

Лекция 5. Други полиномни криви и сплайни

Геометричен дизайн

доц. д-р Марта Теофилова

специалност Софтуерни технологии и дизайн, II курс,
задочно обучение

Изисквания към основните полиномни функции

Основните полиномни функции $f_i(u)$ (blending functions), използвани за конструиране на полиномни криви $C(u) = \sum_{i=0}^n f_i(u)P_i$, обикновено притежават следните свойства:

- Независимост от координатната система (афинна инвариантност) – кривата не изменя формата си при смяна на координатната система. За тази цел полиномните функции трябва да притежават свойството "разделяне на единицата", т.е.

$$\sum_{i=0}^n f_i(u) = 1.$$

- Свойство на изпъкналата обвивка – кривата се съдържа изцяло в изпъкналата обвивка на контролните си точки, ако

$$\sum_{i=0}^n f_i(u) = 1, \quad f_i(u) \geq 0, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

- Линейна независимост на $f_i(u)$, $i = 0, 1, \dots, n$ (поради тази причина се наричат базисни функции), т.е. $\sum_{i=0}^n c_i f_i(u) = 0$, точно когато всички коефициенти c_0, c_1, \dots, c_n са равни на 0. Липсата на линейна независимост би позволила някои от функциите $f_i(u)$ да се изразят чрез останалите, поради което една и съща крива би могла да се представи чрез различен набор от контролни точки, което е нежелателно. Друго неприятно последствие от линейната зависимост е, че кривата би могла да се изроди дори само в една контролна точка, въпреки че контролният ѝ полигон се състои от повече от една точки.
- Интерполация в крайните точки – кривата $C(u)$ минава през първата и последната си контролна точка, т. е. $C(0) = P_0$ и $C(1) = P_n$, ако

$$f_0(0) = 1, \quad f_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$f_n(1) = 1, \quad f_i(1) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n - 1)$$

при условие, че параметърът на кривата се изменя в $[0; 1]$.

- Симетричност – кривата не се променя, ако вместо P_0, P_1, \dots, P_n контролните точки се вземат в обратен ред, т.е. P_n, P_{n-1}, \dots, P_0 . За тази цел трябва

$$\sum_{i=0}^n f_i(u)P_i = \sum_{i=0}^n f_i(1-u)P_{n-1}, \quad u \in [0, 1],$$

което е в сила, ако $f_i(u) = f_{n-i}(1-u)$.

- Променливо намаляване – никоя права линия не пресича кривата повече пъти, отколкото пъти пресича контролния ѝ полигон. По-точно, ако дадена права линия има c на брой пресечни точки с кривата и пресича контролния ѝ полигон в p на брой точки, то $c = p - 2j$, където $j \geq 0$. Предимството на това свойство е, че кривата не се "извива" повече в сравнение с нейния контролен полигон. Кривите на Безие и Б-сплайн кривите притежават това свойство за разлика от повечето останали криви, използвани за дизайн.

Популярни кубични криви, зададени чрез контролни точки

Полиномни криви могат да се задават чрез (контролни) точки, като кривата минава през някои от тях (обикновено първата и последната, но би могла и да интерполира всичките). Друго полезно изискване, улесняващо предсказуемостта на формата на кривата, е кривата или част от нея да се намира в изпъкналата обвивка от контролните си точки.

Някои популярни кубични криви, зададени чрез контролни точка, освен кривите на Безие, са:

- кривите на Тимър;
- кривите на Бол;
- кривите на Оувърхаузър.

Кубични криви на Тимър

- Разработени от Хари Тимър (самолетостроителна компания McDonnell Douglas) като опит за подобряване на кривите на Безие с цел кривата да следва по-плътно формата на контролния си полигон. Кривите на Тимър, също като кривите на Безие, минават през първата и последната си контролна точка, като се допират до първото и последното си контролно рамо, и освен това минават и през средата на второто си контролно рамо.
- Кубична крива на Тимър $C(u)$ се задава с четири контролни точки P_0, P_1, P_2 и P_3 , като $C(0) = P_0, C(1) = P_3, C(\frac{1}{2}) = P_{12}$, където P_{12} е средата на контролното рамо P_1P_2 .
- Основните функции на Тимър имат вида:

$$f_0(u) = (1 - 2u)(1 - u)^2 = -2u^3 + 5u^2 - 4u + 1,$$

$$f_1(u) = 4u(1 - u)^2 = 4u^3 - 8u^2 + 4u,$$

$$f_2(u) = 4u^2(1 - u) = -4u^3 + 4u^2,$$

$$f_3(u) = (2u - 1)u^2 = 2u^3 - u^2, \quad u \in [0, 1].$$

Основни функции на Тимър

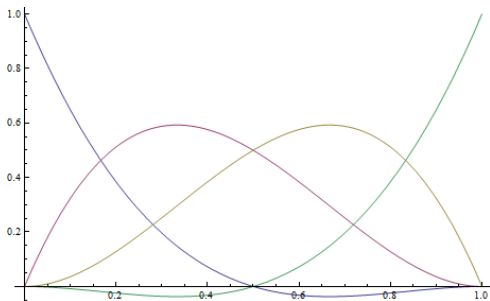
Основните полиномни функции на Тимър притежават част от свойствата на полиномите на Бернщайн (функциите на Безие-Бернщайн), а именно:

- $\sum_{i=0}^3 f_i(u) = 1$;
- $f_0(0) = 1$, $f_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$); $f_i(1) = 0$ ($i = 0, 1, 2$), $f_3(1) = 1$;
- $f_i(u)$ са линейно независими ($i = 0, 1, 2, 3$).

