Лекция 6. Параметрични повърхнини

Геометричен дизайн

специалност Софтуерни технологии и дизайн, II курс,
задочно обучение

Определение

Непрекъснато изображение S, при което на всяка наредена двойка $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ от се съпоставя точно една точка в в тримерното евклидово пространство, се нарича *параметрична повърхнина*:

$$S: \ \vec{r}(u, v) = \vec{r}\left(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\right). \tag{1}$$

Уравнението (1) се нарича векторно параметрично уравнение на повърхнината S.

Параметричните повърхнини са векторни функции на две реални променливи (параметъра), в случая означени с u и v. На всяка конкретна двойка числови стойности (u_0, v_0) от дефиниционната област D на параметрите (u, v) се съпоставя точно една точка от повърхнината $M(u = u_0, v = v_0)$. В такъв случай двойката стойности (u_0, v_0) се наричат вътрешни координати на точката M. След заместването им уравнението на повърхнината (1), се получават външните (абсолютните) координати на M (радиус-вектора на M):

$$M = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)).$$

Означаваме първите частни производни на $\vec{r}$ относно параметрите u и v съответно с $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Имаме

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Повърхнината S, определена от (1), се нарича *правилна*, ако във всяка нейна точка е изпълнено $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$, т. е. векторите $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ са линейно независими.

В този случай $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ определят една база (наречена *естествена база*) на *допирателната равнина* в произволна точка M на правилната повърхнина S. Тази равнина се означава с $T_M S$ и съдържа допирателните вектори в т. M на всички криви върху повърхнината, минаващи през тази точка.

Единичният вектор $\vec{N}$, определен от

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}, \tag{2}$$

се нарича *нормален вектор* на повърхнината S и е ортогонален на допирателната равнина, т. е. $T_M S\,(\text{z}M; \parallel \vec{r}_u, \parallel \vec{r}_v\ ) = \left(\text{z}M; \perp \vec{N}\ \right)$.

Правата N, колинеарна на вектора $\vec{N}$, се нарича *нормала* на S. Тогава тази права се определя от $N\left(\text{z}M; \parallel \vec{N}\ \right)$.

Кривите върху повърхнината S, за които единият от параметрите е постоянен, се наричат *координатни линии* на S. Това са u*-линиите*, чието вътрешно уравнение (относно параметрите на повърхнината) е $v = \text{const}$ и v*-линиите*, които се определят от $u = \text{const}$. Векторите $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ са допирателни вектори съответно към u-линиите и v-линиите във всяка точка на повърхнината.

Задаване на повърхнина

Начини за задаване на повърхнина:

- Векторно параметрично уравнение – радиус-векторът на произволна точка от повърхнината се определя като векторна функция на два скаларни аргумента, т.е. $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$.
- Явно уравнение $S : z = f(x, y)$.
- Неявно уравнение $S : F(x, y, z) = 0$.

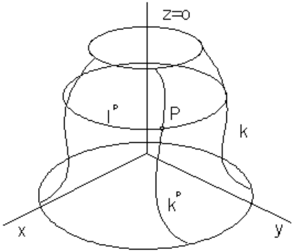
Ротационни повърхнини

Нека в координатната равнина Oxz е дадена крива c с уравнение

$$c: \left| \begin{array}{l} x = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{array} \right. \tag{3}$$

При завъртането на тази крива около оста Oz се получава ротационната повърхнина S с уравнение

$$S : \vec{r}\left(\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u)\right), \quad v \in [0; 2\pi].$$



Сферично произведение на криви

Нека са дадени две равнинни криви c_1 и c_2 с уравнения

$$c_1 : \vec{r}_1(v) = (x_1(v), y_1(v)), \quad v_1 \le v \le v_2,$$

$$c_2 : \vec{r}_2(u) = (x_2(u), y_2(u)), \quad u_1 \le u \le u_2.$$

Повърхнината S, определена от

$$S : \vec{r}(u,v) = (x_2(u)x_1(v), x_2(u)y_1(v), y_2(u)), \tag{4}$$

се нарича сферично произведение на кривите c_1 и c_2.

