което е еквивалентно на системата

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0. \end{array}\right.$$

Очевидно тази система има единствено решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Следователно системата е линейно независима. Тогава от Определение 5.7 заключаваме, че $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3\} = 3$.

Начин 2. Запазвайки съответствието на елементите, записваме матриците A_1, A_2 и A_3 като „матрици ред“ по следния начин: $(1, 2, 0, 1)$, $(0, 1, 2, 0)$ и $(0, 1, 1, 1)$, след което постъпваме аналогично на а):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \urcorner^{-1} \\ \hookleftarrow_{+} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тъй като не може да се получи нулев ред, то заключаваме, че системата е линейно независима с $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3\} = 3$.

Отговори. б) линейно независима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 3$;
в) линейно зависима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 2$;
г) линейно независима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 3$;
д) линейно независима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 3$;
е) линейно зависима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3\} = 2$;
ж) линейно зависима, $\mathsf{rang}\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = 3$;
и) линейно независима, $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3\} = 3$;
к) линейно зависима, $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3\} = 2$;
л) линейно независима, $\mathsf{rang}\{A_1, A_2, A_3, A_4\} = 4$.

5.2. **Смяна на база на линейно пространство.**

Нека $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ е база на линейното пространство L и $e' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ е система от вектори на L. Тогава векторите от e' са линейни комбинации на базисните вектори, т.е.

$$\begin{aligned} e'_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \ldots + t_{n1}e_n, \\ e'_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{n2}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n, \end{aligned} \tag{5.2}$$

където $t_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ са координатите на векторите от e' в базата e.

Определение 5.10. Матрицата T, чиито стълбове съдържат координатите на векторите $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ в базата e, т.е. матрицата

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

се нарича *матрица на прехода* от базата e към системата от вектори e', определени чрез (5.2).

Забележка 5.6. С помощта на матрицата T равенствата (5.2) могат да бъдат записани в еквивалентната матрична форма

$$e' = e\ T,$$

където e и e' са съответно матриците-редове

$$e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{pmatrix}, \quad e' = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \ldots & e'_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 5.3. *Нека e е база на линейното пространство L. Тогава системата от вектори e', зададена чрез (5.2), е база на L, точно когато матрицата T на прехода от e към e' е неособена, т.е. $\det T \neq 0$. В този случай T^{-1} е матрицата на обратния преход, т.е. на прехода от базата e' към базата e (матрично записваме $e = e'\ T^{-1}$).*

Теорема 5.4 (Изменение на координатите на вектор при смяна на базата)**.** *Нека означим с x и x' съответно стълбовете от координатите на произволен вектор от линейното пространство L в базите e и e'. Тогава зависимостта между x и x' се изразява чрез равенството*

$$x' = T^{-1}x. \tag{5.4}$$

Задача 5.2. *В линейното пространство L с база $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ разглеждаме множеството от вектори $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, определени с равенствата*

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 + 2e_2 + 3e_3, \\ e'_2 &= e_1 - e_2 + 2e_3, \\ e'_3 &= -2e_1 + e_2 - 4e_3. \end{aligned} \tag{5.5}$$

а) Намерете матрицата T на прехода от e към e'.
б) Докажете, че векторите e' образуват база на L.
в) Ако векторът v има в базата e координати $(1, -2, 3)$, то намерете координатите на v в базата e'.

Решение. а) Съгласно Определение 5.10, матрицата на прехода от базата e към системата от вектори e' има вида

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

б) Тъй като $\det T = -1 \neq 0$, то от Теорема 5.3 следва, че векторите от системата e' са база на L.

в) Намираме обратната матрица на матрицата на прехода T, както следва

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -11 & -2 & 5 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогава, като вземем предвид Теорема 5.4, намираме стълба x' с координатите на вектора v в базата e'

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -11 & -2 & 5 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Следователно $v = (1, 8, 4)$ в базата e'.

Задача 5.3. *Дадени са векторите* $a_1 = (2, 1, 1)$, $a_2 = (-1, 3, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1)$, $b_1 = (1, 1, 2)$, $b_2 = (-1, 1, -1)$ *и* $b_3 = (2, 3, 4)$.

а) Докажете, че $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ *и* $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ *са бази на* $\mathbb{R}^3$.
б) Намерете матрицата на прехода от базата a *към базата* b.
в) Ако векторът $v = (-1, 0, 2)$ *в базата* a*, то намерете координатите на* v *в базата* b.

Решение. а) Нека A и B са съответно матриците на прехода от стандартната база $e = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ на $\mathbb{R}^3$ към системите от вектори a и b, т.е. A и B са матриците, чиито стълбове са образувани от компонентите на векторите от a и b:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Понеже $\det A = 2 \neq 0$ и $\det B = -1 \neq 0$, то векторите от системите a и b са бази на $\mathbb{R}^3$.

б) Тъй като A и B са матриците на прехода от e съответно към a и b, то са в сила матричните равенства: $a = e\ A$ и $b = e\ B$. От първото равенство получаваме $e = a\ A^{-1}$ и заместваме във второто, откъдето получаваме $b = a(A^{-1}B)$. Следователно матрицата

$C = A^{-1}B$ е матрицата на прехода от базата a към базата b. За намирането на C пресмятаме

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} & -4 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}.$$

в) Ще намерим търсените координати по два начина.

Начин 1. Тъй като по условие координатите на вектора v в базата a са $(-1, 0, 2)$, то от Определение 5.5 получаваме

$$v = -1a_1 + 0a_2 + 2a_3 = -(2, 1, 1) + 2(1, 1, 1) = (0, 1, 1). \tag{5.7}$$

Известно е, че компонентите на всеки вектор в $\mathbb{R}^3$ съвпадат с координатите на този вектор относно стандартната база на $\mathbb{R}^3$. Следователно $v = (0, 1, 1)$ в базата e.

Тъй като B е матрицата на прехода от базата e към базата b, то координатите x' на вектора v в базата b се получават от (5.4), т.е.

$$x' = B^{-1}x = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

където с x сме означили стълба, съдържащ координатите на v в базата e. Следователно $v = (3, 1, -1)$ в базата b.

Начин 2. Първо намираме обратната матрица на матрицата на прехода от базата a към базата b, т.е. матрицата $C^{-1} = (A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A$. Тогава от (5.4) получаваме

$$x' = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -4 \\ -3 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Задача 5.4. *Дадени са системите от вектори $a = \{a_1, a_2\}$ и $b = \{b_1, b_2\}$, където $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (1, 1)$, $b_1 = (-1, 1)$ и $b_2 = (2, -3)$.*

а) Намерете матриците A и B на прехода от стандартната база $e = \{(1, 0), (0, 1)\}$ съответно към a и b.

б) Намерете матрицата C на прехода от a към b.

в) Ако векторът $v = (4, -5)$ в базата a, то намерете координатите на v в базата b.

Отговори. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$; в) $v = (-3, -2)$ в базата b.