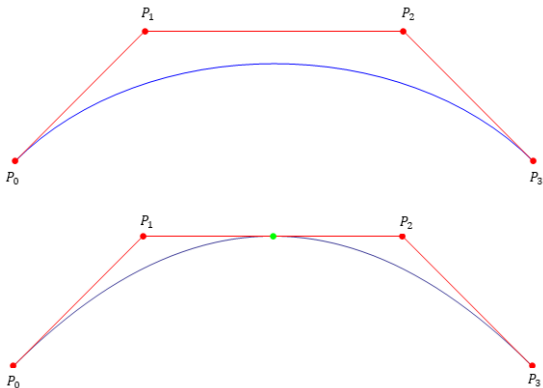
Поради първото свойство, кривите на Тимър, също като кривите на Безие, са афинно инвариантни, а поради второто минават през първата и последната си контролна точка.

Една от основните разлики между функциите на Тимър и полиномите на Бернщайн е, че не всички от функциите на Тимър приемат само неотрицателни стойности за $u \in [0; 1]$ (знаково променливи са $f_0(u)$ и $f_3(u)$, докато $f_1(u) \geq 0$ и $f_2(u) \geq 0$ за всяко $u \in [0; 1]$). Поради тази причина кривата на Тимър не лежи изцяло в изпъкналата обвивка на контролния си полигон.

Графиките на функциите на Тимър: f_0 в синьо, f_1 във виолетово, f_2 в жълто и f_3 в зелено.



На първата картинка е изобразена кубична крива на Безие с контролен полигон $P_0(-8, 0)$, $P_1(-4, 4)$, $P_2(4, 4)$, $P_3(8, 0)$. На втората картинка е изобразена кубична крива на Тимър със същия контролен полигон. Забележете как кривата на Тимър минава през средата на контролната отсечка P_1P_2 , т.е. точката $(0, 4)$ (зелената точка).



Връзка между кривите на Тимър и кривите на Безие

Следващите формули изясняват аналитично зависимостта между основните полиномни функции на Тимър $f_i(u)$ и полиномите на Бернщайн $B_{3,i}(u)$ от трета степен:

$$\begin{aligned} f_0(u) &= B_{3,0}(u) - \frac{1}{3}B_{3,1}(u), & f_1(u) &= \frac{4}{3}B_{3,1}(u), \\ f_2(u) &= \frac{4}{3}B_{3,2}(u), & f_3(u) &= B_{3,3}(u) - \frac{1}{3}B_{3,2}(u). \end{aligned} \quad (1)$$

Следователно, ако контролните точки P_0 , P_1 , P_2 и P_3 определят кубична крива на Тимър, то точките

$$Q_0 = P_0, \quad Q_1 = \frac{1}{3}[4P_1 - P_0], \quad Q_2 = \frac{1}{3}[4P_2 - P_3], \quad Q_3 = P_3 \quad (2)$$

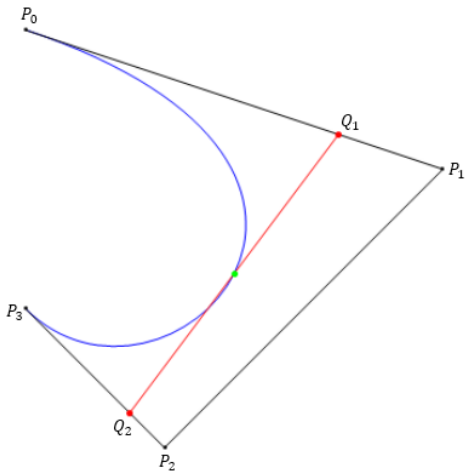
задават същата крива като крива на Безие от трета степен.

Обратно, ако контролните точки P_0 , P_1 , P_2 и P_3 задават кубична крива на Безие $C(u)$, то точките

$$Q_0 = P_0, \quad Q_1 = \frac{1}{4}[P_0 + 3P_1], \quad Q_2 = \frac{1}{4}[3P_2 + P_3], \quad Q_3 = P_3 \quad (3)$$

задават същата крива като кубична крива на Тимър. Забележете, че точките Q_1 и Q_2 съвпадат с две от трите нови контролни точки, които се получават при увеличаването на степента на кривата на Безие $C(u)$ от 3-та на 4-та.

На чертежа е изобразена кубична полиномна крива от трета степен. Контролните точки P_0 , P_1 , P_2 и P_3 задават кривата като крива на Безие, а точките P_0 , Q_1 , Q_2 и P_3 задават същата крива като крива на Тимър. Зелената точка е средата на контролното рамо Q_1Q_2 .



Производни на крива на Тимър в двата ѝ края

Използвайки зависимостта между контролните точки на крива на Тимър и съответната ѝ крива на Безие (2), чрез познатите формули за диференциране на крива на Безие, можем да получим формули за пресмятане на производните (допирателните вектори) на крива на Тимър в двата ѝ края, т.е. при $u = 0$ и $u = 1$. За произволна крива на Тимър $C(u)$, определена от контролните точки P_0, P_1, P_2, P_3 , са сила се следните равенства:

$$C'(0) = 4[P_1 - P_0], \quad C'(1) = 4[P_3 - P_2]. \quad (4)$$

Тези равенства показват, че допирателни вектори в двата края на дадена крива на Тимър имат по-голяма дължина в сравнение с тези на крива на Безие, определена от същите контролни точки (при кривата на Безие коефициентът пред скобите е 3). Както ще видим и по-нататък, увеличаването на дължината на допирателния вектор кара кривата да се издължава по посоката на този вектор.