Ако кривата c_1 е единичната окръжност, т.е. ако $x_1(v) = \cos v$, $y_1(v) = \sin v$, $0 \le v \le 2\pi$, от горното уравнение представлява ротационна повърхнина, получена при завъртането на кривата c_2 (лежаща в равнината Oxz) около оста Oz.

Суперформа (суперформула) в пространството

Използвайки уравнението (4) на сферично произведение на две криви, може да се получи пространствен аналог на суперформата (суперформулата) на Йохан Гилис. За тази цел двете равнинни криви се задават с уравнението (полярно) на суперформата, т.е.

$$\rho(\theta) = \left[\left| \frac{\cos\left(\frac{m\theta}{4}\right)}{a} \right|^{n_2} + \left| \frac{\sin\left(\frac{m\theta}{4}\right)}{b} \right|^{n_3} \right]^{-\frac{1}{n_1}}.$$

В декартови координати уравнението ѝ е $x = \rho(\theta)\cos\theta$, $y = \rho(\theta)\sin\theta$.

Пространствената суперформа се генерира от две равнинни суперформи $\rho_1(\theta)$ и $\rho_2(\varphi)$ чрез уравнението

$$\begin{aligned} x &= \rho_1(\theta)\cos\theta\,\rho_2(\varphi)\cos\varphi \\ y &= \rho_1(\theta)\sin\theta\,\rho_2(\varphi)\cos\varphi, \qquad -\pi \le \theta \le \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}. \\ z &= \rho_2(\varphi)\sin\varphi \end{aligned}$$

Линейни повърхнини

Генерира се от непрекъснатото движение на права линия (генератор) по пространствена крива (директриса). Уравнението на произволна линейна повърхнина има вида

$$\vec{r}(u,v) = \vec{d}(u) + v\vec{e}(u), \tag{5}$$

където $\vec{d}(u)$ е директрисата (основната крива), а $\vec{e}(u)$ е единичен вектор, задаващ посоката на движение.

Линейна повърхнина може да се зададе и чрез свързване с линейни сегменти на съответни точки от две пространствени криви c_1 и c_2. Уравнението на повърхнината приема вида

$$\vec{r}(u,v) = (1-v)\vec{r}_1(u) + v\vec{r}_2(u), \quad 0 \leq v \leq 1, \tag{6}$$

където $\vec{r}_1(u)$ и $\vec{r}_2(u)$ са съответно радиус-векторите на произволна точка от c_1 и c_2 (директриси).

След полагане на $\vec{d}(u) = \vec{r}_1(u)$ и $\vec{e}(u) = \vec{r}_2(u) - \vec{r}_1(u)$, от (6) се получава (5).

Първа основна форма на повърхнина и приложения

Коефициентите на първа основна форма, които се означават с g_{ij}, $i, j \in \{1, 2\}$, се дефинират чрез равенствата:

$$g_{11} = \vec{r}_u^{\,2}, \qquad g_{12} = g_{21} = \vec{r}_u \vec{r}_v, \qquad g_{22} = \vec{r}_v^{\,2}. \tag{7}$$

От (7) следва, че матрицата (g_{ij}), съответна на първа основна форма, е симетрична. За нейната детерминанта е изпълнено

$$\begin{aligned} g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \\ &= \vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u \vec{r}_v)^2 = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)^2 > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Следователно първа основна форма е положително определена.

Нека (du, dv) е произволно допирателно направление, лежащо в допирателната равнина $T_M S$. Тогава *първа основна форма* (*метрика*) върху S (или *линеен елемент* на S, означава се още с ds^2) има вида

$$\mathrm{I}(du, dv) = g_{11} du^2 + 2 g_{12} du dv + g_{22} dv^2. \tag{9}$$

Равенството (9) има геометричен смисъл на скаларен квадрат на допирателния вектор с координати (du, dv) относно скаларното умножение в допирателната равнина, определено от естествената ѝ база $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$.

Ако $(\delta u, \delta v)$ е друго допирателно направление в $T_P S$, то скаларното произведение на направленията (du, dv) и $(\delta u, \delta v)$ се пресмята по формулата:

$$\mathrm{I}(du, dv; \delta u, \delta v) = g_{11} du \delta u + g_{12}(du \delta v + dv \delta u) + g_{22} dv \delta v, \tag{10}$$

която се нарича *полярен вид на първа основна форма*.

