = \sqrt{(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}} = \sqrt{z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}} = \sqrt{z_1\overline{z_1}}\ \sqrt{z_2\overline{z_2}} = |z_1||z_2|.$$

3) Имаме

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2}$$

$$= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Така доказахме, че

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2,$$

откъдето след корени́ване на двете страни получаваме $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Делене на комплексни числа

Определение. Нека $z = a + bi$, $z \neq 0$ (т.е. $a^2 + b^2 \neq 0$). Тогава елементът

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\ i$$

се нарича обратен елемент на z, т.е. $z.\frac{1}{z} = 1$.

Определение. Нека $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ са комплексни числа, като $z_2 \neq 0$. Тогава комплексното число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{|z_2|^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i$$

се нарича частно на z_1 и z_2.

Задача 6.

а) Нека $z = 2 - i$. Намерете z^{-1} в алгебричен вид.

б) Нека $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 + 2i$. Намерете $\frac{z_1}{z_2}$ в алгебричен вид.

Решение.

а) Имаме
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{2+i}{2^2+1^2} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{i}{5}.$$

б) Пресмятаме
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(2+i)(3-2i)}{9+4} = \frac{6-4i+3i+2}{13} = \frac{8}{13} - \frac{i}{13}.$$

С въвеждането на двете операции събиране и умножение множеството на комплексните числа се превръща в числово поле. Изпълнена е следната

Теорема. *Множеството $\mathbb{C}$ на комплексните числа е числово поле, тъй като за всеки $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ са в сила свойствата (аксиоми за числово поле):*

1) На всеки две комплексни числа z_1 и z_2 еднозначно се съпоставя числото $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$, наричано тяхна сума;

2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (комутативност при събиране);

3) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (асоциативност при събиране);

4) Съществува единствен елемент $0 \in \mathbb{C}$, такъв че за всяко $z \in \mathbb{C}$ е изпълнено $z + 0 = z$ (неутрален елемент относно събирането, нулев елемент);

5) За всяко $z \in \mathbb{C}$ съществува единствен елемент $(-z) \in \mathbb{C}$, такъв че $z + (-z) = 0$ (противоположен елемент на z);

6) На всеки две комплексни числа z_1 и z_2 еднозначно се съпоставя числото $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$, наричано тяхно произведение;

7) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (комутативност при умножение);

8) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (асоциативност при умножение);

9) Съществува единствен елемент $1 \in \mathbb{C}$, такъв че за всяко $z \in \mathbb{C}$ е изпълнено $1.z = z$ (неутрален елемент относно умножението, единичен елемент);

10) За всяко $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, съществува единствен елемент $z^{-1} \in \mathbb{C}$, такъв че $z.z^{-1} = 1$ (обратен елемент на z);

11) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (дистрибутивен закон).

2. Тригонометричен вид на комплексно число

На всяко комплексно число $z = a + bi$ може да се съпостави еднозначно точка в равнината с абсциса a и ордината b относно правоъгълна координатна система.

Тогава, съгласно питагоровата теорема, положителното число r (дължината на отсечката Oz при $z \neq 0$) съвпада с модула на z, т.е. $|z| = r$.

Ъгълът θ, който Oz сключва с положителната посока на абсцисната ос, се нарича ***аргумент*** на z и се означава с $\theta = \arg(z)$

Отбелязваме, че ако ъгълът θ е аргумент на z, то $\theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ също е аргумент на z. Обикновено за аргумент се избира стойност в интервала $[0; 2\pi)$ или $[-\pi; \pi]$ и тази стойност се нарича **главна стойност на аргумента**, означава се с $\mathrm{Arg}(z)$.

Числото $z = 0$ (точката O – координатното начало) няма аргумент.

Изпълнени са следните зависимости:

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta, \quad \mathrm{tg}\theta = \frac{b}{a},\ a \neq 0, \quad \mathrm{cotg}\theta = \frac{a}{b},\ b \neq 0.$$

Като използваме горните зависимости, получаваме

$$z = a + bi = r\cos\theta + i.r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Определение. Нека $z = a + bi$ е комплексно число. Тогава записът

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

където $r = |z|$ и θ е аргумент на z, се нарича ***тригонометричен вид*** на комплексното число z.

Две комплексни числа в тригонометричен вид са равни, точно когато са равни модулите им, а аргументите им се различават с цяло кратно на 2π, т.е. за $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ и $z_1 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ е изпълнено $z_1 = z_2$, ако $r_1 = r_2$ и $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 7. Намерете тригонометричния вид на комплексните числа:

а) $z = 1 + i$;

б) $z = i$.

Решение.

а) Имаме $a = b = 1$, следователно

$$r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \mathrm{tg}\theta = 1.$$

Следователно за аргумент можем да изберем $\theta = \frac{\pi}{4}$, тъй като точката с декартови координати $(1, 1)$ се намира в първи квадрант.

