Геометричен дизайн

спец. Софтуерни технологии и дизайн, зад. об.

Задачи за семинарни занятия

---

1. Параметрични криви

Задача 1.1. Дадена е кривата $C : \vec{r}(u) = (3u, 3u^2, 2u^3)$. Намерете:

а) Дължината на дъгата от кривата между точките $M(u = 0)$ и $N(u = 1)$.

б) Единичните вектори от триедъра на Френе на кривата в произволна нейна точка и в точката $M(u = 0)$.

в) Кривината и торзията в произволна точка от кривата и в точката $M(u = 0)$. В коя точка от кривата кривината е максимална?

Задача 1.2. Намерете уравнението на оскулачната окръжност и еволютата на следните равнинни криви: а) окръжност; б) елипса.

2. Гладко съединяване на параметрични криви

Задача 2.1. Изследвайте кривите $\vec{f}(u)$ и $\vec{g}(v)$ за C^1-, C^2-, G^1-, G^2- и кривинна непрекъснатост, ако:

а) $\vec{f}(u) = (-\sin u, -1 - \cos u, 0)$, $\vec{g}(v) = (\sin v, 0, 1 - \cos v)$, $u, v \in [0; \pi]$, съединяващи се в координатното начало;

б) $\vec{f}(u) = (\cos u, \sin u)$, $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\vec{g}(v) = (-v, 1 - v^2)$, $v \in [0; 1]$, съединяващи се в точката $(0, 1)$;

в) $\vec{f}(u) = (u^2 - 1, 2u - u^2)$, $\vec{g}(v) = (2v - v^2, 1 - v^2)$, $u, v \in [0; 1]$, съединяващи се в точката $(0, 1)$.

Задача 2.2. Докажете, че ако две дъги от криви се съединяват с G^2-непрекъснатост, то в точката им на съединяване съществува кривинна непрекъснатост.

3. Криви на Безие

Задача 3.1. Равнинна крива на Безие $C(u)$ от втора степен е определена чрез следните три контролни точки $P_0(-1, 0)$, $P_1(0, 1)$, $P_2(2, 0)$.

а) Запишете уравнението на Безие на $C(u)$.

б) Запишете основните функции на Безие и намерете параметричната форма на $C(u)$.

в) Намерете точка от $C(u)$, съответстваща на $u = 0.25$, като използвате уравнението на Безие на кривата и чрез параметричната ѝ форма.

г) Чрез алгоритъма на дьо Кастелжо намерете точките от кривата, които съответстват на $u = 0.25$, $u = 0.5$, $u = 0.75$. Начертайте мрежата на дьо Кастелжо.

д) Разделете кривата при $u = 0.25$, подредете контролните точки на двете дъги.

е) Нека кривата на Безие $D(u)$ е получена от $C(u)$ чрез преместване на контролната точка P_0 в ново положение $P_0^*(-1, -1)$. Запишете зависимостта между двете криви и с нейна помощ намерете $D(0.25)$.

ж) Увеличете степента на кривата последователно две пъти.

Задача 3.2. Дадена е крива на Безие $C(u)$ от трета степен, определена от контролните точки $P_0(0, -4)$, $P_1(-4, 0)$, $P_2(0, 4)$, $P_3(4, 0)$.

а) Намерете уравнението на Безие на кривата и параметричната ѝ форма.

б) Намерете стойностите на основните функции на Безие за $u = 0.75$.

в) Намерете $C(0.75)$ чрез уравнението на Безие и чрез параметричната форма на кривата.

г) Намерете $C(0.75)$ чрез алгоритъма на дьо Кастелжо. Начертайте мрежата на дьо Кастелжо и разделете кривата при $u = 0.75$.

д) Намерете $\dot{C}(0.75)$ и $\ddot{C}(0.75)$, като използвате данните от алгоритъма на дьо Кастелжо.

е) Увеличете степента на кривата с единица. Начертайте стария и новия контролен полигон.

ж) Нека кривата $D(u)$ е получена от $C(u)$ чрез преместване на контролната точка P_2 в ново положение $P_2^*(2, 2)$. Намерете зависимостта между $D(u)$ и $C(u)$ и $D(0.75)$.