Втора основна форма на повърхнина

Нека е дадена повърхнина S: $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ с частни производни от втори ред

$$\vec{r}_{uu} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}, \qquad \vec{r}_{vv} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}, \qquad \vec{r}_{uv} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v} = \vec{r}_{vu} \tag{11}$$

и единичен нормален вектор $\vec{n}$, определен от (2) или от равенството

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\vec{r}_u \times \vec{r}_v \right). \tag{12}$$

Коефициентите h_{ij} $(i,j = 1,2)$ на втора основна форма на S се определят от

$$h_{11} = \vec{N}\vec{r}_{uu}, \qquad h_{12} = h_{21} = \vec{N}\vec{r}_{uv}, \qquad h_{22} = \vec{N}\vec{r}_{vv}. \tag{13}$$

Тогава втората основна форма за допирателното направление (du, dv) на S има следния вид

$$\mathrm{II}(du, dv) = h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2. \tag{14}$$

Детерминантата от коефициентите на втора основна форма h се дефинира чрез

$$h = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 \tag{15}$$

и за разлика от g не е определена по знак.

В зависимост от знака на h^M за точка M върху S имаме следната класификация.

Една точка M върху S се нарича:

- *елиптична точка*, ако $h^M > 0$;
- *параболична точка*, ако $h^M = 0$;
- *хиперболична точка*, ако $h^M < 0$.

Ако върху една повърхнина S всички точки са само елиптични, параболични или хиперболични, то S се нарича съответно *елиптична*, *параболична* или *хиперболична повърхнина*.

Гаусова и средна кривина

Инвариантните величини на повърхнина S – *гаусовата кривина* K и *средната кривина* H се изчисляват съответно чрез равенствата:

$$K = \frac{h}{g}, \qquad H = \frac{g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12}}{2g}. \tag{16}$$

Точка M върху S се нарича *омбилична точка*, ако $K_M = H_M^2$, където K_M и H_M са съответно стойностите на K и H за S в т. M. Повърхнина S, която се състои само от омбилични точки, се нарича *омбилична повърхнина*, т.е. за S е в сила условието $K = H^2$, което е еквивалентно на

$$\frac{h_{11}}{g_{11}} = \frac{h_{12}}{g_{12}} = \frac{h_{22}}{g_{22}}. \tag{17}$$

Повърхнина S се нарича *минимална*, ако $H = 0$.

Повърхнини на Безие

- Повърхнина на Безие $S = S(u, v)$ от степен (n, m), определена от контролните точки P_{ij}, се дефинира чрез равенството

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_{n,i}(u)B_{m,j}(v)P_{ij}, \tag{18}$$

където $B_{n,i}(u)$ и $B_{m,j}(v)$ са основните функции на Безие, а u и v са реални параметри.

- Контролните точки P_{ij} се задават чрез матрица (таблица), съставена от $n+1$ реда и $m+1$ стълба. Редовете на тази матрица са криви на Безие от степен m, зависещи от параметъра v, а стълбовете ѝ са криви на Безие от степен n, зависещи от u.
- Поради това повърхнината на Безие S, определена от (18), може да бъде разгледана като крива на Безие за единия си параметър, всяка от контролните точки на която е също крива на Безие, зависеща от другия параметър на повърхнината.

- Чрез смяна в реда на сумирането по индексите i и j, равенството (18) може да бъде записано в следните две еквивалентни форми:

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(u) Q_i(v), \qquad Q_i(v) = \sum_{j=0}^{m} B_{m,j}(v) P_{ij}. \tag{19}$$

$$S(u,v) = \sum_{j=0}^{m} B_{m,j}(v) R_j(u), \qquad R_j(u) = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(u) P_{ij}. \tag{20}$$