Тогава тригонометричният вид на това число е

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

б) В този случай имаме $a = 0, b = 1$ и следователно $r = |z| = 1$.

Тъй като $a = 0$, не можем да използваме формулата за $\mathrm{tg}\theta$ като в предния пример.

Можем да използваме обаче, че $\mathrm{cotg}\theta = \frac{a}{b}$.

Тъй като $b > 0$, то $\theta = \mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$, тъй като точката с координати $(0, 1)$ лежи върху положителната посока на ординатната ос.

Следователно тригонометричният вид е

$$z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Забележка. При $a = 0$, $b < 0$ имаме $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$.

Задача 8. Да се представят в тригонометричен вид числата: а) 1; б) -1; в) $2i$; г) $-3/2i$; д) $-1-i$; е) $-\sqrt{3}+i$; ж) $\sqrt{3}+i$; з) $-1/2+i/2$; и) $2/3-2i\sqrt{3}/3$.

Решение.

а) Изпълнено е $r = 1$ и $\mathrm{Arg}(z) = \varphi = 0$. Тогава получаваме $1 = \cos 0 + i\sin 0$;

д) Имаме $\mathrm{tg}\varphi = 1$, което означава, че $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ или $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$. Тъй като $z = -1-i$ лежи в трети квадрант, то заключаваме, че $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$. За стойността на модула получаваме $r = \sqrt{2}$. Следователно

$$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

б) $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$;

в) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$;

г) $\dfrac{3}{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

е) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$;

ж) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$;

з) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

и) $\dfrac{4}{3}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

Умножение и деление на комплексни числа в тригонометричен вид

Твърдение. *Нека* $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ *и* $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ $(z_1, z_2 \neq 0)$. *Тогава:*

а) $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$;

б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$.

Доказателство.

Използвайки тригонометричните формули за синус и косинус от сбор на два ъгъла, получаваме

а)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right)$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right).$$

б)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2^2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\right)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right).$$

Формули на Моавър за степенуване и коренуване на комплексни числа

Степен на комплексното число $z \neq 0$ ще наричаме комплексното число

- $z^n = \underbrace{z.z...z}_{n}$, ако n е естествено число;
- $z^0 = 1$;
- $z^n = \frac{1}{z^{-n}}$, ако n е цяло отрицателно число.

Комплексното число $w = \sqrt[n]{z}$ ще наричаме n-ти корен на комплексното число z, ако $z = w^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Формулите са открити от Абрахам дьо Моавър (1667—1754).

Твърдение. *Нека* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z \neq 0$. *Тогава:*

а) $z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) n-ти корен на комплексното число z

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,2,...,n-1, \; n \geq 2.$$

Доказателство.

а) Формулата ще докажем чрез математическа индукция по n. Първо ще разгледаме естествените стойности на n, т.е. нека $n \in \mathbb{N}$.

1) Стъпка 1 – проверка при най-малката допустима стойност на n. При $n = 1$ имаме

$$z^1 = z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right),$$

твърдението е тривиално.

2) Стъпка 2 – допускане за $n = k$ (вместо да заместваме n с k, ще продължим да изписваме n).

3) Стъпка 3 – доказване при $n = k + 1$ (вместо $k + 1$ ще използваме $n + 1$). И така, трябва да докажем, че

$$z^{n+1} = r^{n+1}\left[\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)\right].$$

Имаме

$$z^{n+1} = z^n z = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right) r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= r^{n+1}\left(\cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta + i(\cos(n\theta)\sin\theta + \sin(n\theta)\cos\theta)\right)$$

$$= r^{n+1}\left[\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)\right].$$

Следователно твърдението е вярно за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Сега нека $n = 0$. Имаме

$$z^0 = r^0\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 1,$$

което е вярно. Следователно твърдението е вярно и при $n = 0$.

Сега нека n е цяло отрицателно число. Следователно $n = -k$, където k е естествено число. Тогава, тъй като $z^k = r^k(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta))$, то

$$z^n = z^{-k} = \frac{1}{z^k} = \frac{\overline{z^k}}{|z^k|^2} = \frac{r^k(\cos(k\theta) - i\sin(k\theta))}{(r^k)^2} = \frac{1}{r^k}\left(\cos(-k\theta) + i\sin(-k\theta)\right)$$

$$= r^{-k}\left(\cos(-k\theta) + i\sin(-k\theta)\right) = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right).$$

Следователно формулата за степенуване на комплексни числа е изпълнена за всички цели стойности на степенния показател n.

б) Нека $w = \sqrt[n]{z}$, т.е. $z = w^n$ и комплексните числа z и w имат съответно следните модули и аргументи $z = (r, \theta)$, $w = (\rho, \varphi)$. Тогава за модула и аргумента на числото w^n, съгласно формулата за степенуване, знаем, че $w^n = (r^n, n\varphi)$.

