Линейна зависимост и линейна независимост на вектори.
Пораждащи системи и бази

За решаването на задачите в това упражнение използваме определенията за линейно зависима, линейно независима, пораждаща система от вектори и база на векторно пространство. По-нататък за същата цел ще използваме друг апарат – понятията ранг на матрица и детерминанта, с което решаването на такива задачи се облекчава значително.

Задача 1. Кои от следните вектори от $\mathbb{R}^3$ са линейна комбинация на векторите $u = (0, -2, 2)$ и $v = (1, 3, -1)$:

- $a = (2, 2, 2)$;
- $b = (3, 1, 5)$;
- $c = (0, 4, 5)$;
- $o = (0, 0, 0)$.

Решение. Векторът a ще бъде линейна комбинация на векторите u, v, ако съществуват реални числа x, y, такива че

$$xu + yv = a.$$

Заместваме в горното равенство координатите на трите вектора и получаваме

$$x(0, -2, 2) + y(1, 3, -1) = (2, 2, 2),$$

откъдето достигаме до системата

$$\left| \begin{array}{l} y = 2 \\ -2x + 3y = 2 \\ 2x - y = 2. \end{array} \right.$$

Векторът a ще може да се изразява като линейна комбинация на векторите u, v, ако горната система има решение. Заместваме y от първото уравнение във второто и намираме $x = 2$. След това заместваме намерените стойности за неизвестните в третото последно уравнение и проверяваме дали те го удовлетворяват. Тъй като $x = 2$, $y = 2$ удовлетворяват третото уравнение, то те са решение на системата, т.е.

$$a = 2u + 2v,$$

следователно a е линейна комбинация на u, v, т.е. $a \in \operatorname{span}\{u, v\}$.

За вектора b проверете, че $b = 4u + 3v$.

За вектора c достигаме до системата

$$\left| \begin{array}{l} y = 0 \\ -2x + 3y = 4 \\ 2x - y = 5, \end{array} \right.$$

която няма решение. Следователно c не може да си изрази като линейна комбинация на u, v, т.е. $c \notin \operatorname{span}\{u, v\}$.

За нулевия вектор винаги е в сила $o = 0u + 0v$. Проверете, че това е единственият начин, по който o може да се изрази чрез u, v. Причината за това е, че векторите u, v са линейно независими.

Задача 2. Изразете векторите $a = (-9, -7)$, $b = (6, 11)$, $c = (7, 8)$ като линейна комбинация на $u = (2, 1)$, $v = (1, -1)$.

Решение. Възможно ли е тези вектори да бъдат изразени чрез u и v? Отговорът в тази задача е да, защото дадените вектори u и v са два линейно независими вектора от $\mathbb{R}^2$ и следователно са база на $\mathbb{R}^2$. Следователно всеки вектор от $\mathbb{R}^2$, каквито са a, b, c, може да се изрази като линейна комбинация на u и v.
Търсим x и y такива, че

$$xu + yv = a,$$

т.е.

$$x(2, 1) + y(1, -1) = (-9, -7).$$

От горното равенство получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x + y = -9 \\ x - y = -7, \end{array} \right.$$

чието решение е $x = -\frac{16}{3}$, $y = \frac{5}{3}$. Следователно

$$a = -\frac{16}{3}u + \frac{5}{3}v.$$

Аналогично получаваме $b = \frac{17}{3}u - \frac{16}{3}v$, $c = 5u - 3v$.

Задача 3. Кои от следните вектори са линейно зависими:

а) $u = (-1, 2, 4)$, $v = (5, -10, -20)$ в $\mathbb{R}^3$;

б) $u = (3, 1)$, $v = (0, 1)$, $w = (-1, 2)$ в $\mathbb{R}^2$;

в) $u = (0, 4, 5)$, $v = (1, -1, 2)$ в $\mathbb{R}^3$.

Решение. а) Тъй като $v = -5u$, то двата вектора са линейно зависими.
б) Тъй като имаме 3 вектора в двумерно векторно пространство, то системата от трите вектора е линейно зависима ($u - 7v + 3w = o$).
в) Тъй като координатите на двата вектора не са пропорционални, т.е. не съществува реално число x такова, че $u = xv$, то двата вектора са линейно независими.

Задача 4. Кои от следните системи от вектори са пораждащи за векторното пространство $\mathbb{R}^3$:

а) $u = (2, 2, 2)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (0, 0, 3)$;

б) $u = (2, -1, 3)$, $v = (4, 1, 2)$, $w = (8, -1, 8)$;

в) $u = (0, 4, 5)$, $v = (1, -1, 2)$.

Решение. а) Можем да разсъждаваме по следния начин. Да докажем, че трите вектора са база на $\mathbb{R}^3$ (три линейно независими вектора в тримерно векторно пространство), откъдето веднага ще следва, че системата от тези три вектора е пораждаща за $\mathbb{R}^3$. Вторият начин е да докажем директно, че всеки вектор $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ може да се представи като линейна комбинация на u, v, w. Ако работим по втория начин, трябва да докажем, че съществуват x, y, z такива, че

$$(a, b, c) = xu + yv + zw = x(2, 2, 2) + y(0, 1, 1) + z(0, 0, 3)$$

за произволни реални числа a, b и c. Горното уравнение е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x = a \\ 2x + y = b \\ 2x + y + 3z = c. \end{array} \right.$$

