Лекция 1. Параметрични криви

Геометричен дизайн

доц. д-р Марта Теофилова

специалност Софтуерни технологии и дизайн, II курс, задочно обучение

Задаване на крива

Крива в равнината, определена от точките с координати (x, y), може да се зададе чрез:

- явно уравнение $y = f(x)$, където f е функция на една променлива;
- неявно уравнение $F(x, y) = 0$, където F е функция на две променливи;
- параметрично уравнение $C(u) = (x(u), y(u))$, където $x(u)$ и $y(u)$ са функции на една променлива.

Първите два начина на задаване на крива могат да бъдат използвани, ако е известна функцията, чиято графика представлява желаната форма на кривата. В общия случай формите, които се налага да бъдат изчертавани, се оказват твърде сложни за това.

Определение за параметрична крива

Определение

Непрекъснато изображение, при което на всяко u от реален интервал $J \in \mathbb{R}$ се съпоставя точно една точка в равнината или в тримерното пространство, се нарича параметрична крива (линия).

Параметричните криви са векторни функции на една реална променлива (аргумент), в случая означен с u. На всяка конкретна числова стойност на u от дефиниционното му множество J съответства точно една точка от кривата $M(u)$.

Ако всички точки от кривата лежат в една равнина, тя се нарича *равнинна*. В противен случай кривата е *пространствена*.

Пример

Нека разгледаме следния пример за равнинна крива, чиито точки с координати (x, y) *се определят от:*

$$x = x_0 + au, \qquad y = y_0 + bu,$$

където x_0, y_0, a, b *са фиксирани числа. От курса по ЛААГ е известно, че горните уравнения (наречени скаларно параметрични) задават права линия през точката* (x_0, y_0) *с направляващ (колинеарен) вектор* $(a, b) \neq (0, 0)$.

В случая на права линия дефиниционното множество на параметъра u *е множеството на реалните числа* $\mathbb{R}$. *За всяка числена стойност на* u, *след заместване в уравненията на правата, се получава точно една точка от нея. Така например при* $u = 0$ *точката* (x, y) *съвпада с фиксираната точка* (x_0, y_0), *използвана за построяване на уравнението на правата.*

В тримерното реално пространство правата се определя аналогично чрез:

$$x = x_0 + au, \qquad y = y_0 + bu, \qquad z = z_0 + cu.$$

Параметрично задаване на крива

Горните два примера илюстрират един от начините на задаване на крива, а именно чрез нейните параметрични уравнения (*скаларно параметрични уравнения*). По този начин всяка от координатите на произволна точна на кривата е представена като функция на един реален аргумент (параметъра на кривата).
В равнината кривата, означена с c (от англ. *curve*), се задава така:

$$c: \quad x = x(u), \qquad y = y(u),$$

а в пространството

$$c: \quad x = x(u), \qquad y = y(u), \qquad z = z(u).$$

Координатите могат да се запишат и във вид на вектор, който се явява радиус-вектора на произволна точка от кривата. Така се получава *векторно параметричното уравнение*, което за пространствена крива има вида

$$c: \quad \vec{r}\,(x(u), y(u), z(u))\,.$$

Кривата $c : \vec{r}\,(x(u), y(u), z(u))$ е диференцируема, ако координатните ѝ функции $x(u)$, $y(u)$ и $z(u)$ са диференцируеми.

Необходимото и достатъчно условие за гладкост на кривата c е $x(u)$, $y(u)$ и $z(u)$ да са диференцируеми и

$$\dot{\vec{r}}(u) \neq \vec{o},$$

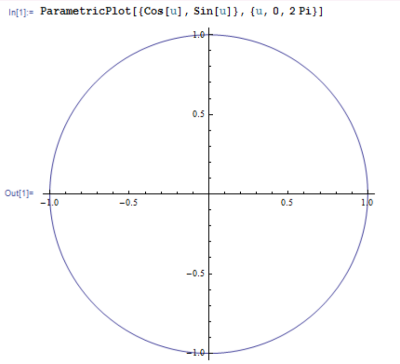
за всяко $u \in J$, т. е. първата производна на $\vec{r}(u)$ (която ще означаваме с $\dot{\vec{r}}(u) = \frac{d\vec{r}(u)}{du}$) да не се анулира. Всяка параметризация, за която е изпълнено горното условие, се нарича регулярна. Точки от кривата, които не удовлетворяват това условие, се наричат особени (нерегулярни).

Производните относно произволен параметър е прието да се означават с точки над вектора, както следва:

- първа производна $\dot{\vec{r}}(u)$,
- втора производна $\ddot{\vec{r}}(u) = \frac{d\dot{\vec{r}}(u)}{du}$,
- трета производна $\dddot{\vec{r}}(u) = \frac{d\ddot{\vec{r}}(u)}{du}$.

Пример

Скаларно параметричните уравнения на окръжност в равнината имат вида $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, *където* $a > 0$ *е радиусът на окръжността, а за да се получи един неин пълен оборот,* u *трябва да се изменя от 0 до* 2π. *Използвайки вградената функция* `ParametricPlot` *във Wolfram Mathematica, изчертаването на окръжност с радиус 1 изглежда по следния начин*



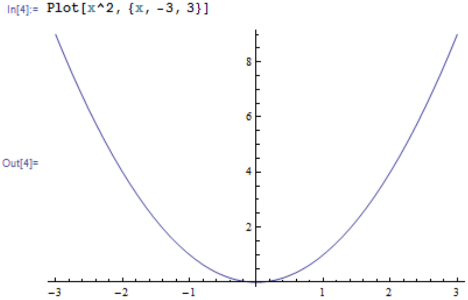
Вътрешни и външни координати

Ако т. M от кривата се получава при $u = u_0$, записваме $M(u_0)$ (или $M(u = u_0)$) и u_0 се нарича *вътрешна координата* на M относно параметризация на кривата, с която работим. След заместването на u с u_0 в параметричното уравнение на кривата се получават външните (абсолютни) координати на точката M.

