Лекция 2. Гладко съединяване на криви

Геометричен дизайн

доц. д-р Марта Теофилова

специалност Софтуерни технологии и дизайн, II курс,
задочно обучение

Мотивация

- Повече форми са твърде сложни, за да бъдат визуализирани чрез една единствена дъга от крива линия. Поради тази причина възниква нуждата от използване на композитни криви, конструирани чрез последователно съединяване на сегменти от криви.
- Композитни криви се използват в графичния и промишлен дизайн, анимацията и др.
- Съединяването на последователните кривинни сегменти в повечето случаи се налага да бъде гладко. Гладкостта на съединяването се "контролира" от производните на двете дъги в точката им на съединяване.

Параметрична непрекъснатост

Определение

Нека са дадени кривите (кривинните сегменти) $\vec{f}(u)$ и $\vec{g}(v)$, които се съединяват в точка M. Това означава, че съществува стойност u_0 от дефиниционното множество на параметъра u на кривата $\vec{f}(u)$ и стойност v_0 от дефиниционното множество на параметъра v на кривата $\vec{g}$ такива, че

$$\vec{f}(u_0) = \vec{g}(v_0) = M. \tag{1}$$

Условието (1) е условие за C^0-непрекъснатост, т.е. параметрична непрекъснатост от най-нисък клас (най-слаби условия).

Типовете параметрична непрекъснатост се означават с C^k, където естественото число k дава информация за реда (класа) на непрекъснатост (гладкостта на съединяването).

Определение

Кривите $\vec{f}(u)$ и $\vec{g}(v)$, съединяващи се в точката $M = \vec{f}(u_0) = \vec{g}(v_0)$, са C^k-непрекъснати, ако съответните производни до k-ти ред включително на двете криви, пресметнати в точката на съединяване, са равни, т.е.

$$\vec{f}^{\,(i)}(u_0) = \vec{g}^{\,(i)}(v_0), \qquad 1 \leq i \leq k. \tag{2}$$

Определението показва, че двете криви са C^k-непрекъснати, ако производните от 1-ви, 2-ри и т.н. до k-ти ред, включително, на едната крива за точката на съединяване съвпадат с производните от съотвения ред на другата крива за точката на съединяване.

Определение

Кривите $\vec{f}(u)$ *и* $\vec{g}(v)$*, съединяващи се в точката* $M = \vec{f}(u_0) = \vec{g}(v_0)$*, са* C^1*-непрекъснати, ако първите производни на двете криви, пресметнати в точката на съединяване, са равни, т.е. ако*

$$\dot{\vec{f}}(u_0) = \dot{\vec{g}}(v_0). \tag{3}$$

Определение

Кривите $\vec{f}(u)$ *и* $\vec{g}(v)$*, съединяващи се в точката* $M = \vec{f}(u_0) = \vec{g}(v_0)$*, са* C^2*-непрекъснати, ако са* C^1*-непрекъснати и вторите производни на двете криви, пресметнати в точката на съединяване, са равни, т.е. ако*

$$\ddot{\vec{f}}(u_0) = \ddot{\vec{g}}(v_0). \tag{4}$$

Кривинна непрекъснатост

Определение

Кривите $\vec{f}(u)$ и $\vec{g}(v)$, съединяващи се в точката $M = \vec{f}(u_0) = \vec{g}(v_0)$, са кривинно непрекъснати ($\varkappa$-непрекъснати), ако в точката им на съединяване кривините на двете криви съвпадат, т.е.

$$\varkappa_f(u_0) = \frac{|\dot{\vec{f}}(u_0) \times \ddot{\vec{f}}(u_0)|}{|\dot{\vec{f}}(u_0)|^3}, \qquad \varkappa_g(v_0) = \frac{|\dot{\vec{g}}(v_0) \times \ddot{\vec{g}}(v_0)|}{|\dot{\vec{g}}(v_0)|^3},$$

$$\varkappa_f(u_0) = \varkappa_g(v_0). \tag{5}$$

Геометрична непрекъснатост

- Изследвана първоначално от Лайбниц, Кеплер и Понселе.
- Две криви са G^k непрекъснати в точката си на съединяване, ако i-тите им производни, $i \leq k$, пресметнати относно естествен параметър, са равни за тази точка.
- Условието производните да бъдат изчислени относно естествен параметър се е оказва незадължително. Съгласно еквивалентно определение, производните могат да бъдат пресметнати относно произволни параметризации, т.е. изискването е да съществуват подходящи параметризации и за двете криви такива, че i-тите им производни, $i \leq k$, в точката на съединяване да съвпадат.
- С други думи, G^k-непрекъснатост съществува, ако могат да бъдат намерени такива параметризации, че двете криви да бъдат C^k-непрекъснато съединени.
- По определение $G^0 \equiv C^0$. Нека разгледаме удобни за работа определения за G^1- и G^2-непрекъснатост.