Кубични криви на Бол

- Разработени от Алън Бол за British Aircraft Corporation през 1974 г. Задават се чрез контролен полигон от четири контролни точки.
- Основните полиномни функции на Бол имат вида:

$$\begin{aligned}f_0(u) &= (1 - u)^2, & f_1(u) &= 2u(1 - u)^2, \\f_2(u) &= 2u^2(1 - u), & f_3(u) &= u^2, \quad u \in [0; 1].\end{aligned}$$

- Минават през първата и последната си контролна точка, т.е. $C(0) = P_0$ и $C(1) = P_3$.
- Допират се до първото и последното си контролно рамо, като производните в двата края се пресмятат чрез $C'(0) = 2[P_1 - P_0]$, $C'(1) = 2[P_3 - P_2]$.
- Изпълнено е свойството $f_i(u) \geq 0$, $i = 0, 1, 2, 3$. Следователно кривата на Бол лежи изцяло в изпъкналата обвивка на контролните си точки.

Поради

$$f_0(u) = B_{2,0}(u), \quad f_1(u) = \frac{3}{2}B_{3,1}(u),$$

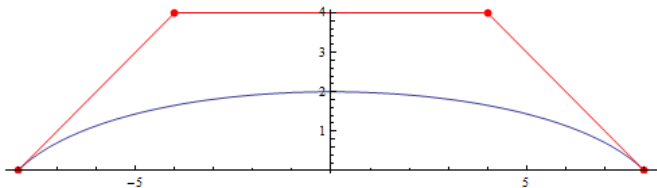
$$f_2(u) = \frac{3}{2}B_{3,2}(u), \quad f_3(u) = B_{2,2}(u),$$

кубичната крива на Бол $C(u)$ може да се запише във вида

$$C(u) = B_{2,0}(u)P_0 + B_{3,1}(u)P_1 + B_{3,2}(u)P_2 + B_{2,2}(u)P_3.$$

Тъй като $f_1(u) + f_2(u) = B_{2,1}(u)$, в случая $P_1 = P_2$, кривата на Бол $C(u)$ представлява крива на Безие от втора степен.

Кубична крива на Бол с контролен полигон $P_0(-8, 0)$, $P_1(-4, 4)$, $P_2(4, 4)$, $P_3(8, 0)$.



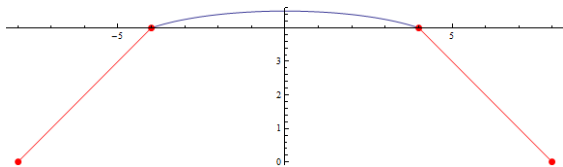
Криви на Оувърхаузър (единични криви от сплайните на Катмул-Ром)

- Разработени от Албърт Оувърхаузър за Ford Motor Company.
- Дефинират се чрез следните основни функции:

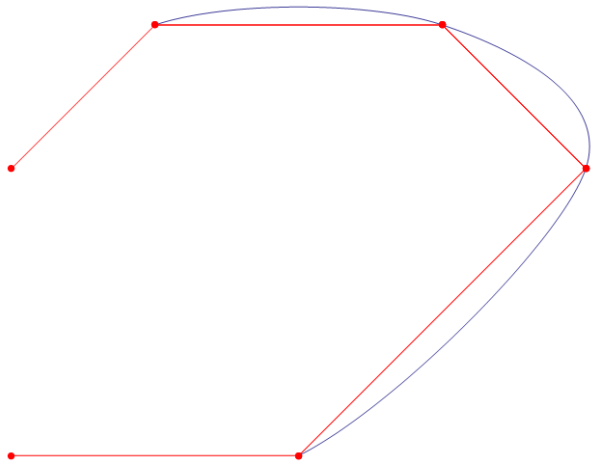
$$f_0(u) = -\frac{u}{2} + u^2 - \frac{u^3}{2}, \quad f_1(u) = 1 - \frac{5u^2}{2} + \frac{3u^3}{2},$$
$$f_2(u) = \frac{u}{2} + 2u^2 - \frac{3u^3}{2}, \quad f_3(u) = -\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{2}, \quad u \in [0; 1].$$

- Кубични криви, които минават през втората (за $u = 0$) и третата си контролна точка (за $u = 1$).
- Могат да бъдат получени и чрез линейно съчетаване на две параболи, т.е. чрез формулата $(1 - u)C_1(u) + uC_2(u)$, където C_1 е парабола, минаваща през точките P_0, P_1 и P_2 , а C_2 е парабола през точките P_1, P_2, P_3 .
- Сплайните на Катмул-Ром са изградени от последователно свързани с C^1 -непрекъснатост криви на Оувърхаузър.

Крива на Оувърхаузър с контролен полигон $P_0(-8, 0)$, $P_1(-4, 4)$, $P_2(4, 4)$, $P_3(8, 0)$.

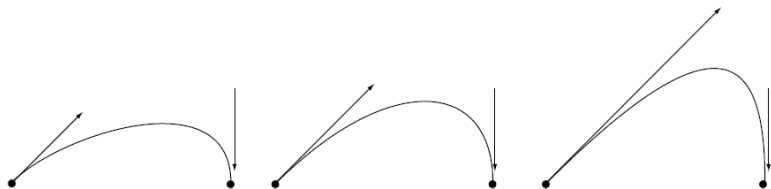


Слайн на Катмул-Ром, конструиран чрез последователно съединяване на 3 дъги на Оувърхаузър.



