

1. Гладки криви. Дължина на дъга от крива. Естествен параметър и естествена параметризация на крива

Задача 1. Да се параметризират следните криви:

а) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (окръжност);

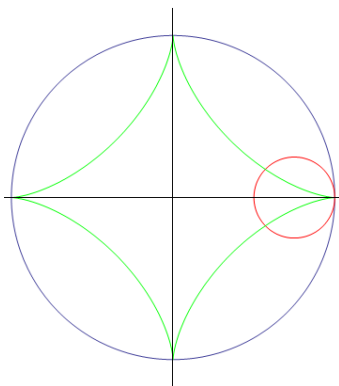
б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (елипса);

в) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (астроида)*;

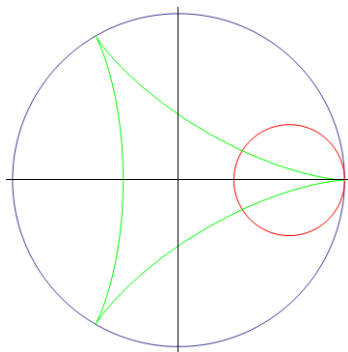
г) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (хипербола);

д) $x^2 + y^2 + z^2 = 3, x^2 + y^2 = 2$.

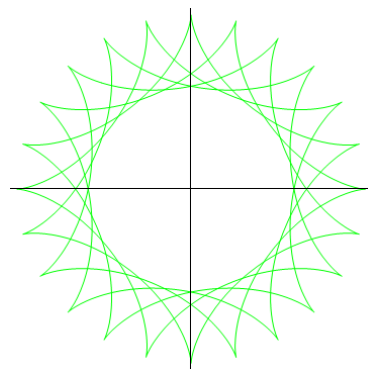
*Астроидата е крива от семейство равнинни линии, наречени *хипоциклоиди*. Те се генерират при движението на фиксирана точка от окръжност с по-малък радиус (r), която се върти без приплъзване в окръжност с по-голям радиус ($R = kr$). Скаларно-параметричното уравнение на тези криви е $\vec{r}((R - r) \cos u + r \cos(\frac{R-r}{r}u), (R - r) \sin u - r \sin(\frac{R-r}{r}u))$. Астроидата се получава за $k = 4$.



Фиг. 1.1.1. Астроида, $k = 4$



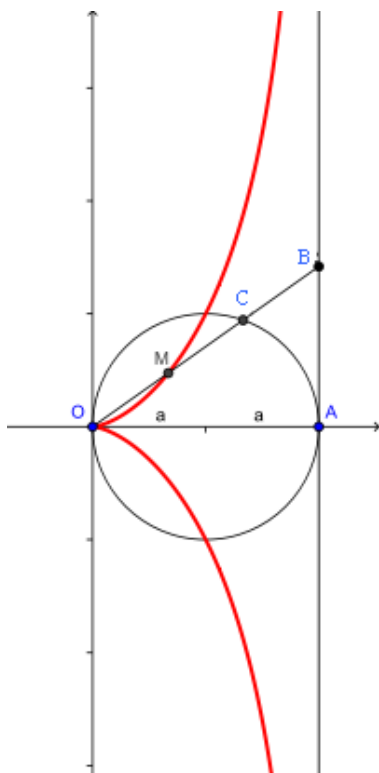
Делтоида, $k = 3$



Хипоциклоида, $k = 4.8$

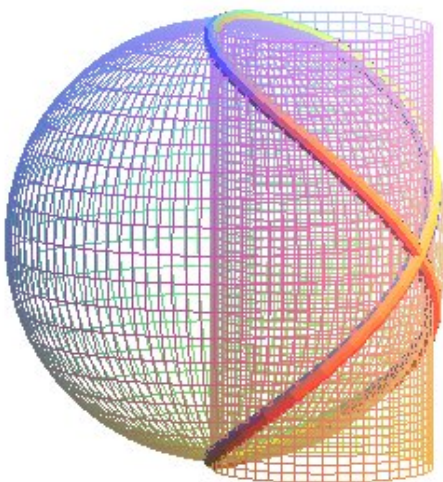
Задача 2. Намерете неявните уравнения на кривата $c : \vec{r}(u, u^2, u^3), u \in \mathbb{R}$.

Задача 3. Дадена е окръжност k с диаметър $OA = 2a$ и допирателна t към нея в т. A . През т. O е построен лъч s , като $s \cap t = B$ и $s \cap k = C$. Върху лъча s е нанесена отсечка $OM = BC$. Когато s се върти около O , точката M описва крива, наречена *цисоида на Диоклис* (цисоида на гръцки език означава "с форма на бръщиян"). Намерете параметризация на тази линия.