Определение

Кривите $\vec{f}(u)$ *и* $\vec{g}(v)$*, съединяващи се в точката* $M = \vec{f}(u_0) = \vec{g}(v_0)$*, са* G^1*-непрекъснати, ако първите производни на двете криви, пресметнати в точката на съединяване, са еднопосочно колинеарни вектори, т.е. ако* $\dot{\vec{f}}(u_0) \upuparrows \dot{\vec{g}}(v_0)$*. Производните могат да имат различни дължини. Това показва, че всеки две* C^1*-непрекъснати криви са и* G^1*. Обратното обаче не винаги е вярно.*

Определение

[Дж. Нийсън] Кривите $\vec{f}(u)$ *и* $\vec{g}(v)$*, съединяващи се в точката* $M = \vec{f}(u_0) = \vec{g}(v_0)$*, са* G^2*-непрекъснати, ако са* C^1*-непрекъснати и векторът* $\ddot{\vec{f}}(u_0) - \ddot{\vec{g}}(v_0)$ *е колинеарен на* $\dot{\vec{f}}(u_0) = \dot{\vec{g}}(v_0)$*, т.е. съществува* $\lambda \in \mathbb{R}$ *така, че*

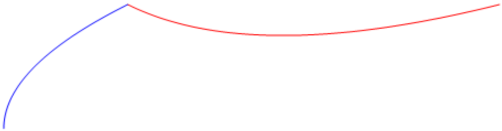
$$\ddot{\vec{f}}(u_0) - \ddot{\vec{g}}(v_0) = \lambda \dot{\vec{f}}(u_0) \tag{6}$$

Ако две криви са G^2*-непрекъснато съединени, то в точката им на свързване съществува и* $\varkappa$*-непрекъснатост. Центровете на кривина за двете криви в точката на съединяване съвпадат.*

Пример

Нека разгледаме равнинните криви $\vec{f}(u) = (u^2 + 2u, u^2 - u + 1)$ и $\vec{g}(v) = (v^2 - 1, v)$, $u, v \in [0; 1]$, които се съединяват в точката с координати $(0, 1) = \vec{f}(0) = \vec{g}(1)$.

```
f[u_] := {u^2 + 2 u, u^2 - u + 1};
g[v_] := {v^2 - 1, v};
pf = ParametricPlot[f[u], {u, 0, 1}, PlotStyle → Red];
pg = ParametricPlot[g[v], {v, 0, 1}, PlotStyle → Blue];
Show[pf, pg, Axes → False, PlotRange → All]
```



Както се вижда от графиката, в точката на съединяване на двете криви съществува единствено C^0-непрекъснатост (рогова точка, съединяването не е гладко).

C^1- и G^1-непрекъснатост

Нека сега разгледаме кривите $\vec{f}(u) = (u^2 + cu, -u^2 + du + 1)$, където c, d са произволни реални числа, и $\vec{g}(v) = (v^2 - 1, v)$, $u, v \in [0; 1]$. Двете криви се съединяват в точката $(0, 1) = \vec{f}(0) = \vec{g}(1)$.

Нека определим стойностите на c и d така, че в точката на съединяване да съществува: а) само G^1-непрекъснатост; б) C^1-непрекъснатост.