Криви, зададени чрез точки и допирателни вектори

Друг подход за зададени на криви е чрез точки и допирателни вектори, т.е. точки, през които кривата минава, и допирателните вектори в тези точки. Това дава възможност за интуитивен контрол върху формата на кривата (например, чрез посоката и дължината на допирателния вектор).



Такъв подход използват кривите на Ермит, чиито основни полиномни функции са полиномите на френския математик Чарлз Ермит, открити през 70-те години на 19-ти век. Кривите на Ермит са разработени от Джеймс Фъргюсън в Боинг през началото на 60-те години на миналия век за конструиране на сегменти от повърхнини (пачове).

Кубични криви на Ермит

Крива на Ермит от трета степен $C(u)$ ($u \in [0; 1]$) се определя от точките $P_0 = C(0)$ и $P_1 = C(1)$ и допирателните вектори $\vec{v}_0 = C'(0)$ в точката P_0 и $\vec{v}_1 = C'(1)$ в точката P_1 .

Уравнението на тази крива има вида

$$C(u) = h_0(u)P_0 + h_1(u)P_1 + h_2(u)\vec{v}_0 + h_3(u)\vec{v}_1, \quad (5)$$

където функциите

$$\begin{aligned} h_0(u) &= 2u^3 - 3u^2 + 1; & h_1(u) &= 3u^2 - 2u^3 = 1 - h_0(u); \\ h_2(u) &= u^3 - 2u^2 + u; & h_3(u) &= u^3 - u^2 \end{aligned} \quad (6)$$

са полиномите на Ермит от трета степен.

Графиките на полиномите на Ермит от трета степен.

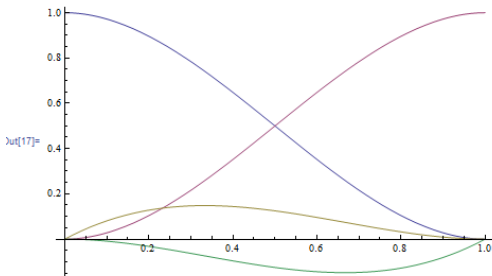
$$h0[u_] := 2 u^3 - 3 u^2 + 1$$

$$h1[u_] := -2 u^3 + 3 u^2$$

$$h2[u_] := u^3 - 2 u^2 + u$$

$$h3[u_] := u^3 - u^2$$

```
In[17]:= Plot[{h0[u], h1[u], h2[u], h3[u]}, {u, 0, 1}]
```



Матричният запис на уравнението (5) на кубичната крива на Ермит $C(u)$ е следният

$$C(u) = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Връзка между кубични криви на Ермит и криви на Безие

Нека $C(u)$ е кубична крива на Ермит, определена от началната точка $P_0 = C(0)$, крайната точка $P_1 = C(1)$ и допирателните вектори в тези точки, съответно $\vec{v}_0 = C'(0)$ и $\vec{v}_1 = C'(1)$. За да намерим уравнението на Безие на тази крива (т.е. да я зададем като крива на Безие), можем да използваме следните равенства, които изразяват зависимостта между полиномите на Ермит и тези на Безие-Бернщайн

$$\begin{aligned}h_0(u) &= B_{3,0}(u) + B_{3,1}(u), & h_1(u) &= B_{3,2}(u) + B_{3,3}(u) \\h_2(u) &= \frac{1}{3}B_{3,1}(u), & h_3(u) &= -\frac{1}{3}B_{3,2}(u).\end{aligned}\tag{8}$$

След заместване на горните равенства в уравнението (5) и преобразуване, достигаме до

$$C(u) = B_{3,0}(u)P_0 + B_{3,1}(u)(P_0 + \frac{1}{3}\vec{v}_1) + B_{3,2}(u)(P_1 - \frac{1}{3}\vec{v}_2) + B_{3,3}(u)P_1.$$

Следователно контролните точки на $C(u)$ като крива на Безие са: P_0 , $P_0 + \frac{1}{3}\vec{v}_0$, $P_1 - \frac{1}{3}\vec{v}_1$, P_1 .

Криви на Ермит от други степени

Нечетните степени са по-подходящи от четните за задаване на криви на Ермит, тъй като полином от нечетна степен се определя от четен брой коефициенти, които при кривите на Ермит са две точки от кривата (обикновено първа и последна) и производните в тези точки. При криви на Ермит от 3-та степен това са първите производни, а за криви от по-високи степени са необходими и производни от по-висок ред. Недостатъкът на това е, че използването на производни от по-висок ред намалява интуитивния контрол върху формата на кривата.

Например, за задаване на крива на Ермит от 5-та степен $C(u)$ са необходими следните данни: $C(0) = P_0$, $C(1) = P_1$, $C'(0) = \vec{v}_0$, $C'(1) = \vec{v}_1$, $C''(0) = \vec{w}_0$, $C''(1) = \vec{w}_1$.

По аналогичен начин криви на Ермит могат да бъдат задавани чрез вътрешни точки за кривата и с производни в такива точки.