Например $M(1, 0)$ (външни, абсолютни координати в равнината) от окръжността в горния пример се получава при $u = 0$ и затова $M(0)$ (вътрешна координата).

Явно уравнение

Крива може да се зададе и чрез *явното* си уравнение, което за равнинна крива означава едната от двете независими променливи (координати) да бъде зададена като функция на другата, например y като функция на x. Така параболата има уравнение $y = ax^2 + b$, където $a, b = \mathrm{const}$. Част от параболата с уравнение $y = x^2$ чрез вградената функция `Plot` в *Mathematica*.



Неявно уравнение

Още един начин за задаване на крива е чрез *неявно уравнение*, което за равнинна крива има вида $F(x, y) = 0$

Пример

От курса по ЛААГ е известно, че общото (централно) уравнение на окръжност с център точката (x_0, y_0) *и радиус* $a > 0$ *има вида*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - a^2 = 0.$$

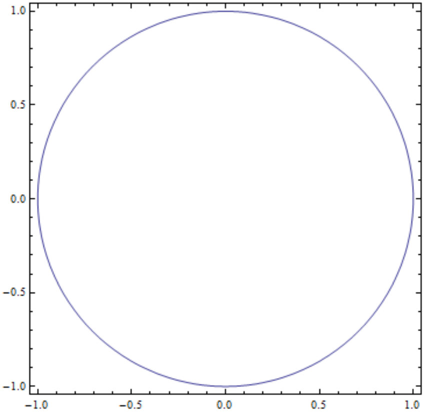
Окръжността е частен случай на елипса, а елипса с център координатното начало $(0, 0)$ *се задава чрез*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

С помощта на вградената функция `ContourPlot` можем да изчертаем единичната окръжност и елипсата с полуоси $a = 2$ и $b = 1$, както следва:

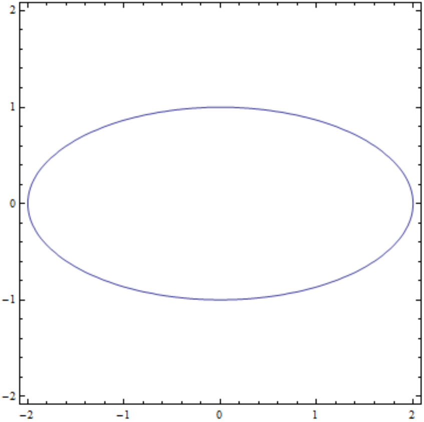
In[5]:= `ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]`

Out[5]=



In[10]:= `ContourPlot[x^2 / 4 + y^2 == 1, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]`

Out[10]=



Предимства на параметричното задаване

В компютърния дизайн на криви и повърхнини се предпочита параметричното задаване на тези обекти. Кривите, които са най-често използвани, са т. нар. полиномни криви – координатните им функции са полиноми на една променлива (най-често полиноми от 3-та степен). Част от причините параметричните криви да бъдат предпочитани са:

- параметричната форма предоставя повече степени на свобода за контрол на формата на кривата (или повърхнината). Например, сравнете $C : \vec{r}(u) = (x(u), y(u))$, където $x(u) = a_1u^3 + b_1u^2 + c_1u + d_1$, $y(u) = a_2u^3 + b_2u^2 + c_2u + d_2$ и $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;
- при параметричната форма трансформациите могат да се прилагат директно. Да разгледаме транслация по оста Ox, определена от $x' = x + x_0$, $y' = y$ за горния пример. За параметричната крива имаме $x(u) = a_1u^3 + b_1u^2 + c_1u + d_1 + x_0$, $y(u) = a_2u^3 + b_2u^2 + c_2u + d_2$, докато за явното задаване имаме $y = a(x - x_0)^3 + b(x - x_0)^2 + c(x - x_0) + d$.

Геометричен смисъл на първата производна

Първата производна $\dot{\vec{r}}$ на кривата $c : \vec{r}\,(x(u), y(u), z(u))$ се получава като и трите координатни функции $x(u)$, $y(u)$ и $z(u)$ на $\vec{r}$ се диференцират веднъж относно параметъра u, т.е.

$$\dot{\vec{r}}\,(\dot{x}(u), \dot{y}(u), \dot{z}(u))\,.$$

Първата производна се явява допирателен вектор към кривата в произволна нейна точка. Правата, която е колинеарна на този вектор, се нарича допирателна (права).

Пример

Нека кривата c е определена чрез радиус-вектора на произволна своя точка по следния начин

$$c: \quad \vec{r}\,(a\cos u, a\sin u, bu)\,,$$

където $a = const. > 0$, $b = const. \neq 0$. Тази пространствена крива се нарича винтова (витлова) линия. Първата производна на кривата в произволна нейна точка се определя от

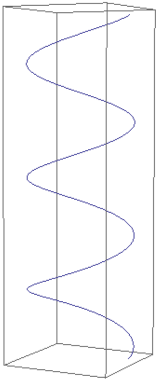
$$\dot{\vec{r}}\,(-a\sin u, a\cos u, b)\,.$$

Пример

Винтовата линия за $a = 3$, $b = 1$ чрез вградената функция `ParametricPlot3D`.

```
In[20]:= ParametricPlot3D[{3 Cos[u], 3 Sin[u], u}, {u, 0, 6 Pi}, Axes → False]
```

Out[20]=



Механичен смисъл на първата производна

Ако параметърът на кривата е времето, то самата крива описва закона за движение (траекторията) на материална точка. Първата производна е векторът на моментната скорост. Неговата дължина е големината на скоростта.

