ПУ "Паисий Хилендарски"
Факултет по математика и информатика

Кривинни свойства на конформно келерови многообразия с норденова метрика

Марта Теофилова

1. Увод

Нека (M, J, g) е $2n$-мерно почти комплексно многообразие с норденова метрика, т.е J е почти комплексна структура и g е метрика върху M, такива че:

$$J^2 X = -X, \quad g(JX, JY) = -g(X, Y)$$

Присъединената метрика $\tilde{g}$ на g върху M се задава по следния начин

$$\tilde{g}(X, Y) = g(X, JY)$$

Тензорното поле F от тип *(0,3)* върху M се определя от равенството

$$F(X, Y, Z) = g\left((\nabla_X J)Y, Z\right)$$

и притежава следните свойства:

$$F(X, Y, Z) = F(X, Z, Y) = F(X, JY, YZ)$$

Лиевата 1-форма θ, асоциирана с тензора F и векторът на Ли Ω се дефинират чрез следните равенства:

$$\theta(x) = g^{ij} F(e_i, e_j, x), \quad \theta(x) = g(x, \Omega)$$

където $\{e_i\}$ $(i = 1,2,\ldots,2n)$ е база на допирателното пространство T_pM, $p \in M$, а g^{ij} са компонентите на обратната матрица на $\{g_{ij}\}$.

Една класификация на почти комплексните многообразия с норденова метрика относно тензорното поле F е представена в статията *G. Ganchev, A. Borisov, Note on the almost complex manifolds with a Norden metric, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., vol. 39, (1986)*, където са дадени характеристичните условия на осемте класа от разглежданите многообразия. Една двойна класификация на почти комплексните многообразия с норденова метрика е направена в работата на *G. Ganchev, K. Gribachev, V. Mihova, B-Connections and their conformal invariants on conformally Kaehler manifolds with B-metric, Publ. Inst. Math. (Beograd), vol.42, (1987)*. Трите основни класа W_1, W_2, W_3 и класа $W_1 \oplus W_2$ на комплексните многообразия с норденова метрика се определят както следва:

$$W_1 : \quad F(X,Y,Z) = \frac{1}{2n}\{g(X,Y)\theta(Z) + g(X,Z)\theta(Y) + g(X,JY)\theta(JZ) + g(X,JZ)\theta(JY)\}$$

$$W_2 : \quad F(X,Y,JZ) + F(Y,Z,JX) + F(Z,X,JY) = 0, \quad \theta = 0$$

$$W_3 : \quad F(X,Y,Z) + F(Y,Z,X) + F(Z,X,Y) = 0$$

$$W_1 \oplus W_2 : \quad F(X,Y,JZ) + F(Y,Z,JX) + F(Z,X,JY) = 0$$

Класът W_0 на келеровите многообразия с норденова метрика се определя от условието $F=0$.

Нека R е тензорът на кривина на ∇, т.е.

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$R(X,Y,Z,W) = g\left(R(X,Y)Z,W\right)$$

Тензорът L от тип *(0,4)* се нарича *кривинноподобен*, ако удовлетворява условията:

$$L(X,Y,Z,W) = -L(Y,X,Z,W) = -L(X,Y,W,Z),$$

$$L(X,Y,Z,W) + L(Y,Z,X,W) + L(Z,X,Y,W) = 0$$

Кривинноподобният тензор L се нарича *келеров*, ако удовлетворява условието:

$$L(X,Y,JZ,JW) = -L(X,Y,Z,W)$$

Тензорът на Ричи $\rho(L)$ и скаларните кривини $\tau(L)$ и $\tau^*(L)$ на кривинно-подобния тензор L се определят чрез:

$$\rho\big(L\big)(x,y) = g^{ij}L(e_i,x,y,e_j),$$

$$\tau(L) = g^{ij}\rho(e_i,e_j), \quad \tau^*(L) = g^{ij}\rho(e_i,Je_j)$$

Нека S е симетричен и хибриден относно J тензор от тип *(0,2)*, т.е. $S(JX,Y) = S(JY,X)$. Разглеждаме следните кривинно-подобни тензори от тип *(0,4)*:

$$\psi_1\big(S\big)(X,Y,Z,W) = g(Y,Z)S(X,W) - g(X,Z)S(Y,W) \\ + g(X,W)S(Y,Z) - g(Y,W)S(X,Z)$$

$$\psi_2\big(S\big)(X,Y,Z,W) = g(Y,JZ)S(X,JW) - g(X,JZ)S(Y,JW) \\ + g(X,JW)S(Y,JZ) - g(Y,JW)S(X,JZ)$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\psi_1\big(g\big), \quad \pi_2 = \frac{1}{2}\psi_2\big(g\big), \quad \pi_3 = -\frac{1}{2}\psi_1\big(\tilde{g}\big) = \frac{1}{2}\psi_2\big(\tilde{g}\big)$$

Известно е, че тензорът на Вайл се определя от

$$W = R - \frac{1}{2n-2}\left\{\psi_1(\rho) - \frac{\tau}{2n-1}\pi_1\right\}$$

Нека $\alpha = \{x, y\}$ е неизродена *2*-равнина в *TpM*. Секционните кривини на α относно тензора на кривина L са задават чрез:

$$\nu(L;p) = \frac{L(x,y,y,x)}{\pi_1(x,y,y,x)}, \quad \nu^*(L;p) = \frac{L(x,y,y,Jx)}{\pi_1(x,y,y,x)}$$

Квадратичната норма $\|\nabla J\|^2$ на ∇J е въведена в *E. Garcia-Rio, Y. Matsushita, Isotropic Kaehler structures on Engel 4-manifolds, J. Geom. Phys., vol.33, (2000)* както следва

$$\|\nabla J\|^2 = g^{ij} g^{kl} g\left((\nabla_{e_i} J)e_k, (\nabla_{e_j} J)e_l\right)$$

Почти комплексно многообразие с норденова метрика, удовлетворяващо условието $\|\nabla J\|^2 = 0$, се нарича *изотропно келерово многообразие с норденова метрика*.

2. Комплексни свързаности и тензори на кривина върху конформно келерови многообразия с норденова метрика

Нека (M, J, g) е W_1-многообразие с норденова метрика. Лиевите 1-форми θ и $\theta^* = \theta \circ J$ са затворени върху M, точно когато

$$(\nabla_X \theta)Y = (\nabla_Y \theta)X, \quad (\nabla_X \theta)JY = (\nabla_Y \theta)JX$$

Многообразията от класа W_1 със затворени 1-форми на Ли се наричат *конформно келерови многообразия с норденова метрика ($W_1{}^0$- многообразия)*.

В статията *G. Ganchev, K. Gribachev, V. Mihova, B-Connections and their conformal invariants on conformally Kaehler manifolds with B-metric, Publ. Inst. Math. (Beograd), vol.42, (1987)* е въведена една канонична свързаност с торзия (B-свързаност) D върху комплексно многообразие с норденова метрика чрез

$$D_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2} J(\nabla_X J)Y$$

Доказано е, че $Dg = DJ = D\tilde{g} = 0$, а също и че тензорът на кривина K за D е келеров за всяко конформно келерово многообразие с норденова метрика.