Криви на Ермит от втора степен

За задаване на крива на Ермит от втора степен $C(u)$ са необходими две точки от кривата (обикновено първата и последната) и първата производна в една от тези точки (например, в първата), т. е. $C(0) = P_0$, $C(1) = P_1$ и $C'(0) = \vec{v}_0$. Такава крива се определя от уравнението

$$C(u) = (1 - u^2)P_0 + u^2P_1 + (u - u^2)\vec{v}_0. \quad (9)$$

Следователно първата производна на $C(u)$ в произволна нейна точка е

$$C'(u) = -2uP_0 + 2uP_1 + (1 - 2u)\vec{v}_0 = 2u[P_1 - P_0] + (1 - 2u)\vec{v}_0. \quad (10)$$

Тогава $C'(1) = 2[P_1 - P_0] - \vec{v}_0$.

Сплайни, базирани на ермитови криви

Криви на Ермит могат да бъдат последователно съединявани за получаването на сплайни.

Криви на Ермит от трета степен могат да бъдат съединени така, че в точките на съединяване на съществува C^2 -непрекъснатост, а криви от втора степен могат да бъдат съединени с C^1 -непрекъснатост.

Друг начин за конструиране на сплайни чрез криви на Ермит се използва при задаването на т.нар. кардинални сплайни и един техен частен случай, известен като сплайни на Катмул-Ром.

Кардинални сплайни

Нека са дадени n на брой точки P_1, P_2, \dots, P_n , които са разделени в групи по четири точки така, че първите три точки от всяка група, без първата, да повтарят последните три точки от предишната група:

$$[P_1 P_2 P_3 P_4], [P_2 P_3 P_4 P_5], [P_3 P_4 P_5 P_6], \dots \quad (11)$$

Сплайн на Катмул-Ром представлява композитна крива, минаваща през точките P_2, P_3, \dots, P_{n-1} , т.е. през всички точки без първата и последната P_1 и P_n , която е конструирана чрез последователно съединяване на ермитови сегменти, свързани с C^1 -непрекъснатост. Всяка от горните групи от по четири точки определя един ермитов сегмент от трета степен.

Нека означим първия сегмент с $C_1(u)$. Той представлява кубична крива на Ермит, минаваща през точките $P_2 = C_1(0)$ и $P_3 = C_1(1)$, като допирателните вектори в тези точки са съответно $C_1'(0) = s[P_3 - P_1]$ и $C_1'(1) = s[P_4 - P_2]$, където s е положителен параметър (обикновено $s \in [0; 1]$), с чиято роля ще се запознаем на следващия слайд.

Кардинални сплайни

Следващият ермитов сегмент означаваме с $C_2(u)$. Той се определя от условията: $C_2(0) = P_3$, $C_2(1) = P_4$, $C_2'(0) = s[P_4 - P_2]$ и $C_2'(1) = s[P_5 - P_3]$.

Аналогично се конструират и следващите сегменти.

Оттук се вижда, че C_1 и C_2 се съединяват в точката P_3 , като за тази точка е изпълнено $C_1'(1) = C_2'(0) = s[P_4 - P_2]$. Последното условие показва, че ермитовите сегменти C_1 и C_2 са съединени с C^1 -непрекъснатост.

Реалният параметър s контролира дължината на допирателния вектор и оттам формата на кривата. Удължаването на допирателния вектор кара кривата да се издължава ("отпуска") по посоката на този вектор и обратно – намаляването на дължината на допирателния вектор "опъва" кривата и я отдалечава от вектора. Ако допирателният вектор е нулев, т.е. при $s = 0$, се получава права линия.

Кардинални сплайни и сплайни на Катмул-Ром

Параметърът s може да бъде заменен с друг параметър T , определен от $T = 1 - 2s$ (откъдето $s = \frac{1-T}{2}$), наречен напрежение (опъване на кривата)).

При $T = 0$ (т.е. при $s = \frac{1}{2}$) се получават сплайните на Катмул-Ром, които представляват последователно съединени с C^1 -непрекъснатост криви на Оувърхаузър.

Сплайни на Кунс

Представяват композитни криви, чийто сегменти са полиномни криви от n -та степен, определени с контролен полигон от $n + 1$ точки. В точките на съединяване на сегментите съществува C^{n-1} -непрекъснатост. Получената композитна крива, както и изграждащите я сегменти, не минават през началната или крайната си контролна точка.

Сплайните от трета степен от този вид са въведени първоначално от Стивън Кунс (професор от МИТ).

Нека разгледаме този подход за втора степен ($n = 2$), при което ще изискваме в точките на съединяване да съществува C^1 -непрекъснатост. Нека са дадени контролните точки P_0, P_1, \dots, P_n . Всяка дъга $C_i(u)$ от сплайна, като полиномна крива от втора степен (дъга от парабола), ще се определя чрез три последователни точки и нека това са P_{i-1}, P_i и P_{i+1} . Нека означим неизвестните начална и крайна точка на този сегмент съответно с Q_i и Q_{i+1} . Това са точките, в които този сегмент се съединява съответно с предходния и следващия.

Нека $C_i(u) = a(u)P_{i-1} + b(u)P_i + c(u)P_{i+1}$, където $a(u)$, $b(u)$ и $c(u)$ са полиноми от втора степен, т.е. $a(u) = a_2u^2 + a_1u + a_0$, $b(u) = b_2u^2 + b_1u + b_0$, $c(u) = c_2u^2 + c_1u + c_0$.

Ще намерим неизвестните коефициенти на тези полиноми от следните две условия:

1) Два последователни сегмента се съединяват в обща точка с C^1 -непрекъснатост.