Решението на тази система е $x = \frac{a}{2}$, $y = b - a$, $z = \frac{c-b}{3}$. По този начин установихме, че за произволен вектор $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ е изпълнено

$$(a, b, c) = \frac{a}{2}u + (b - a)v + \frac{c - b}{3}w.$$

б) Първият начин, по който можем да постъпим, е да докажем, че трите вектора са линейно зависими (да проверим, че $w = 2u + v$). Тогава най-много два от трите вектора u, v, w са линейно независими помежду си и броят им не е достатъчен, за да може произволен вектор от тримерно векторно пространство да се изрази линейно чрез тях. Припомнете си, че всяка пораждаща система на n-мерно векторно пространство се състои от най-малко n на брой вектора. Вторият начин е да докажем директно, че произволен вектор $(a.b, c) \in \mathbb{R}^3$ не може да се представи като линейна комбинация на u, v, w. В този случай трябва дадокажем, че уравнението

$$(a, b, c) = xu + yv + zw = x(2, -1, 3) + y(4, 1, 2) + z(8, -1, 8)$$

няма решение за коефициентите x, y,z. Съставяме еквивалентната система линейни уравнения на горното равенство

$$\left| \begin{array}{l} 2x + 4y + 8z = a \\ -x + y - z = b \\ 3x + 2y + 8z = c. \end{array} \right.$$

Умножаваме второто уравнение по 2 и го прибавяме към първото и отново второто уравнение по 3 и го прибавяме към третото. Така получаваме еквивалентната система

$$\left| \begin{array}{l} y + z = \frac{a+2b}{6} \\ -x + y - z = b \\ y + z = \frac{3b+c}{5}. \end{array} \right.$$

За да бъде системата от вектори $\{u, v, w\}$ пораждаща за $\in \mathbb{R}^3$, горната система линейни уравнения трябва да има решение за всички стойности на (a, b, c). Но лесно се вижда, че например за $a = b = 0$, $c = 5$ първото уравнение в системата получава вида $y + z = 0$, а третото приема вида $y + z = 1$, което означава, че в този случай системата няма решения. Тогава $(0, 0, 5)$ не може да се изрази като линейна комбинация на векторите $\{u, v, w\}$ и следователно системата $\{u, v, w\}$ не е пораждаща за $\in \mathbb{R}^3$.

в) Двата вектора са линейно независими, но броят им не е достатъчен, за да породят тримерно векторно пространство.

Задача 5. За всяка от дадените системи от вектори докажете, че е база на съответветното векторно пространство и намерете координатите на посочения вектор u в тази база.

а) $v_1 = (1, 1)$ и $v_2 = (1, -1)$ на $\mathbb{R}^2$; $u = (1, -3)$;

б) $v_1 = (2, 3, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1)$ и $v_3 = (-1, 2, 1)$ на $\mathbb{R}^3$; $u = (1, 2, 3)$.

Решение. Ще използваме твърдението, че система от n на брой вектора е база на n-мерно векторно пространство, точно когато тази система е линейно независима.
а) Проверяваме система от вектори $\{v_1, v_2\}$ за линейна независимост. Съставяме произволна тяхна линейна комбинация $xv_1 + yv_2$, където $x, y \in \mathbb{R}$, приравняваме я на нулевия вектор на $\mathbb{R}^2$, т.е. на $o = (0, 0)$:

$$xv_1 + yv_2 = o \qquad \Leftrightarrow \qquad x(1, 1) + y(1, -1) = (0, 0)$$

и трябва да докажем, че горното уравнение има само нулевото решение за коефициентите в линейната комбинация x, y. Записваме еквивалентната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = 0, \end{array} \right.$$

за която веднага се вижда, че се удовлетворява само от $x = y = 0$. Следователно векторите $\{v_1, v_2\}$ са линейно независими и тъй като са два линейно независими вектора в двумерно векторно пространство, те са база на това пространство.
Координатите на вектора u в тази база ще намерим, като намерим коефициентите в линейната комбинация, чрез която u се изразява по базата, т.е. числата a, b, за които

$$av_1 + bv_2 = u \qquad \Leftrightarrow \qquad a(1, 1) + b(1, -1) = (1, -3) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} a + b = 1 \\ a - b = -3, \end{array} \right.$$

чието решение е $a = -1$, $b = 2$. Следователно $u = -v_1 + 2v_2$, т.е. u има координати $u(-1, 2)$ в базата $\{v_1, v_2\}$.

б) Аналогично, първо доказваме, че $\{v_1, v_2, v_3\}$ са линейно независими, т.е. че уравнението

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = o \qquad \Leftrightarrow \qquad x(2, 3, 1) + y(0, 2, 1) + z(-1, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

има само нулевото решение за x, y, z. Решаваме еквивалентната система

$$\left|\begin{array}{l} 2x - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right.$$

От първото уравнение намираме $z = 2x$, което заместваме в останалите две уравнения и от получената система намираме $x = y = 0$, откъдето и $z = 0$. Следователно $\{v_1, v_2, v_3\}$ са линейно независими.
Сега търсим числата a, b, c, за които

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = u \qquad \Leftrightarrow \qquad a(2,3,1) + b(0,2,1) + c(-1,2,1) = (1,2,3) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} 2a - c = 1 \\ 3a + 2b + 2c = 2 \\ a + b + c = 3. \end{array}\right.$$

Отново можем от първото уравнение да изразим $c = 2a + 1$ и да го заместим в другите две уравнения. Така получаваме

$$\left|\begin{array}{l} 7a + 2b = 4 \\ 3a + b = 4 \\ c = 2a + 1, \end{array}\right.$$

чието решение е $a = -4$, $b = 16$, $c = -9$. Следователно $u = -4v_1 + 16v_2 - 9v_3$.