Припомняме, че относно ортонормирана координатна система *дължината* на вектора $\vec{r}(x, y, z)$ се получава по формулата

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Положителното число $\vec{r}^{\,2} = x^2 + y^2 + z^2$ се нарича *скаларен квадрат* на вектора $\vec{r}$.
Функцията `Norm` в *Mathematica* служи за намирането на дължина (норма) на вектор.

Естествен параметър и естествена параметризация

Освен относно произволен параметър (озн. с u), произволна гладка крива може да се зададе и относно друг, "по-специален" параметър.

Естественият параметър s се определя от

$$s(u) = \int_{u_0}^{u} |\dot{\vec{r}}(t)| dt,$$

където u_0 е число от дефиниционната област на параметъра на кривата.

След намирането на естествен параметър (s като функция на произволния u), се търси обратното изразяване, т.е. u като функция на s. Ако полученият аналитичен израз за $u = u(s)$ се замести в параметричното уравнение на кривата, се достига до нейната *естествена параметризация*. Относно естествения параметър първата производна на $\vec{r}$ във всяка точка на кривата е с постоянна дължина, равна на единица, т.е. $|\vec{r}\,'(s)| = 1$ (производните относно естествен параметър е прието да се означават със символите "прим" , "секонд" и т.н.).

Пример

Винтовата линия с уравнение $c : \vec{r}\,(a\cos u, a\sin u, bu)\,, u \in \mathbb{R}$ *и първа производна* $\dot{\vec{r}}\,(-a\sin u, a\cos u, b)$. *Дължината на вектора* $\dot{\vec{r}}$ *пресмятаме чрез*

$$|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{a^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Естественият параметър за $u_0 = 0$ *е*

$$s(u) = \int_0^u \sqrt{a^2+b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^u dt = t\Big|_0^u = u\sqrt{a^2+b^2}.$$

Така намерихме $s = u\sqrt{a^2+b^2}$. *Следователно* $u = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Естествената параметризация на винтовата линия има вида

$$c: \quad \vec{r}\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Пример

Ето намирането на естествен параметър на винтовата линия с помощта на Mathematica

```
In[1]:= r = {a*Cos[t], a*Sin[t], b*t};
        r1 = D[r, t];
        s = Simplify[Integrate[Norm[r1], {t, 0, u}], Element[{a, b}, Reals]]

Out[3]= Sqrt[a^2 + b^2] u
```

Дължина на дъга от крива

Дължината на дъгата от кривата c между точките $M_1(u = u_1)$ и $M_2(u = u_2)$ $(u_1 < u_2)$ се пресмята по формулата

$$M_1M_2 = \int_{u_1}^{u_2} |\dot{\vec{r}}(u)| du.$$

Пример

Окръжност с радиус $a > 0$ в равнината се определя от $\vec{r}\,(a\cos u, a\sin u)$. Първата производна има вида $\dot{\vec{r}}(-a\sin u, a\cos u)$. Дължината на този вектор се определя от $|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{a^2\sin^2 u + a^2\cos^2 u} = \sqrt{a^2} = a$. Следователно, съгласно горната формула, дължината на окръжността, т.е. дължината на дъгата между точките $M_1(0)$ и $M_2(2\pi)$, пресмятаме, както следва

$$M_1M_2 = \int_0^{2\pi} a du = au \Big|_0^{2\pi} = 2\pi a.$$

Пример

С помощта на Mathematica изчисленията изглеждат така

```
In[1]:= r = {a*Cos[u], a*Sin[u]};
        r1 = D[r, u];
        Integrate[Norm[r1], {u, 0, 2 Pi}, Assumptions → {a > 0}]

Out[3]= 2 a π
```

Дължината на дъгата от винтовата линия между точките $M_1(u=0)$ *и* $M_2(u=5)$

```
In[13]:= r = {a*Cos[u], a*Sin[u], b*u};
         r1 = D[r, u];
         Simplify[Integrate[Norm[r1], {u, 0, 5}], Element[{a, b}, Reals]]

Out[15]= 5 √(a² + b²)
```

Триедър на Френе

Триедърът на Френе представлява ортонормирана координатна система, която може да бъде построена във всяка точка на кривата (подвижна координатна система). Използва се за изследване на кривата.

Трите единични и взаимно перпендикулярни вектора, определящи триедъра на Френе, са:

- $\vec{t}$ - допирателен вектор;
- $\vec{n}$ (или още се означава с $\vec{m}$) - нормален вектор;
- $\vec{b}$ - бинормален вектор.

За тях са в сила равенствата:

$$|\vec{t}| = |\vec{n}| = |\vec{b}| = 1, \qquad \vec{t}\,\vec{n} = \vec{t}\,\vec{b} = \vec{n}\,\vec{b} = 0,$$
$$\vec{t} \times \vec{n} = \vec{b}, \quad \vec{n} \times \vec{b} = \vec{t}, \quad \vec{b} \times \vec{t} = \vec{n}.$$

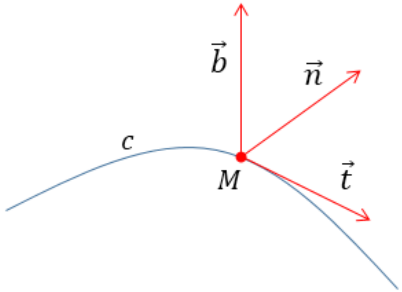
Във всяка точка от кривата всеки от векторите от триедъра на Френе определя по една права, колинеарна на него, които се наричат съответно:

- $t \parallel \vec{t}$ - допирателна (права);
- $n \parallel \vec{n}$ (или още се означава с $m \parallel \vec{m}$) - главна нормала;
- $b \parallel \vec{b}$ - бинормала.