Нека разгледаме два последователни сегмента $C_i(u)$ и $C_{i+1}(u)$ от сплайна, определени съответно от точките P_{i-1} , P_i , P_{i+1} и P_i , P_{i+1} , P_{i+2} , които се съединяват в точката Q_{i+1} . Тогава имаме:

$$C_i(1) = C_{i+1}(0) = Q_{i+1} \quad C'_i(1) = C'_{i+1}(0),$$

т.е.

$$a(1)P_{i-1} + b(1)P_i + c(1)P_{i+1} = a(0)P_i + b(0)P_{i+1} + c(0)P_{i+2}$$

$$a'(1)P_{i-1} + b'(1)P_i + c'(1)P_{i+1} = a'(0)P_i + b'(0)P_{i+1} + c'(0)P_{i+2}.$$

Тъй като точките $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$ са произволни, то приравнявайки коефициентите пред тях в последните две равенства, достигаме до условията:

$$\begin{aligned}a(1) &= 0, & a'(1) &= 0 \\b(1) &= a(0), & b'(1) &= a'(0) \\c(1) &= b(0), & c'(1) &= b'(0) \\c(0) &= 0, & c'(0) &= 0.\end{aligned}\tag{12}$$

2) Разделяне на единицата. Изискваме кривата да бъде инвариантна относно координатни трансформации. Следователно

$$a(u) + b(u) + c(u) = 1.\tag{13}$$

Чрез условията 1) и 2) намираме:

$$a(u) = \frac{1}{2}(u-1)^2, \quad b(u) = \frac{1}{2}(-2u^2 + 2u + 1), \quad c(u) = \frac{u^2}{2}.\tag{14}$$

Тогава всяка дъга от сплайна има вида

$$C_i(u) = \frac{1}{2}(u-1)^2 P_{i-1} + \frac{1}{2}(-2u^2 + 2u + 1)P_i + \frac{u^2}{2}P_{i+1}. \quad (15)$$

За началната Q_i и крайната точка Q_{i+1} на сегмента $C_i(u)$ получаваме съответно:

$$Q_i = C_i(0) = \frac{1}{2}[P_{i-1} + P_i], \quad Q_{i+1} = C_i(1) = \frac{1}{2}[P_i + P_{i+1}],$$

т.е. те са средите съответно на контролните отсечки $P_{i-1}P_i$ и P_iP_{i+1} .
Първата производна на сегмента е

$$C'_i(u) = (u-1)P_{i-1} + (1-2u)P_i + uP_{i+1}.$$

Тогава допирателните вектори в началната и крайната точка на сегмента са съответно

$$C'_i(0) = P_i - P_{i-1}, \quad C'_i(1) = P_{i+1} - P_i,$$

т.е. съвпадат с първата и последната контролна отсечка на сегмента (сравнете със случая на криви на Безие, когато са колинеарни на тези отсечки).

По аналогичен начин могат да бъдат построени сегменти от по-висока степен. Например за кубични сплайни (сплайни на Кунс) всеки сегмент ще се определя от четири контролни точки P_{i-1} , P_i , P_{i+1} и P_{i+2} и полиномните функции

$$\begin{aligned} a(u) &= \frac{1}{6}(1-u)^3, & c(u) &= \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1) \\ b(u) &= \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4), & d(u) &= \frac{u^3}{6}, \end{aligned}$$

т.е. ще има вида

$$C_i(u) = a(u)P_{i-1} + b(u)P_i + c(u)P_{i+1} + d(u)P_{i+2}.$$

В този случай последователните сегменти ще бъдат съединени с C^2 -непрекъснатост.

Началната и крайната точка на сегмента са

$$\begin{aligned} Q_i &= C_i(0) = \frac{1}{6}[P_{i-1} + 4P_i + P_{i+1}], \\ Q_{i+1} &= C_i(1) = \frac{1}{6}[P_i + 4P_{i+1} + P_{i+2}]. \end{aligned}$$

Отбелязваме, че тук тези точки нямат същата геометрична интерпретация като при сплайните от втора степен.

За първата и втората производна имаме съответно:

$$C'_i(u) = -\frac{1}{2}(1-u)^2 P_{i-1} + \frac{1}{2}(3u^2 - 4u)P_i + \frac{1}{2}(2u + 1 - 3u^2)P_{i+1} + \frac{u^2}{2}P_{i+2},$$

$$C''_i(u) = (1-u)P_{i-1} + (3u-2)P_i + (1-3u)P_{i+1} + uP_{i+2}.$$

Следователно

$$C'_i(0) = \frac{1}{2}[P_{i+1} - P_{i-1}], \quad C'_i(1) = \frac{1}{2}[P_{i+2} - P_i],$$

$$C''_i(0) = P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1}, \quad C''_i(1) = P_i - 2P_{i+1} + P_{i+2}.$$

Нека разгледаме пример за сплайн на Кунс от втора степен, състоящ се от две дъги и определен от точките $P_0(-1, 0)$, $P_1(-1, 1)$, $P_2(0, 2)$, $P_3(1, 1)$. Първите три точки определят първия сегмент $C_0(u)$ на сплайна, а последните три – втория, $C_1(u)$. Ще намерим параметричния вид на двата сегмента.

$$\begin{aligned}C_0(u) &= \frac{1}{2}(u-1)^2(-1, 0) + \frac{1}{2}(-2u^2 + 2u + 1)(-1, 1) + \frac{u^2}{2}(0, 2) \\ &= \left(\frac{u^2}{2} - 1, u + \frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_1(u) &= \frac{1}{2}(u-1)^2(-1, 1) + \frac{1}{2}(-2u^2 + 2u + 1)(0, 2) + \frac{u^2}{2}(1, 1) \\ &= \left(u - \frac{1}{2}, -u^2 + u + \frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