Тогава равенството $z = w^n$ е изпълнено, точно когато

$$\left|\begin{array}{l} r = \rho^n \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta + 2k\pi = n\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Поради периодичността на тригонометричните функции синус и косинус, всички различни стойности на $\sqrt[n]{z}$ се получават за $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Следователно

$$w = \sqrt[n]{z} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

Корен n-ти от произволно комплексно число има n на брой различни стойности, т.е. уравнението $z^n = c$, $c \in \mathbb{C}$ има n на брой различни решения (корена) $z = \sqrt[n]{c}$.

Задача 9. Да се пресметне i^n, където $n \in \mathbb{Z}$.

Решение.

Без ограничения на общността може да приемем, че n е положително цяло число. Ще разгледаме два случая:

Нека $n = 2k$, където $k = 0, 1, \ldots$. Тъй като $|i| = 1$ и $\arg i = \pi/2$, то получаваме

$$\begin{aligned} i^n &= i^{2k} = 1^{2k}(\cos k\pi + i\sin k\pi) = \cos k\pi \\ &= \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, 2, \ldots = 2m \\ -1 & \text{при } k = 1, 3, \ldots = 2m+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Нека $n = 2k+1$, където $k = 0, 1, \ldots$. Аналогично на първия случай получаваме

$$\begin{aligned} i^n &= \cos\frac{2k+1}{2}\pi + i\sin\frac{2k+1}{2}\pi = i\sin\frac{2k+1}{2}\pi \\ &= \begin{cases} i & \text{при } k = 2m \\ -i & \text{при } k = 2m+1, \end{cases} \end{aligned}$$

където $m = 0, 1, \ldots$.

Като обединим двата случая, за $m = 0, 1, \ldots$ получаваме следното общо решение

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 4m \\ i & \text{при } k = 4m+1 \\ -1 & \text{при } k = 4m+2 \\ -i & \text{при } k = 4m+3. \end{cases}$$

Нека получим изведем формули за синус и косинус от удвоен и утроен ъгъл като приложение на формулата на Моавър за степенуване на комплексни числа.

Нека $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и да получим z^2 по два начина:

1) Чрез формулата на Моавър

$$z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

2) С директно повдигане на втора степен

$$z^2 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi.$$

Тогава, като приравним реалните и имагинерните части на двете представяния на z^2, получаваме

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, \quad \sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi.$$

Аналогично, за z^3 имаме
1) Чрез формулата на Моавър

$$z^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

2) С директно повдигане на трета степен и преобразуване

$$z^3 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi$$

$$= \cos^3\varphi + 3i(1-\sin^2\varphi)\sin\varphi - 3\cos\varphi(1-\cos^2\varphi) - i\sin^3\varphi$$

$$4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi + i(3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi).$$

Приравняваме реалните и имагинерните части на двете представяния на z^3:

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

Задача 10. Намерете $\sqrt{i}$ и корените на квадратното уравнение $z^2 - (3+i)z + 2 + i = 0$.

Решение. Първата част на задачата ще решим по два начина – чрез тригонометричния вид на i и формулата на Моавър за коренуване и чре алгебричния вид на комплексно число.

I начин. Тригонометричният вид на i е

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Тогава съгласно формулите на Моавър $z = \sqrt{i}$ има две стойности, които се получават от

$$z = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}, \quad k = 0, 1.$$

Нека ги разпишем подробно.
При $k = 0$ имаме

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

При $k = 1$ имаме

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = -z_0.$$

Проверете, че $z_0^2 = z_1^2 = i$.

II начин. Използваме, че $\sqrt{i}$ е комплексно число и следователно съществуват $a, b \in \mathbb{R}$, такива че $\sqrt{i} = z = a + bi$ (т.е. търсим алгебричния вид на $\sqrt{i}$). След повдигане на втора степен на двете страни на това равенство получаваме

$$i = (a+bi)^2 \quad \Leftrightarrow \quad i = a^2 - b^2 + 2abi.$$

В двете страни на последното равенство стоят две комплексни числа. Следователно можем да използваме определението за равенство на комплексни числа в алгебричен вид, съгласно което горното равенство е еквивалентно на системата (приравняваме реални и имагинерни части)

$$\left| \begin{array}{l} a^2 - b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b) = 0 \\ \\ 2ab = 1. \end{array} \right.$$

От първото уравнение следва, че $a = b$ или $a = -b$. Заместваме двете възможности във второто уравнение. Ако $a = b$, то от второто уравнение получаваме $2a^2 = 1$, откъдето $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ако $a = -b$, то второто уравнение е еквивалентно на $2a^2 = -1$, което няма реални решения за a. Следователно двете решения на системата са

$$a_1 = b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_2 = b_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