- Тогава, за да намерим точка $M(u = u_0, v = v_0)$ от повърхнината на Безие S, можем да използваме алгоритъма на дьо Кастелжо за криви на Безие по следните два начина.
- *Първи начин*. Намираме точка от всяка крива на Безие $Q_i(v)$, съответстваща на $v = v_0$. След това, като имаме предвид (19), прилагаме още веднъж алгоритъма на дьо Кастелжо за $u = u_0$ върху кривата на Безие, дефинирана чрез контролните точки $Q_0(v_0)$, $Q_1(v_0), ..., Q_n(v_0)$ и по този начин намираме т. M.
- *Втори начин*. Първо прилагаме алгоритъма на дьо Кастелжо върху кривите $R_j(u)$, като за всяка от тях намираме точка, съответстваща на $u = u_0$. След това, съгласно (20), отново чрез алгоритъма на дьо Кастелжо търсим точката върху кривата, определена от $R_0(u_0), R_1(u_0), ..., R_m(u_0)$, която се получава при $v = v_0$, т. е. точка M.

Б-сплайн повърхнини

- Б-сплайн повърхнина $S = S(u, v)$ от степен (p, q), определена от контролните точки P_{ij} и възловите вектори $U = \{u_0, u_1, ..., u_k\}$ и $V = \{v_0, v_1, ..., v_l\}$, се дефинира чрез равенството

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{ij}, \tag{21}$$

  където $N_{i,p}(u)$ и $N_{j,q}(v)$ са основните Б-сплайн функции.
- Както и при повърхнините на Безие, контролните точки P_{ij} на Б-сплайн повърхнината S се задават чрез контролна мрежа – матрица от $n + 1$ реда и $m + 1$ стълба.
- Контролните точки от редовете на тази матрица задават Б-сплайн криви от степен q, зависещи от параметъра $v \in [v_0; v_l]$, а точките от стълбовете ѝ – Б-сплайн криви от степен p, зависещи от $u \in [u_0; u_k]$. Обикновено $u, v \in [0; 1]$.
- Съгласно известното от теорията на Б-сплайн кривите, в сила са равенствата: $k = n + p + 1$ и $l = m + q + 1$.

- Равенството (21) може да бъде записано в следните две еквивалентни форми:

$$S(u,v) = \sum_{j=0}^{m} N_{j,q}(v) C_j(u), \qquad C_j(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) P_{ij}, \tag{22}$$

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) D_i(v), \qquad D_i(v) = \sum_{j=0}^{m} N_{j,q}(v) P_{ij}. \tag{23}$$

- Ако Б-сплайн кривите $C_j(u)$ и $D_i(v)$ са стегнати, разглежданата Б-сплайн повърхнина се нарича *стегната*.

- За стегнати Б-сплайн повърхнини можем да използваме алгоритъма на де Бор (за стегнати Б-сплайн криви) за намиране на координатите на точка $M(u = s, v = t)$ от повърхнината (аналогично на описания начин за прилагане на алгоритъма на дьо Кастелжо за повърхнини на Безие).
- Можем първо работим с точките от стълбовете на контролната мрежа на S, прилагайки алгоритъма на де Бор при $u = s$ за всяка от Б-сплайн кривите $C_j(u)$, $j = 0, 1, ..., m$ с възлов вектор U. След това, съгласно (22), намираме координатите на т. M от повърхнината, като прилагаме още веднъж алгоритъма на де Бор за $v = t_0$ върху кривата с контролен полигон $[C_0(s), C_1(s), ..., C_m(s)]$ и възлов вектор V.
- Аналогично, можем първо да работим с контролните точки от редовете на контролната матрица на S, като имаме предвид (23).

Литература

- М. Манев. *Геометрия за информатици*. Архимед, 2007.
- М. Манев, М. Теофилова, А. Христов, Д. Грибачева. *Ръководство за решаване на задачи по геометрия за информатици*. Университетско издателство на ПУ, 2009.
- L. Piegel, W. Tiller. *The NURBS Book*, 2. ed. Springer, 1997.
- D. Salomon. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. Springer, 2006.
- D. Marsh. *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, 2. ed. Springer, 2005.
- T. W. Sederberg, *Computer Aided Geometric Design*, http://tom.cs.byu.edu/~557/text/cagd.pdf.
- http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/