Началната точка на първия сегмент е $Q_0 = C_0(0) = (-1, \frac{1}{2})$, точката на съединяване на двата сегмента е $Q_1 = C_0(1) = C_1(0) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ и крайната точка на втория сегмент е $Q_2 = C_1(1) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

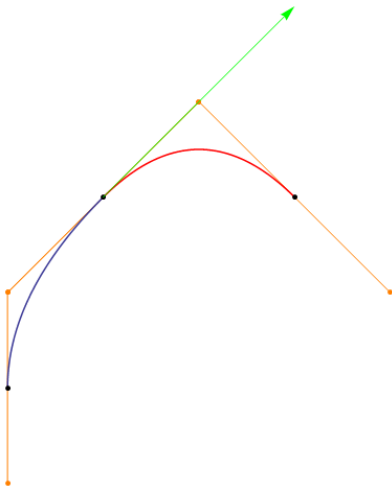
Първите производни на двата сегмента са

$$C'_0(u) = (u, 1), \quad C'_1(u) = (1, 1 - 2u).$$

Следователно в точката на съединяване Q_1 е изпълнено

$$C'_0(1) = C'_1(0) = (1, 1).$$

На долната фигура са изобразени първият сегмент в синьо, вторият в червено, контролните точки P_i и полигон в оранжево и допирателният вектор в точката на съединяване в зелено. Черните точки са съответно Q_0 , Q_1 и Q_2 (отляво надясно).



Интерполационна крива на Лагранж

Най-простият начин за построяване на полиномна крива, която интерполира (минава през) краен брой зададени точки, е чрез метода на френския математик Йозеф-Луи Лагранж (1736–1813).

Нека са дадени $n + 1$ точки P_0, P_1, \dots, P_n и ще търсим полиномна крива $C(u)$ от n -та степен, която минава през всички тези точки. Нека параметърът u на търсената крива се изменя в интервала $[0, 1]$, като $C(0) = P_0$ и $C(1) = P_n$.

Ще изберем стойности за u в $(0, 1)$ (вътрешни възли), означени с u_1, u_2, \dots, u_{n-1} , за които ще се получават и останалите точки, през които искаме да минава кривата, т.е. $C(u_i) = P_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), където сме означили $u_0 = 0$ и $u_n = 1$. Разстоянията между възлите могат да бъдат равни (равномерни възли) или различни (неравномерни възли). В случая на равномерно разположени възли стойностите u_1, u_2, \dots, u_{n-1} разделят интервала $[0, 1]$ на n равни части (т.е. $u_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$).

Нека разгледаме функциите (полиноми от n -та степен) $L_{n,i}(u)$ ($i = 0, 1, \dots, n$), дефинирани чрез

$$L_{n,i}(u) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{u - u_j}{u_i - u_j} = \frac{(u - u_0)(u - u_1) \dots (u - u_n)}{(u_i - u_0)(u_i - u_1) \dots (u_i - u_n)}, \quad (16)$$

които носят наименованието *полиноми на Лагранж*.

Както се вижда от горната формула, в числителя на i -тия полином от n -та степен липсва множителят $u - u_i$, а в знаменателя липсва $u_i - u_i$ (който би анулирал знаменателя).

Тогава $L_{n,i}(u_k) = 0$ при $k \neq i$ и $L_{n,i}(u_k) = 1$ при $k = i$.

Освен това

$$\sum_{i=0}^n L_{n,i}(u) = 1. \quad (17)$$

Тогава кривата от n -та степен, минаваща през точките P_0, P_1, \dots, P_n , се определя от

$$C(u) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(u)P_i \quad (18)$$

и се нарича *интеполагционна крива на Лагранж*.

Нека разгледаме пример за намиране на интерполационната крива на Лагранж $C(u)$, минаваща през точките $P_0(0, 0)$, $P_1(1, 2)$ и $P_2(3, 2)$. Търсената крива ще бъде от втора степен (дъга от парабола). Ще разгледаме най-простия случай за възлите – равномерни възли. Чрез крайните стойности от интервала $[0, 1]$ ще интерполираме първата и последната точка, т.е. $C(0) = P_0$ и $C(1) = P_2$. Остава да изберем още една стойност от $(0, 1)$, която да съответства на точката P_1 . Тъй като избрахме да работим с равномерни възли, тази стойност трябва да е равноотдалечена от $u_0 = 0$ и $u_2 = 1$ (да дели интервала на две равни части). Следователно търсената стойност е $u_1 = \frac{1}{2}$.

И така, построяване полиномите на Лагранж $L_{2,i}(u)$ ($i = 0, 1, 2$) по възлите $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{2}$ и $u_2 = 1$

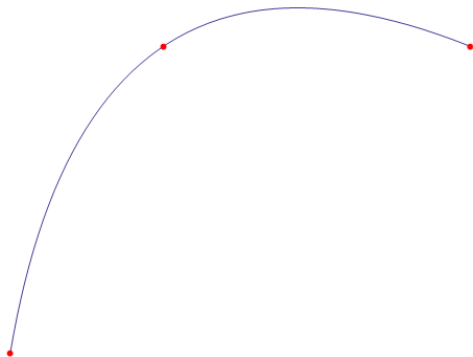
$$\begin{aligned}L_{2,0}(u) &= \frac{(u-\frac{1}{2})(u-1)}{(0-\frac{1}{2})(0-1)} = 2u^2 - 3u + 1, \\L_{2,1}(u) &= \frac{(u-0)(u-1)}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)} = -4u^2 + 4u, \\L_{2,2}(u) &= \frac{(u-0)(u-\frac{1}{2})}{(1-0)(1-\frac{1}{2})} = 2u^2 - u.\end{aligned}\tag{19}$$

Тогава търсената крива има уравнение

$$C(u) = \sum_{i=0}^2 L_{2,i}(u)P_i = L_{2,0}(u)P_0 + L_{2,1}(u)P_1 + L_{2,2}(u)P_2.\tag{20}$$

След разписване на горното уравнение, намираме параметричната форма на кривата $C(u) = (2u^2 + u, 6u - 4u^2)$.