Във всяка точка от кривата всяка двойка вектори от триедъра на Френе определят по едва равнина, както следва:

- $\mu = (\vec{t}, \vec{n})$ - оскулачна равнина;
- $\nu = (\vec{n}, \vec{b})$ - нормална равнина;
- $\pi = (\vec{t}, \vec{b})$ - ректифицираща (изправяща) равнина.

Триедърът на Френе в произволна точка M от кривата c.



Пресмятане на векторите от триедъра на Френе

Пресмятане относно естествен параметър s:

$$\vec{t} = \vec{r}\,', \qquad \vec{n} = \frac{\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,''|}, \qquad \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}.$$

Относно произволен параметър u:

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}, \qquad \vec{b} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}, \qquad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}.$$

Пример

Пресмятане на векторите от триедъра на Френе за винтовата линия $\vec{r}(3\cos u, 3\sin u, 4u)$ *с Mathematica.*

```
In[1]:= r = {3 Cos[u], 3 Sin[u], 4 u};
        r1 = D[r, u]
        r2 = D[r1, u]

Out[2]= {-3 Sin[u], 3 Cos[u], 4}

Out[3]= {-3 Cos[u], -3 Sin[u], 0}

In[4]:= t = Simplify[r1 / Norm[r1], Element[u, Reals]]
```

Out[4]= $\left\{-\frac{3\,\mathrm{Sin}[u]}{5}, \frac{3\,\mathrm{Cos}[u]}{5}, \frac{4}{5}\right\}$

```
In[5]:= b = Simplify[Cross[r1, r2] / Norm[Cross[r1, r2]], Element[u, Reals]]
```

Out[5]= $\left\{\frac{4\,\mathrm{Sin}[u]}{5}, -\frac{4\,\mathrm{Cos}[u]}{5}, \frac{3}{5}\right\}$

```
In[6]:= n = Simplify[Cross[b, t], Element[u, Reals]]

Out[6]= {-Cos[u], -Sin[u], 0}
```

Кривина и торзия

Кривината ($\varkappa$) и *торзията* (τ) за произволна крива се пресмятат чрез формулите:

- относно естествен параметър s

$$\varkappa = |\vec{r}\,''|, \qquad \tau = \frac{\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,'''}{\vec{r}\,''^2},$$

където $\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,'''$ е смесеното произведение на първата, втората и третата производни на $\vec{r}$;

- относно произволен параметър u

$$\varkappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}, \qquad \tau = \frac{\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}\,\dddot{\vec{r}}}{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})^2}.$$

Кривината и торзията са инвариантни относно параметризацията на кривата, т.е. стойностите им за дадена точка от кривата не се променят при смяна на параметъра на кривата.

Пример

Кривината и торзията за винтовата линия $\vec{r}(3\cos u, 3\sin u, 4u)$ *с Mathematica.*

```
In[15]:= r = {3 Cos[u], 3 Sin[u], 4 u};
         r1 = D[r, u]
         r2 = D[r1, u]
         r3 = D[r2, u]

Out[16]= {-3 Sin[u], 3 Cos[u], 4}

Out[17]= {-3 Cos[u], -3 Sin[u], 0}

Out[18]= {3 Sin[u], -3 Cos[u], 0}

In[21]:= kappa = Simplify[Norm[Cross[r1, r2]] / Norm[r1]^3, Element[u, Reals]]
```

Out[21]= $\frac{3}{25}$

```
In[20]:= Needs["VectorAnalysis`"]

In[27]:= tau = Simplify[ScalarTripleProduct[r1, r2, r3] / Norm[Cross[r1, r2]]^2,
           Element[u, Reals]]
```

Out[27]= $\frac{4}{25}$

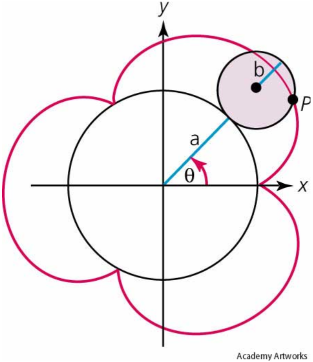
Епициклоиди

- За пръв математически описани от немския художник Албрехт Дюрер (1471–1528). По-късно са изучавани от Дезарг, Нютон, Лопитал и др. Името им е дадено от Филип де Лаир. Идеята за конструирането на такива криви е много по-стара, вероятно от времето на древногръцкия астроном и математик Хипарх (II в. пр. н. е.).
- В "Ръководство за измерването" А. Дюрер пише: "*Тъй като геометрията е правилната база на всички картини, реших да преподам нейните основи и принципи на всички младежи, жадни да творят изкуство*".
- Епициклоидата е равнинна крива от 4-та степен, определена от геометричното място на фиксирана точка от окръжност (с радиус b), търкаляща се без приплъзване по външната страна на друга окръжност (с радиус $a \geq b$).

- Параметричните уравнения на епициклоидата са:

$$x(u) = (a+b)\cos u - b\cos\left(\frac{a+b}{b}u\right),$$
$$y(u) = (a+b)\sin u - b\sin\left(\frac{a+b}{b}u\right),$$

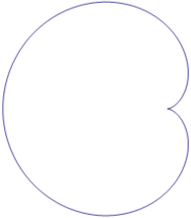
където u е ъгълът, който правата през центровете на двете окръжности сключва с оста Ox.