В статията *M. Teofilova, Complex connections on complex manifolds with Norden metric, Contemporary Aspects of Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, World Sci. Publ., Singapore, (2005)* е изследвана свързаността на Яно $\nabla^{'}$, дефинирана чрез

$$\nabla^{'}_{X}Y = \nabla_{X}Y + \frac{1}{4}\{(\nabla_{X}J)JY + 2(\nabla_{Y}J)JX - (\nabla_{JX}J)Y\}$$

Доказано е, че свързаността на Яно е без торзия и че $\nabla^{'}J = 0$ върху произволно комплексно многообразие с норденова метрика. Получен е и келеровият тензор на кривина $R^{'}$ от тип *(0,4)* за свързаността на Яно върху произволно конформно келерово многообразие с норденова метрика както следва

$$R^{'} = R - \frac{1}{4n}\{\psi_1 + \psi_2\}(S) - \frac{1}{8n^2}\psi_1(M) - \frac{\theta(\Omega)}{16n^2}\{3\pi_1 + \pi_2\} + \frac{\theta(J\Omega)}{16n^2}\pi_3$$

$$S(X,Y) = (\nabla_{X}\theta)JY + \frac{1}{4n}\left[\theta(X)\theta(Y) - \theta(JX)\theta(JY)\right]$$

$$M(X,Y) = \theta(X)\theta(Y) + \theta(JX)\theta(JY)$$

Теорема 1 Келеровите тензори на кривина за свързаностите D и ∇' съвпадат върху произволно конформно келерово многообразие с норденова метрика, т.е.

$$K = R'$$

Теорема 2 Нека (M, J, g) е четиримерно почти комплексно многообразие с норденова метрика и L е келеров тензор на кривина върху M. Тогава L има следния вид

$$L = \nu(L)\left\{\pi_1 - \pi_2\right\} + \nu^*(L)\pi_3$$

Теорема 3 Нека (M, J, g) е четиримерно конформно келерово многообразие с норденова метрика. Тогава за тензора на кривина R за свързаността на Леви-Чевита ∇ имаме

$$R = \frac{\tau - \operatorname{div}(J\Omega)}{8}\{\pi_1 - \pi_2\} + \frac{\operatorname{tr}S^*}{16}\pi_3 - \frac{1}{8}\{\psi_1 - \psi_2\}(S)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\psi_1(\rho) - \frac{\tau}{3}\pi_1\right\} + \frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{div}(J\Omega)}{2} - \frac{\tau}{3} - \frac{\theta(\Omega)}{8}\right]\pi_1$$

$$\operatorname{tr}S^* = -\operatorname{div}\Omega + \frac{\theta(J\Omega)}{4}, \quad n = 2$$

Следствие 1 Нека (M, J, g) е четиримерно конформно келерово многообразие с норденова метрика. Тогава тензорът на Вайл има вида

$$W = \frac{\tau - \operatorname{div}(J\Omega)}{8}\{\pi_1 - \pi_2\} + \frac{\operatorname{tr}S^*}{16}\pi_3 - \frac{1}{8}\{\psi_1 - \psi_2\}(S)$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{div}(J\Omega)}{2} - \frac{\tau}{3} - \frac{\theta(\Omega)}{8}\right]\pi_1$$

Установяваме, че за произволно почти комплексно многообразие с норденова метрика от класа W_1 е изпълнено

$$\|\nabla J\|^2 = \frac{2}{n}\theta(\Omega)$$

Теорема 4 Нека (M, J, g) е четиримерно изотропно келерово $W_1{}^0$-многообразие с норденова метрика. Тогава тензорът на кривина R удовлетворява следното равенство

$$R = \frac{\tau - \operatorname{div}(J\Omega)}{8}\{\pi_1 - \pi_2\} + \frac{\operatorname{tr} S^*}{16}\pi_3 - \frac{1}{8}\{\psi_1 - \psi_2\}(S)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\psi_1(\rho) - \frac{\tau}{3}\pi_1\right\} + \frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{div}(J\Omega)}{2} - \frac{\tau}{3}\right]\pi_1$$

3. Инвариантни тензори при трансформацията на свързаностите на Леви-Чевита на метриките g и $\tilde{g}$ върху W_1-многообразия