Пресмятаме първите производни (допирателните вектори) в произволна точка на двете криви, както следва:

$$\dot{\vec{f}}(u) = (2u + c, -2u + d), \qquad \dot{\vec{g}}(v) = (2v, 1). \tag{7}$$

Заместваме в (7) параметрите на двете криви със стойностите им, съответстващи на точката на съединяване, за да изследваме в нея (т.е. $u = 0$ и $v = 1$):

$$\dot{\vec{f}}(0) = (c, d), \qquad \dot{\vec{g}}(1) = (2, 1). \tag{8}$$

а) Съгласно условието за G^1-непрекъснатост, допирателните вектори на двете криви $\dot{\vec{f}}$ и $\dot{\vec{g}}$ за точката на съединяване трябва да бъдат еднопосочно колинеарни, т.е. трябва да съществува неотрицателно реално число x, различно от 1 и такова, че

$$\dot{\vec{f}}(0) = x\dot{\vec{g}}(1). \tag{9}$$

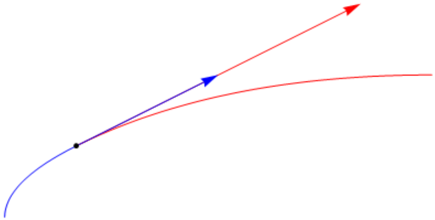
Замествайки от (8) в горното условие, получаваме

$$(c, d) = x(2, 1) \quad \Leftrightarrow \quad (c, d) = (2x, x) \quad \Leftrightarrow$$
$$c = 2x, \quad d = x, \quad x > 0, \quad x \neq 1.$$

Отбелязваме, че при $x = 1$ от (9) се получава условието за C^1-непрекъснатост.

Кривата $\vec{f}(u)$ (в червен цвят) при $x = 2$, т.е. за $c = 4$, $d = 2$, която е G^1-непрекъснато свързана (но не е C^1-непрекъснато съединена) с кривата $\vec{g}(v)$ (в син цвят) в точката $(0, 1)$. Показани са и допирателните вектори към двете криви в съответните цветове.

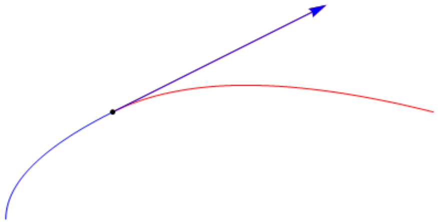
```
gr1 = Graphics[{Blue, Arrow[{{0, 1}, {2, 2}}]}];
gr2 = Graphics[{Red, Arrow[{{0, 1}, {4, 3}}]}];
p = Graphics[{PointSize[0.012], Point[{{0, 1}}]}];
pg = ParametricPlot[g[v], {v, 0, 1}, PlotStyle → Blue];
pf = ParametricPlot[{u^2 + 4 u, -u^2 + 2 u + 1}, {u, 0, 1},
   PlotStyle → Red];
Show[pg, pf, gr2, gr1, p, Axes → False, PlotRange → All]
```



б) Условието за C^1-непрекъснатост е $\dot{\vec{f}}(0) = \dot{\vec{g}}(1)$, което съгласно предходните ни изчисления е изпълнено точно, когато $(c, d) = (2, 1)$, т.е. при $c = 2$, $d = 1$.

Следователно кривите $\vec{f}(u) = (u^2 + 2u, -u^2 + u + 1)$ и $\vec{g}(v) = (v^2 - 1, v)$, $u, v \in [0; 1]$, са C^1-непрекъснато съединени в точката $(0, 1)$.

```
gr1 = Graphics[{Blue, Arrow[{{0, 1}, {2, 2}}]}];
gr2 = Graphics[{Red, Arrow[{{0, 1}, {2, 2}}]}];
p = Graphics[{PointSize[0.012], Point[{{0, 1}}]}];
pg = ParametricPlot[g[v], {v, 0, 1}, PlotStyle → Blue];
pf = ParametricPlot[{u^2 + 2 u, -u^2 + u + 1}, {u, 0, 1},
   PlotStyle → Red];
Show[pg, pf, gr2, gr1, p, Axes → False, PlotRange → All]
```



C^2- и G^2-непрекъснатост

Нека разгледаме кривите $\vec{f}(u) = (au^2 + 2u, bu^2 + u + 1)$, където a, b са произволни реални числа, различни от нула, и $\vec{g}(v) = (v^2 - 1, v)$, $u, v \in [0; 1]$, които се съединяват в точката $(0, 1)$.

От предходните ни изчисления се вижда, че в точката $(0, 1)$ съществува C^1-непрекъснатост, което ни позволява да изследваме за непрекъснатост от втори ред, т.е. за C^2- и G^2-непрекъснатост.