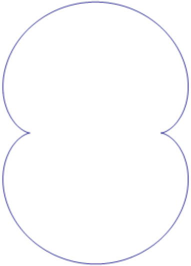
http://cf.ydcdn.net/1.0.1.26/images/main/epicycloid.jpg

- Нека отношението $\frac{a}{b} = k$. Ако k е цяло число, кривата е затворена и има k на брой рогови точки. Ако k е рационално число, т.е. $k = \frac{p}{q}$, кривата отново е затворена и има p на брой рогови точки. Ако k е ирационално число, кривата е безкрайна (не се затваря).

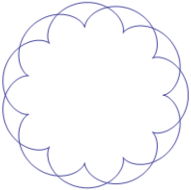
a=b, кардиоида



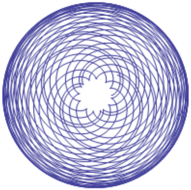
a=2b, нефроида



a=6.5b

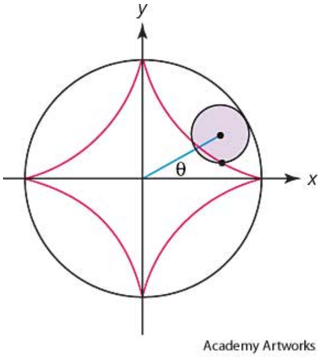


$a=\sqrt{2}\,b$



Хипоциклоиди

- Системно са изучавани от Филип де Лаир.
- Равнинни криви от 4-та степен, определени като геометричното място на фиксирана точка от окръжност (с радиус b), търкаляща се без приплъзване по вътрешната страна на друга окръжност (с радиус $a > b$).

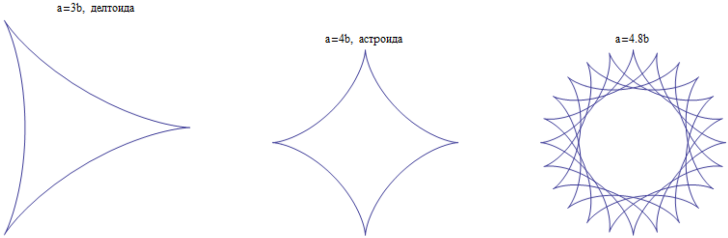


http://cf.ydcdn.net/1.0.1.26/images/main/hypocycloid.jpg

- Параметричните уравнения на хипоциклоидата са:

$$x(u) = (a-b)\cos u + b\cos\left(\frac{a-b}{b}u\right),$$
$$y(u) = (a-b)\sin u - b\sin\left(\frac{a-b}{b}u\right),$$

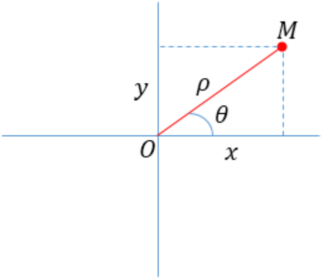
където u е ъгълът, който правата през центровете на двете окръжности сключва с оста Ox.



Епициклоиди и хипоциклоиди в изкуството
http://www.antiprism.com/album/865_string_art/

Полярни координати

Освен декартова координатна система, в равнината може да бъде определена и *полярна координатна система* чрез точка, наречена *полюс*, и ос през тази точка, наречена *полярна ос*. Координатите (ρ, θ) на произволна точка относно полярна координатна система се определят от разстоянието ρ от точката до полюса (дължината на нейния радиус-вектор) и ъгъла θ, който радиус-векторът на точката сключва с положителната посока на полярната ос.



Връзката между декартовите (x, y) и полярните координати (ρ, θ) на точка в равнината се изразява чрез равенствата

$$x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \sin \theta.$$

Следователно

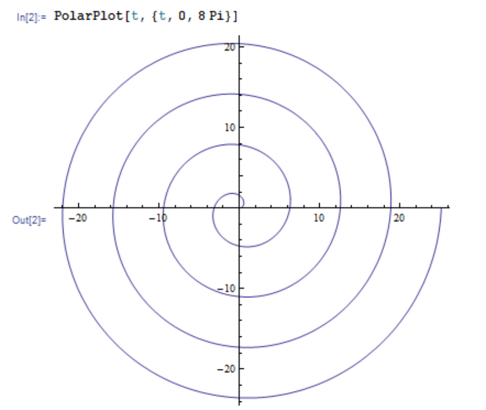
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \frac{x}{y} = \mathrm{cotg}\theta \text{ или } \frac{y}{x} = \mathrm{tg}\theta.$$

Уравнението на окръжност, чийто център съвпада с полюса, относно полярни координати е $\rho = r$, където $r > 0$ е радиусът на тази окръжност.

Полярните координати са удобни за представяне и изследване на криви, получени чрез въртене, като спирали и др. Например, архимедовата спирала, която се получава при движението на точка с постоянна скорост по лъч, който се върти около полюс с постоянна ъглова скорост.