Нека (M, J, g) е почти комплексно многообразие с норденова метрика и $\tilde{\nabla}$ е свързаността на Леви-Чевита, породена от метриката $\tilde{g}$. В статията *G. Ganchev, K. Gribachev, V. Mihova, B-Connections and their conformal invariants on conformally Kaehler manifolds with B-metric, Publ. Inst. Math. (Beograd), vol.42, (1987)* е разгледан тензорът

$$\Phi(X, Y, Z) = g\left(\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z\right)$$

$$\Phi(X, Y, Z) = \frac{1}{2}\left\{F(JZ, X, Y) - F(X, Y, JZ) - F(Y, X, JZ)\right\}$$

Лема 1 Нека (M, J, g) е W_1-многообразие с норденова метрика. Тогава за свързаностите ∇ и $\tilde{\nabla}$ е изпълнено

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2n}\left[g(X, JY)\Omega - g(X, Y)J\Omega\right]$$

Теорема 5 Нека (M, J, g) е W_1-многообразие с норденова метрика. Тогава за тензорите на кривина R и $\tilde{R}$ от тип *(1,3)* за свързаностите ∇ и $\tilde{\nabla}$ имаме

$$\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{2n}\Big\{g(X,Z)\Big[\nabla_Y J\Omega - \frac{1}{2n}\theta(JY)J\Omega\Big]$$

$$-g(Y,Z)\Big[\nabla_X J\Omega - \frac{1}{2n}\theta(JX)J\Omega\Big] - g(X,JZ)\Big[\nabla_Y \Omega - \frac{1}{2n}\theta(Y)J\Omega\Big]$$

$$+g(Y,JZ)\Big[\nabla_X \Omega - \frac{1}{2n}\theta(X)J\Omega\Big]\Big\}$$

$$T_1(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{4n}\Big\{g(X,Z)\Big[\nabla_Y J\Omega - \frac{1}{2n}\theta(JY)J\Omega\Big]$$

$$-g(Y,Z)\Big[\nabla_X J\Omega - \frac{1}{2n}\theta(JX)J\Omega\Big] - g(X,JZ)\Big[\nabla_Y \Omega - \frac{1}{2n}\theta(Y)J\Omega\Big]$$

$$+g(Y,JZ)\Big[\nabla_X \Omega - \frac{1}{2n}\theta(X)J\Omega\Big]\Big\}$$

$$T_2(X,Y) = \rho(X,Y) - \frac{1}{2n}\Big[g(X,Y)\tau - g(X,JY)\tau^*\Big]$$

$$T_3(X,Y) = \left(\nabla_X \theta\right)Y + \frac{1}{4n}\Big[g(X,Y)\theta(J\Omega) - g(X,JY)\theta(\Omega)\Big]$$

Теорема 6 Нека (M,J,g) е W_1-многообразие с норденова метрика. Тогава 1-формата на Ли θ и тензорите T_1, T_2 и T_3 са инвариантни при трансформацията на свързаностите ∇ и $\tilde{\nabla}$.

Литература

G. Ganchev, A. Borisov, *Note on the almost complex manifolds with a Norden metric.* Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., vol. 39, N 5, (1986), 31-34.

G. Ganchev, K. Gribachev, V. Mihova, *B-Connections and their conformal invariants on conformally Kaehler manifolds with B-metric.* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), vol. 42 (56), (1987), 107-121.

E. Garcia-Rio, Y. Matsushita, *Isotropic Kähler structures on Engel 4-manifolds.* J.Geom. Phys., vol. 33, (2000), 288-294.

K. Gribachev, M. Manev, D. Mekerov, *A Lie group as a 4-dimensional Quasi-Kähler manifold with Norden metric.* JP J. Geom. Topol., (2005), (to appear).

K. Gribachev, D. Mekerov, G. Djelepov, *Generalized B-manifolds.* Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., vol. 38, N 3, (1985), 299-302.

M. Teofilova, *Complex connections on complex manifolds with Norden metric.* Contemporary Aspects of Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, eds. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Sci. Publ., Singapore, (2005).