Пресмятаме вторите производни на двете криви в произволна тяхна точка:

$$\begin{aligned} &\dot{\vec{f}}(u) = (2au + 2, 2bu + 1), \qquad \ddot{\vec{f}}(u) = (2a, 2b), \\ &\dot{\vec{g}}(v) = (2v, 1), \qquad \ddot{\vec{g}}(v) = (2, 0). \end{aligned} \tag{10}$$

За точката на съединяване имаме $\ddot{\vec{f}}(0) = (2a, 2b)$ и $\ddot{\vec{g}}(1) = (2, 0)$.

Условието за C^2-непрекъснатост е равенство на вторите производни в точката на съединяване, т.е. за разглежданите от нас криви е $\ddot{\vec{f}}(0) = \ddot{\vec{g}}(1)$, откъдето трябва $(2a, 2b) = (2, 0)$. Следователно $a = 1$, $b = 0$.

Условието за G^2-непрекъснатост изисква разликата на вторите производни в точката на съединяване да е колинеарен вектор на първата производна на двете криви, пресметната за същата точка. За разглежданите от нас криви това условие е

$$\ddot{\vec{f}}(0) - \ddot{\vec{g}}(1) = y\dot{\vec{f}}(0) = y\dot{\vec{g}}(1), \tag{11}$$

където y е реално число, различно от нула. В случай, че $y = 0$ от горното условие следва $\ddot{\vec{f}}(0) = \ddot{\vec{g}}(1)$, т.е. имаме C^2-непрекъснатост.

След заместване в (11) имаме

$$(2a, 2b) - (2, 0) = y(2, 1),$$

което е изпълнено точно, когато $2a - 2 = 2y$ и $2b = y$. От последните две равенства следва $a = y + 1$, $b = \frac{y}{2}$, $y \neq 0$.

Кривинна непрекъснатост

Нека разгледаме отново кривите $\vec{f}(u) = (au^2 + 2u, bu^2 + u + 1)$, където a, b са произволни реални числа, различни от нула, и $\vec{g}(v) = (v^2 - 1, v)$, $u, v \in [0; 1]$, които се съединяват в точката $(0, 1)$.
Сега ще определим стойностите на a и b така, че в точката на съединяване да съществува кривинна непрекъснатост.
Използвайки получените досега резултати, намираме

$$\dot{\vec{f}}(0) \times \ddot{\vec{f}}(0) = (0, 0, 4b - 2a), \qquad \dot{\vec{g}}(1) \times \ddot{\vec{g}}(1) = (0, 0, -2).$$

Следователно

$$|\dot{\vec{f}}(0) \times \ddot{\vec{f}}(0)| = 2|2b - a|, \qquad |\dot{\vec{g}}(1) \times \ddot{\vec{g}}(1)| = 2.$$

Освен това $|\dot{\vec{f}}(0)| = |\dot{\vec{g}}(1)| = \sqrt{5}$.

Тогава намираме стойностите на кривините за двете дъги в точката им на съединяване:

$$\varkappa_f(0) = \frac{|\dot{\vec{f}}(0) \times \ddot{\vec{f}}(0)|}{|\dot{\vec{f}}(0)|^3} = \frac{2|2b-a|}{5\sqrt{5}}, \quad \varkappa_g(1) = \frac{|\dot{\vec{g}}(1) \times \ddot{\vec{g}}(1)|}{|\dot{\vec{g}}(1)|^3} = \frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

Следователно $\varkappa_f(0) = \varkappa_g(1)$, точно когато $|2b-a| = 1$. Последното условие е изпълнено при $2b-a = 1$ или $2b-a = -1$, откъдето $a = 2b-1$ или $a = 2b+1$.

Литература

- М. Манев. *Геометрия за информатици*. Архимед, 2007.
- М. Манев, М. Теофилова, А. Христов, Д. Грибачева. *Ръководство за решаване на задачи по геометрия за информатици*. Университетско издателство на ПУ, 2009.
- L. Piegel, W. Tiller. *The NURBS Book*, 2. ed. Springer, 1997.
- D. Salomon. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. Springer, 2006.
- D. Marsh. *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, 2. ed. Springer, 2005.
- T. W. Sederberg, *Computer Aided Geometric Design*, `http://tom.cs.byu.edu/~557/text/cagd.pdf`.
- `http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/`
- `http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Intro.htm`