Пример

В Mathematica за изчертаване на равнинни криви относно полярни координати се използва вградената функция `PolarPlot`*, като* $\rho = \rho(\theta)$*, т.е.* ρ *е функция на* θ*. Например, архимедовата спирала с уравнение* $a\theta + b$ *при* $a = 1$*,* $b = 0$ *се получава по следния начин*



Рози

- Изучавани от италианския математик и философ Луиджи Гуидо Гранди (1671–1742) в работата му *Flores geometrici*. Той ги нарича *rhodonea* – рози.
- Уравнението им в полярни координати е

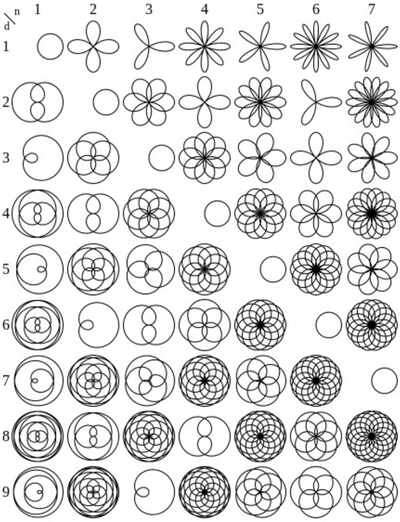
$$\rho = \cos(k\theta) \quad \text{или} \quad \rho = \sin(k\theta),$$

  първото от които в декартови координати приема вида

$$x(u) = \cos(ku)\cos u, \quad y(u) = \cos(ku)\sin u.$$

- Ако k е цяло и четно, розата има $2k$ на брой венчелистчета и кривата се изчертава за u в интервал с дължина 2π. Ако k е цяло и нечетно, венчелистчетата са k на брой и кривата се изчертава за u в интервал с дължина π. Ако k е ирационално число, кривата не е затворена.

Рози за различни стойности на $k = \frac{n}{d}$.



Източник: Wikipedia

Спирали

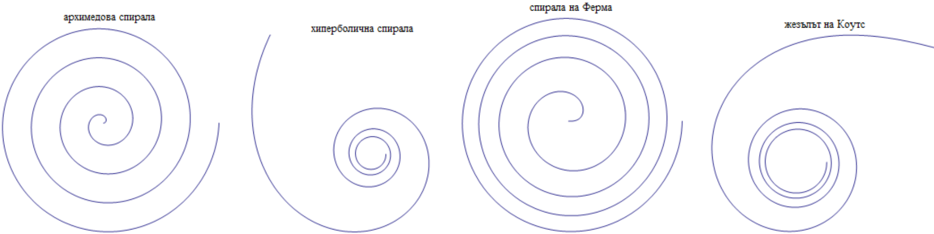
- От латинската дума *spira* – извивка. Равнинни криви, описващи намотки около един или повече центрове, отдалечавайки се или приближавайки се до тях.
- Уравнение в полярни координати на някои от т. нар. полиномни спирали – спирали, за които ρ е полиномна функция на θ

$$\rho = a + b\theta^{\frac{1}{n}}, \qquad a, b = \text{conts.}$$

където:

- $n = 1$ – архимедова (аритметична) спирала;
- $n = -1$ – хиперлобична спирала;
- $n = 2$ – параболична спирала (при $b = 0$ – спирала на Ферма);
- $n = -2$ – жезълът на Коутс;
- $n = \frac{1}{2}$ – спирала на Галилей.

Някои от т. нар. полиномни спирали:



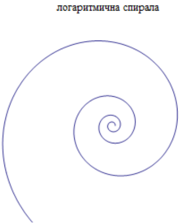
Друг клас спирали са т. нар. псевдоспирали:

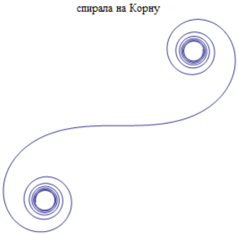
- логаритмичната спирала (наречена *Spira mirabilis* от Якоб Бернули) с уравнение в полярни координати

$$\rho = ae^{b\theta}, \qquad a, b = \mathrm{const.}$$

  Ако факторът на нарастване $b = \varphi$ ("златното сечение" ≈ 1.618), се получава спиралата на Фибоначи (златната спирала).
- клотоида (спирала на Корну, спирала на Ойлер), изучавана от Йохан Бернули, с уравнение в декартови координати

$$x(u) = \int_0^u \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad y(u) = \int_0^u \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) dt.$$





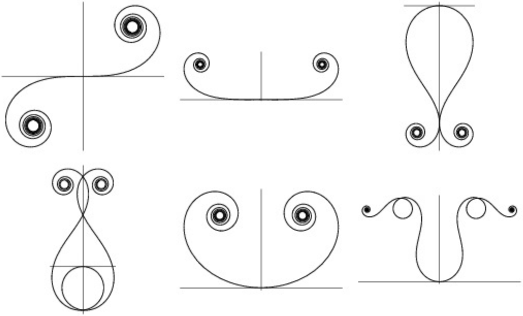
Следните спирали са предложени от Алфред Грей като обобщение на спиралата на Корну:

$$x(u) = a \int_0^u \cos\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right) dt, \quad y(u) = a \int_0^u \sin\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right) dt, \quad a = \text{const}.$$

Уравнение на Цезаро на крива е уравнение, за което кривината (или радиусът на кривина) е изразен като функция на естествения параметър s. Например спиралите на Грей имат уравнение $\varkappa = \frac{s^n}{a^{n+1}}$.

Ф. Дилън дава още едно обобщение на спиралите на Корну, описвайки клас "полиномни" спирали, в чиито уравнения на Цезаро кривината е полиномна функция на s.