На следващата фигура е изобразена кривата, която получихме, и трите точки, през които тя минава.



Разстоянията между възлите контролират дължините на дъгите между точките, през които кривата минава. По-голямо разстояние между два последователни възела ще доведе до по-дълга дъга от кривата между двете последователни точки, които се получават за тези възли.

В случай на неравномерни възли, по-"опънати" дъги между точките (дъги с по-малка кривина) се получават, ако разстоянията между възлите са равни на разстоянията между точките, които интерполират. Ако първият възел означим с u_0 , а следващите с $u_1 = u_0 + \Delta_0$, $u_2 = u_1 + \Delta_1$ и т.н., то $\Delta_0 = |P_1 - P_0|$, $\Delta_1 = |P_2 - P_1|$ и т.н. (параметърът вече не се изменя в интервала $[0, 1]$).

Тогава полиномите на Лагранж от втора степен имат вида:

$$L_{2,0}(u) = \frac{(u-\Delta_0)(u-\Delta_0-\Delta_1)}{\Delta_0(\Delta_0+\Delta_1)}, \quad L_{2,1}(u) = -\frac{u(u-\Delta_0-\Delta_1)}{\Delta_0\Delta_1},$$
$$L_{2,2}(u) = \frac{u(u-\Delta_0)}{\Delta_1(\Delta_0+\Delta_1)}.$$

В разгледания от нас пример $\Delta_0 = \Delta_1 = \frac{1}{2}$.

Алгоритъм на Айткен-Невил за построяване на интерполационната крива на Лагранж

Чрез този метод, разработен от новозеландския математик Александър Айткен (1895–1967) и английския Ерик Невил (1889–1961), интерполационната крива на Лагранж $C_{n,i}(u)$ от n -та степен се получава по следната формула

$$C_{n,i}(u) = \frac{u_{i+n} - u}{u_{i+n} - u_i} C_{n-1,i}(u) + \frac{u - u_i}{u_{i+n} - u_i} C_{n-1,i+1}(u). \quad (21)$$

От горната формула се вижда, че кривата от n -та степен $C_{n,i}(u)$ се пресмята чрез две криви от $(n-1)$ -ва степен $C_{n-1,i}(u)$ и $C_{n-1,i+1}(u)$, всяка от които се пресмята чрез две криви от $(n-2)$ -ра степен и т.н. (зададените точки P_0, P_1, \dots, P_n се приемат за криви от нулева степен).

Следователно за получаване на кривата от n -та степен първо се пресмятат всички необходими криви от 1-ва степен (n на брой), след това от 2-ра степен ($n-1$ на брой) и т.н., като се използва формула (21).

Нека намерим интерполационната крива на Лагранж от 2-ра степен, минаваща през точките $P_0(0, 0)$, $P_1(1, 2)$ и $P_2(3, 2)$ с равномерни възли $u_0 = 0$, $u_1 = 0.5$, $u_2 = 1$, от предния пример чрез алгоритъма на Айткен-Невил.

Пресмятаме двете криви от 1-ва степен (отсечки):

$$C_{1,0}(u) = \frac{u_1-u}{u_1-u_0}P_0 + \frac{u-u_0}{u_1-u_0}P_1 = \frac{0.5-u}{0.5-0}P_0 + \frac{u-0}{0.5-0}P_1 = (2u, 4u),$$

$$C_{1,1}(u) = \frac{u_2-u}{u_2-u_1}P_1 + \frac{u-u_1}{u_2-u_1}P_2 = \frac{1-u}{1-0.5}P_1 + \frac{u-0.5}{1-0.5}P_2 = (4u - 1, 2).$$

Тогава кривата на Лагранж се получава чрез

$$\begin{aligned}C_{2,0}(u) &= \frac{u_2-u}{u_2-u_0}C_{1,0}(u) + \frac{u-u_0}{u_2-u_0}C_{1,1}(u) = \frac{1-u}{1-0}C_{1,0}(u) + \frac{u-0}{1-0}C_{1,1}(u) \\ &= (2u^2 + u, 6u - 4u^2).\end{aligned}$$

Литература

- М. Манев. *Геометрия за информатици*. Архимед, 2007.
- М. Манев, М. Теофилова, А. Христов, Д. Грибачева. *Ръководство за решаване на задачи по геометрия за информатици*. Университетско издателство на ПУ, 2009.
- L. Piegel, W. Tiller. *The NURBS Book*, 2. ed. Springer, 1997.
- D. Salomon. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. Springer, 2006.
- D. Marsh. *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, 2. ed. Springer, 2005.
- T. W. Sederberg, *Computer Aided Geometric Design*, <http://tom.cs.byu.edu/~557/text/cagd.pdf>.
- <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/>