з) Ако кривата на Безие $F(u)$ е определена от контролните точки $R_0(4, 0)$, $R_1(7, -3)$, $R_2(5, -5)$, $R_3(0, -5)$, $R_4(-2, -4)$, изследвайте C и F за C^1-, C^2-, G^1-, G^2- и кривинна непрекъснатост в точката им на съединяване.

Задача 3.3. Дадена е кривата на Безие $C(u)$ от трета степен, определена от контролните точки $P_0(2, 1)$, $P_1(0, 3)$, $P_2(0, 0)$, $P_3(-2, 0)$. Намерете всички криви на Безие от втора степен, които са:

а) G^2-непрекъснато свързани с $C(u)$ в точката P_3.

б) C^2-непрекъснато свързани с $C(u)$ в точката P_3.

Задача 3.4. Дадена е кривата на Безие $C(u)$ от трета степен, определена от контролните точки $P_0(0, 0)$, $P_1(-1, 0)$, $P_2(-1, 1)$ и $P_3(0, 1)$. Намерете всички криви на Безие от трета степен, които са C^2-непрекъснато съединени с $C(u)$ в точката P_3.

Задача 3.5. Затворена крива на Безие $C(u)$ от пета степен е определена от контролния полигон $P_0(0, 0)$, $P_1(-2, -2)$, $P_2(-2, 2)$, $P_3(2, 2)$, $P_4(2, -2)$, $P_5(0, 0)$. Изследвайте кривата за C^1-, C^2-, G^1-, G^2- и кривинна непрекъснатост в точката $(0, 0)$.

Задача 3.6. Променете положението на една контролна точка на кривата от предходната задача така, че в точката $(0, 0)$ да съществува C^1-непрекъснатост. Коя точка трябва да преместите? Как ще изглежда кривата, ако наложим условие за G^2-непрекъснатост в точката на съединяване?

Задача 3.7. Определете минималната степен и контролния полигон на затворена крива на Безие, чието начало и край се съединяват с C^1-непрекъснатост. Установете, че в точката на съединяване съществуват G^2- и кривинна непрекъснатост. Изследвайте за C^2-непрекъснатост в точката на съединяване.

4. Криви на Ермит и други полиномни криви

Задача 4.1. Намерете параметричната форма на кубична крива на Ермит с начална точка $P_0(0,0)$ и крайна точка $P_1(1,0)$, ако началният допирателен вектор на кривата е $\vec{v}_0(1,1)$, а крайният е $\vec{v}_1(0,-1)$.

Задача 4.2. Намерете уравнението на затворена кубична крива на Ермит, съединяваща се в координатното начало, с начален допирателен вектор $\vec{v}_0(-1,1)$ и краен допирателен вектор $\vec{v}_1(-1,-1)$. Намерете контролния полигон, който задава получената крива като крива на Безие.

Задача 4.3. Намерете параметричната форма на затворена крива на Ермит от трета степен, съединяваща се в координатното начало, ако началният и крайният ѝ допирателни вектори са взаимно перпендикулярни. Установете, че в точката на съединяване съществува кривинна непрекъснатост.

Задача 4.4. Намерете крива на Ермит $C(u)$ от втора степен с начална точка $P_0(1,0)$ и крайна точка $P_1(2,1)$, ако допирателният вектор в началната точка е $\vec{v}_0(-1,1)$. Свържете $C(u)$ с ермитовата крива от втора степен $D(u)$ с начална точка $Q_0(2,1)$ и крайна точка $Q_1(0,3)$ с C^1-непрекъснатост.

Задача 4.5. Намерете уравнението на крива от втора степен, минаваща през точките $P_0(-1,0)$, $P_1(0,1)$, $P_2(1,0)$. Задайте тази крива като крива на Безие и като крива на Ермит.

Задача 4.6. Чрез алгоритъма на Айткен-Невил генерирайте кубична полиномна крива, минаваща през точките $P_0(-1,-1)$, $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(0,2)$ (използвайте равномерен възлов вектор).

Задача 4.7. Задайте кубичната крива $C : \vec{r}(u) = (1+u+u^2, u^3)$ като крива на Безие и като крива на Ермит.

Задача 4.8. Намерете уравненията на двете кубични дъги от сплайна на Катмул-Ром (кардиналния сплайн), определен с контролните точки $P_1(-1,0)$, $P_2(0,2)$, $P_3(1,1)$, $P_4(2,0)$, $P_5(1,-2)$.