Ето някои от спиралите на Дилън с уравнения: $\varkappa = s$ (спирала на Корну), $\varkappa = s^2$, $\varkappa = s^2 - 2.19$, $\varkappa = s^2 - 4$, $\varkappa = s^2 + 1$, $\varkappa = 5s^4 - 18s^2 + 5$:



Източник: http://mathworld.wolfram.com/CornuSpiral.html

Суперелипси

- Суперелипсата (крива на Ламе) е обобщение на елипсата. Тези криви са изучавани за пръв път от френския математик и инженер Габриел Ламе (1795–1870). Уравнението на суперелипсата в декартови координати има вида

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1,$$

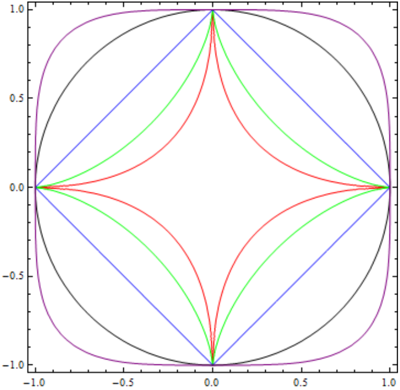
  където n, a, b са положителни реални числа. При $a = b$ кривата се нарича още суперокръжност. При $n < 2$ се нарича хипоелипса, а при $n > 2$ – хиперелипса (при $n = 2$ кривата е елипса).

- Още едно обобщение може да се получи чрез кривите $(m, n > 0)$

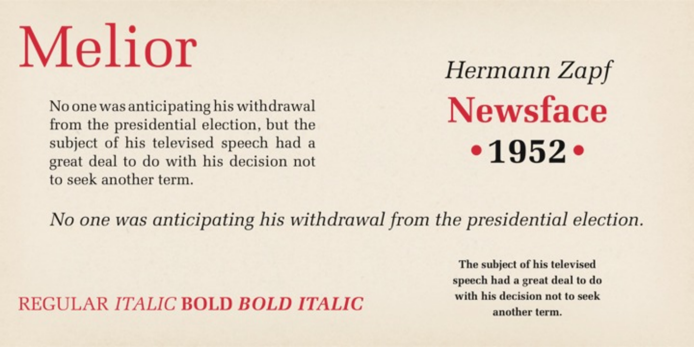
$$\left|\frac{x}{a}\right|^m + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1,$$

- Уеб-базирано приложение за изчертаване на суперелипси http://www.procato.com/superellipse/.

Суперелипси при $a = b$. Отвътре навън: $n = \frac{1}{2}$, $n = \frac{2}{3}$ (астроида), $n = 1$ (квадрат), $n = 2$ (окръжност), $n = 4$ (squircle = square + circle, използван в смартфоните на Nokia).

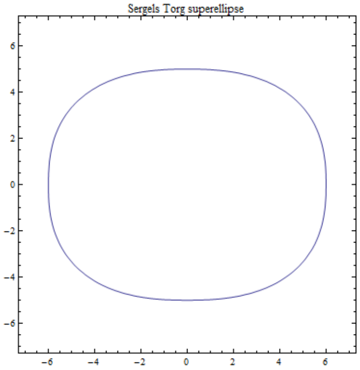


- Германският дизайнер Херман Цапф използвал формата на суперелипсата в шрифта си Melior (1952).



- Американският математик и програмист Доналд Кнут (създателят на TeX) използвал елипси и суперелипси в своите шрифтове, представяйки тези криви чрез кубични сплайни.

Датският математик, поет, инженер Пит Хайн възродил и популяризирал суперелипсата, влагайки формата на кривата в площада Сергелс Торг в Стокхолм. Кривата, който той използвал, е с параметри $n = 2.5$, $a/b = 6/5$.



Формата на Олимпийския стадион в столицата на Мексико е също на суперелипса.

Суперформи

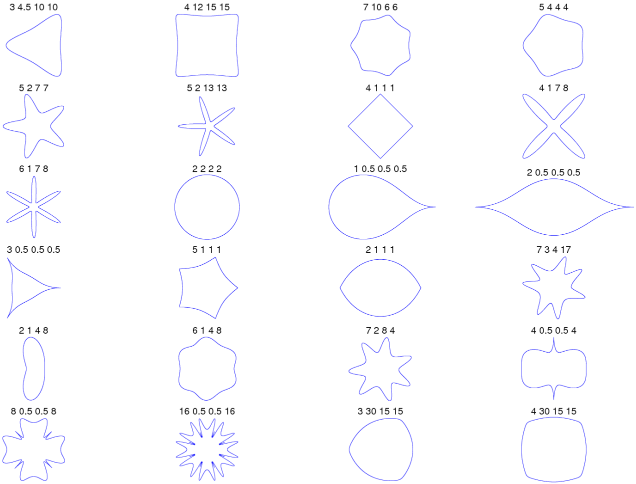
- Суперформата (суперформулата) е обобщение на суперелипсата, предложено от холандския математик и биолог Йохан Гилис http://www.pg.science.ru.nl/en/johangielis.html.

- Суперформулата в полярни координати има вида

$$\rho(\theta) = \left[\left| \frac{\cos\left(\frac{m\theta}{4}\right)}{a} \right|^{n_2} + \left| \frac{\sin\left(\frac{m\theta}{4}\right)}{b} \right|^{n_3} \right]^{-\frac{1}{n_1}},$$

където $a, b > 0$, m, n_1, n_2, n_3 са реални числа.

- Уеб-базирано приложение за изчертаване на суперформи http://www.procato.com/superformula/.