откъдето намираме двете стойности на $z = \sqrt{i}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

За решаване на уравнението $z^2 - (3+i)z + 2 + i = 0$ пресмятаме неговата дискриминанта

$$D = (3+i)^2 - 4(2+i) = 9 + 6i - 1 - 8 - 4i = 2i$$

и прилагаме познатите формули за корените

$$z_{1,2} = \frac{3 + i \pm \sqrt{2i}}{2} = \frac{3 + i \pm \sqrt{2}\sqrt{i}}{2}.$$

Сега заместваме намерените стойности на $\sqrt{i}$ и получаваме

$$z_1 = \frac{3 + i + \sqrt{2}\sqrt{i}}{2} = \frac{3 + i + 1 + i}{2} = 2 + i.$$

$$z_2 = \frac{3 + i - \sqrt{2}\sqrt{i}}{2} = \frac{3 + i - 1 - i}{2} = 1.$$

Задача 11. Намерете $\sqrt[3]{i}$ по двата начина от предната задача.

Решение.

I начин. Тригонометричният вид на i е

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Тогава съгласно формулите на Моавър $z = \sqrt{i}$ има три стойности, които се получават от

$$z = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Нека ги разпишем подробно.
При $k = 0$ имаме

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

При $k = 1$ имаме

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

При $k = 2$ имаме

$$z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

II начин. Имаме $\sqrt[3]{i} = a + bi$, откъдето

$$i = (a+bi)^3 \quad \Leftrightarrow \quad i = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i,$$

което горното равенство е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} a^3 - 3ab^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(a^2 - 3b^2) = 0 \\ \\ 3a^2b - b^3 = 1. \end{array} \right.$$

От първото уравнение имаме следните възможни решения $a = 0$, $a = \pm\sqrt{3}b$. Заместваме ги последователно във второто уравнение.

Ако $a = 0$, то $b^3 = -1$, следователно $b = -1$.

Ако $a = \pm\sqrt{3}b$, то $9b^3 - b^3 = 1$, откъдето $b^3 = \frac{1}{8}$ или $b = \frac{1}{2}$.

Следователно всички решения на системата са:

$$a_1 = 0,\ b_1 = -1, \quad a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ b_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ b_2 = \frac{1}{2}.$$

Задача 12. Намерете $\sqrt{3+4i}$, като използвате алгебричния вид (тук не е удобно да се използва формулата на Моавър, тъй като числото $3+4i$ не е удобно да се запише в тригонометричен вид).

Решение. Записваме $\sqrt{3+4i} = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, откъдето следва

$$3 + 4i = a^2 - b^2 + 2abi,$$

еквивалентно на

$$\left| \begin{array}{l} a^2 - b^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b) = 0 \\ \\ 2ab = 4 \quad \Leftrightarrow \quad ab = 2. \end{array} \right.$$

От второто уравнение изразяваме $b = \frac{2}{a}$ и го заместваме в първото. Така получаваме биквадратното уравнение

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2 - 4)(a^2 + 1) = 0.$$

Корените на горното уравнение съвпадат с корените на $a^2 - 4 = 0$, т.е. са $a_{1,2} = \pm 2$. Следователно $b_{1,2} = \pm 1$. Окончателно двете стойности на $\sqrt{3+4i}$ са

$$z_1 = 2 + i, \quad z_2 = -2 - i.$$

3. Фундаментална теорема на алгебрата

Теорема (Карл Фридрих Гаус, 1799 г.) *Всеки полином $p(z)$ от степен $n \geq 1$ с комплексни коефициенти има поне един комплексен корен.*

Теорема *Всеки полином $p(z)$ от n-та степен ($n \geq 1$) с комплексни коефициенти има точно n на брой комплексни корена (броени с тяхната кратност).*

Ако $z_1, z_2, ..., z_k$ са различните корени на $p(z)$, съответно с кратности $n_1, n_2, ..., n_k$ (където $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$), то

$$p(z) = (z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2}...(z - z_k)^{n_k}.$$

Ако $p(z)$ е полином с реални коефициенти и комплексното число z_0 е корен на $p(z)$, то и комплексно спрегнатото число $\overline{z_0}$ на z_0 също е корен на $p(z)$.

Например, ако търсим полином от 2-ра степен $p(z)$ с реални коефициенти, за който знаем, че единият корен е $z_1 = 2 + 3i$, то съгласно горното твърдение и теоремата на Гаус, другият корен на полинома е $z_2 = \overline{z_1} = 2 - 3i$.

Тогава имаме

$$z_1 + z_2 = 4, \quad z_1 z_2 = 13.$$

Следователно, прилагайки формулите на Виет, за коефициентите на търсения полином $p(z) = az^2 + bz + c$ е изпълнено:

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a},$$

откъдето получаваме $p(z) = z^2 - 4z + 13$.