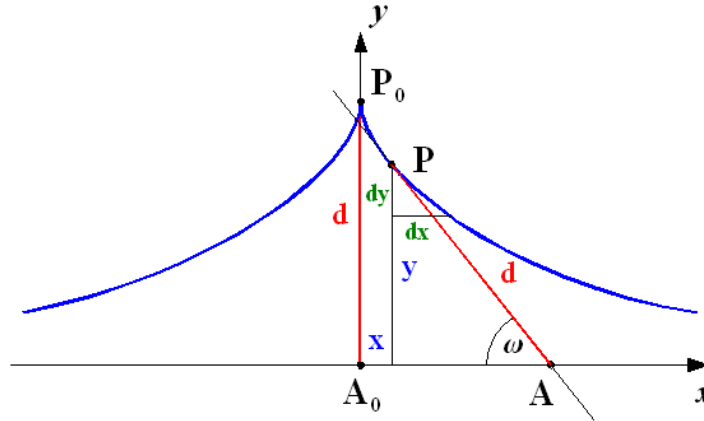
Фиг. 1.2. Цисоида на Диоклис. Неявното уравнение на тази крива е $y^2 = \frac{x^3}{(2a-x)}$.

Задача 4. Намерете параметризацията на *линията на Вивиани* – крива, чийто носител е сечението на сфера с радиус a и кръгов цилиндър с диаметър a , едната образуваща на който минава през центъра на сферата.



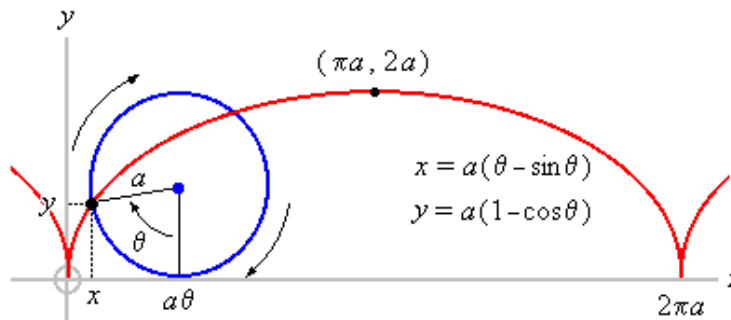
Фиг. 1.3. Линия на Вивиани

Задача 5. Да се намерят параметричните уравнения на *трактриса* (*tractrix* идва от лат. глагол *trahere* - дърпам) – равнинна крива, за която дължината на отсечката върху допирателната ѝ в произволна точка, мерена от тази точка до пресечната точка на допирателната с постоянна права, е константа a . Да се изчисли дължината на дъгата от трактрисата между точките $A(\frac{\pi}{6})$ и $B(\frac{\pi}{3})$.



Фиг. 1.4. Трактриса. Неявното уравнение на тази крива е $y = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$.

Задача 6. Да се намери параметризацията на *циклоида* – траекторията на фиксирана точка от окръжност с радиус a , търкаляща се по права линия без плъзгане. Да се изчисли дължината на дъгата на циклоидата между две нейни последователни точки върху правата.



Фиг. 1.5. Циклоида

Задача 7. Намерете дължината на дъгата от кривата (c) между точките A и B , ако:

а) $c : \vec{r}(au, a\sqrt{2}\ln u, \frac{a}{u})$, $a = \text{const.} > 0$, $A(u = 1)$, $B(u = 10)$;

б) $c : \vec{r}(u, \frac{u^3}{3a^2}, \frac{a^2}{2u})$, $a = \text{const.} > 0$, $A(u = a)$, $B(u = 3a)$;

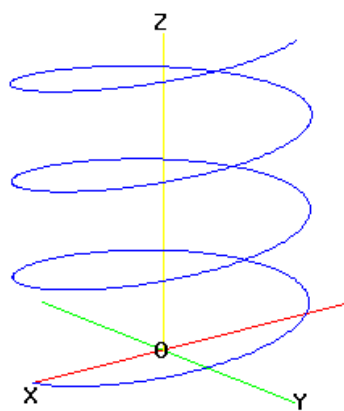
в) (c) е астроидата, $A(0)$, $B(2\pi)$.

Задача 8. Намерете естествена параметризация за всяка от кривите:

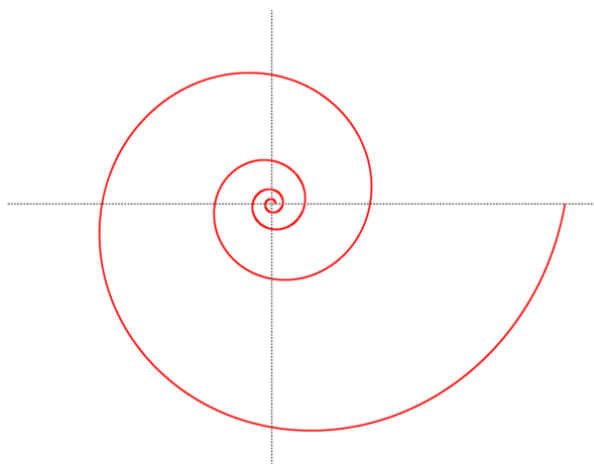
а) витловата линия $c : \vec{r}(a \cos u, a \sin u, bu)$, $a, b = \text{const.}$, $a > 0$, $b \neq 0$;

б) $c : \vec{r}(au, a\sqrt{2}\ln u, \frac{a}{u})$, $a = \text{const.} > 0$;

в) логаритмична спирала $c : \vec{r}(e^u \cos u, e^u \sin u)$.



Фиг. 1.6. Витлова линия



Фиг. 1.7. Логаритмична спирала