Източник: Wikipedia

Супертрансформация

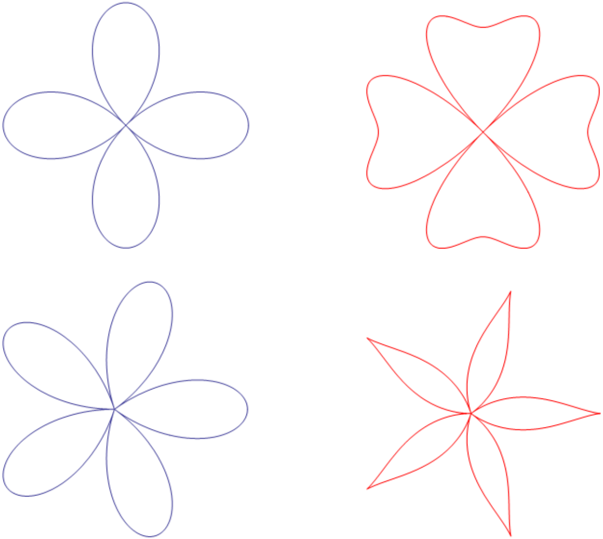
- Суперформата може да се интерпретира като крива, получена от единичната окръжност (с полярно уравнение $\rho = 1$), след като тя е била подложена на трансформация, зададена от уравнението на суперформулата, т.е.

$$\rho(\theta) = \left[\left| \frac{\cos\left(\frac{m\theta}{4}\right)}{a} \right|^{n_2} + \left| \frac{\sin\left(\frac{m\theta}{4}\right)}{b} \right|^{n_3} \right]^{-\frac{1}{n_1}}.$$

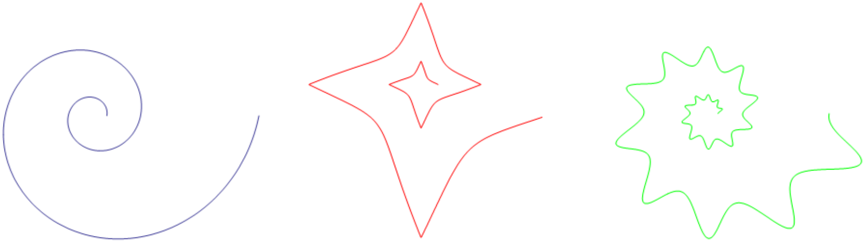
- Аналогично, всяка друга крива с полярно уравнение $f = f(\theta)$ може да бъде подложена на действието на суперформулата, след което ще се получи кривата с полярно уравнение

$$\rho(\theta) = f(\theta). \left[\left| \frac{\cos\left(\frac{m\theta}{4}\right)}{a} \right|^{n_2} + \left| \frac{\sin\left(\frac{m\theta}{4}\right)}{b} \right|^{n_3} \right]^{-\frac{1}{n_1}}.$$

- Рози на Гранди и съответните им суперрози (в червено)



- Логаритмична спирала (в синьо) и суперспирали

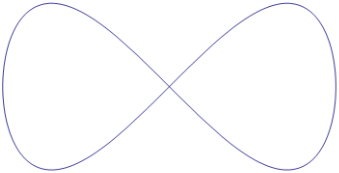


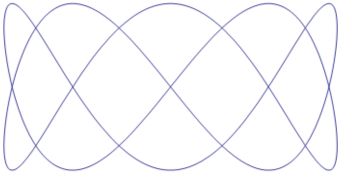
Други забележителни криви

Криви на Лисажу (осцилоскопска крива), изучавани от френския математик Жул Антоан Лисажу през 19-ти век и добила популярност в дизайна на логота през 60-те и 70-те години на миналия век. Уравнението на тази крива е

$$x(u) = A\sin(au + c), \qquad y(u) = B\sin(bu + d),$$

където $A, B, a, b, c, d = \mathrm{conts}$. Ако отношението a/b е рационално число, кривата е затворена и се генерира за $u \in [0, 2\pi]$.





Да си припомним от курса по ЛААГ...

Нека са дадени векторите:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$$
$$\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$$
$$\vec{c}(x_3, y_3, z_3).$$

- Скаларното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е числото $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
- Скаларният квадрат на вектора $\vec{a}$ е неотрицателното число $\vec{a}^{\,2} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$.
- Дължината на вектора $\vec{a}$ е неотрицателното число $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

- Векторното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, взети в този ред, е векторът с координати

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

- Смесеното произведение на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взети в този ред, е числото $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ или още

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Чрез система Mathematica изброените произведение се пресмятат, както следва:

```
a = {x1, y1, z1};
b = {x2, y2, z2};
c = {x3, y3, z3};

a.b        Скаларно произведение

Out[26]= x1 x2 + y1 y2 + z1 z2

Norm[a]    Дължина на вектор
```

Out[22]= $\sqrt{\text{Abs}[x1]^2 + \text{Abs}[y1]^2 + \text{Abs}[z1]^2}$

```
Cross[a, b]    Векторно произведение

Out[19]= {-y2 z1 + y1 z2, x2 z1 - x1 z2, -x2 y1 + x1 y2}

In[20]:= Needs["VectorAnalysis`"]

ScalarTripleProduct[a, b, c]    Смесено произведение

Out[21]= -x3 y2 z1 + x2 y3 z1 + x3 y1 z2 - x1 y3 z2 - x2 y1 z3 + x1 y2 z3
```

Литература

- М. Манев. *Геометрия за информатици*. Архимед, 2007.
- М. Манев, М. Теофилова, А. Христов, Д. Грибачева. *Ръководство за решаване на задачи по геометрия за информатици*. Университетско издателство на ПУ, 2009.
- L. Piegel, W. Tiller. *The NURBS Book*, 2. ed. Springer, 1997.
- D. Salomon. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. Springer, 2006.
- D. Marsh. *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, 2. ed. Springer, 2005.
- T. W. Sederberg, *Computer Aided Geometric Design*, `http://tom.cs.byu.edu/~557/text/cagd.pdf`.
- `http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/`
- `http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Intro.htm`