Задача 4.9. Намерете уравненията на двете дъги от сплайна на Кунс от втора степен, определен с точките $P_0(-2,0)$, $P_1(0,2)$, $P_2(2,0)$, $P_3(2,-2)$. Коя е точката на съединяване на двете дъги?

5. Б-сплайн криви

Задача 5.1. Изчислете основните Б-сплайн функции от втора степен $N_{i,2}(u)$ при възловия вектор $U = \{0; 0.2; 0.5; 0.6; 0.8; 1\}$.

Задача 5.2. Изчислете основната Б-сплайн функция $N_{2,2}(u)$ при възловия вектор $U = \{0[2]; 0.2; 0.4; 0.5[2]; 1\}$.

Задача 5.3. Нека $C(u)$ е Б-сплайн крива от 5-та степен, дефинирана чрез контролните точки $P_0, P_1, ..., P_{20}$.

а) Определете контролните точки, чиято изпъкнала обвивка съдържа дъгата от кривата, дефинирана между възлите u_{10} и u_{11}.

б) Ако положението на контролната точка P_{10} се премести, определете коя част от кривата ще се измени.

Задача 5.4. Стегната Б-сплайн крива $C(u)$ от втора степен е определена от контролните точки $P_0(-10,-10)$, $P_1(-10,0)$, $P_2(0,10)$, $P_3(0,0)$, $P_4(10,0)$, $P_5(10,-10)$ и възловия вектор $U=\{0[3];0.25;0.5;0.75;1[3]\}$.

а) Добавете нов възел в $u=0.2$ два пъти.

б) Намерете $C(0.2)$ чрез алгоритъма на де Бор.

в) Разделете кривата при $u=0.2$. Запишете контролните точки и възловите вектори на двете дъги.

Задача 5.5. Стегната Б-сплайн крива $C(u)$ от втора степен е определена от контролните точки $P_0(-12,0)$, $P_1(0,12)$, $P_2(0,0)$, $P_3(12,0)$, $P_4(12,-12)$, $P_5(0,-12)$ и възловия вектор $U=\{0[3];0.2;0.6;0.8;1[3]\}$.

а) Добавете нов възел в $u=0.5$ един път.

б) Намерете $C(0.5)$ чрез алгоритъма на де Бор.

в) Разделете кривата при $u=0.5$. Запишете контролните точки и възловите вектори на двете дъги.

Задача 5.6. Стегната кубична Б-сплайн крива $C(u)$ е определена от контролните точки $P_0(-12,0)$, $P_1(-12,12)$, $P_2(-6,12)$, $P_3(-6,6)$, $P_4(0,0)$, $P_5(6,6)$, $P_6(6,12)$, $P_7(12,12)$ и възловата редица $U=\{0[4];0.2;0.4;0.6;0.8;1[4]\}$.

а) Добавете нов възел в $u=0.5$ два пъти.

б) Намерете $C(0.5)$ чрез алгоритъма на де Бор.

в) Разделете кривата при $u=0.5$. Запишете контролните точки и възловите вектори на двете дъги.

Задача 5.7. Стегната Б-сплайн крива $C(u)$ от втора степен е определена от контролните точки $P_0(-8,-8)$, $P_1(-8,0)$, $P_2(0,8)$, $P_3(0,0)$, $P_4(8,0)$ и възловия вектор $U=\{0[3];0.4;0.6;1[3]\}$. Подразделете кривата на Безие дъги и проверете, че получените дъги се съединяват с C^1-непрекъснатост.

6. Параметрични повърхнини

Задача 6.1. Дадена е повърхнината $S:\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, bv)$, $b=\text{const.}\neq 0$ (прав хеликоид). Намерете коефициентите на първа и втора основна форма и пресметнете гаусовата и средната кривина в произволна точка на S.

Задача 6.2. Намерете гаусовата и средната кривина на произволна ротационна повърхнина $S:\vec{r}(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$, получена при въртенето на кривата $C: x=f(u)$, $z=g(u)$ около оста Oz.

Задача 6.3. С помощта на кубични криви на Безие конструирайте ротационни повърхнини с формата на купичка, ваза и камбанка. Намерете гаусовата и средната кривина на получените повърхнини.