39-ТА ПРОЛЕТНА КОНФЕРЕНЦИЯ НА СМБ
6-10 април 2010г., Албена

Групи на Ли като 4-мерни специални комплексни многообразия с норденова метрика

Марта Теофилова

Факултет по математика и информатика
Пловдивски Университет

marta@uni-plovdiv.bg

1. Почти комплексни многообразия с норденова метрика

Гладкото многообразие (M, J, g), $\dim M = 2n$, се нарича *почти комплексно многообразие с норденова метрика*, ако J е почти комплексна структура и g е псевдориманова метрика:

$$J^2x = -x, \qquad g(Jx, Jy) = -g(x, y), \qquad x, y \in \mathfrak{X}(M).$$

Присъединената метрика $\widetilde{g}$ на g се определя от

$$\widetilde{g}(x, y) = g(x, Jy)$$

и също е норденова метрика. И двете метрики по необходимост са с неутрална сигнатура, т. е. сигнатура (n, n).

Тензорът на Ниенхойс N за J има вида

$$N(x,y) = [Jx, Jy] - [x,y] - J[Jx,y] - J[x,Jy].$$

От [4]* е известно, че почти комплексната структура е комплексна, точно когато е интегруема, т. е. точно когато $N = 0$.

*[4] **A. Newlander, L. Niremberg**, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. Math. **65** (1957), 391-404.

Нека ∇ е свързаността на Леви-Чивита, породена от g. Основният структурен тензор F от тип $(0,3)$ се определя от

$$F(x,y,z) = g\left((\nabla_x J)y, z\right)$$

и притежава следните свойства:

$$F(x,y,z) = F(x,z,y) = F(x,Jy,Jz).$$

Присъединените 1-форми на Ли θ и θ^* се дефинират чрез

$$\theta(x) = g^{ij} F(e_i, e_j, x), \qquad \theta^* = \theta \circ J,$$

където $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ е произволна база на T_pM, $p \in M$, а g^{ij} са компонентите на обратната матрица на g относно $\{e_i\}$.

Класификация на почти комплексните многообразия с норденова метрика относно F е дадена от Г. Ганчев и А. Борисов в [2]*. Трите основни класа $\mathcal{W}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ се определят съответно от условията:

• *класът* $\mathcal{W}_1$

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2n}\left[g(x, y)\theta(z) + g(x, z)\theta(y)\right.$$
$$\left. +g(x, Jy)\theta(Jz) + g(x, Jz)\theta(Jy)\right];$$

• *класът* $\mathcal{W}_2$ *на специалните комплексни многообразия с норденова метрика*

$$F(x, y, Jz)+F(y, z, Jx)+F(z, x, Jy) = 0, \quad \theta = 0 \Leftrightarrow N = 0, \quad \theta = 0;$$

• *класът* $\mathcal{W}_3$ *на квази-келеровите многообразия с норденова метрика*

$$F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y) = 0.$$

---

*[2] **G. Ganchev, A. Borisov**, *Note on the almost complex manifolds with a Norden metric*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. **39**(5) (1986), 31-34.

Нека R е тензорът на кривина за ∇, т. е.

$$R(x,y)z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x,y]} z.$$

Тензорът на кривина от тип (0,4) относно g се определя от

$$R(x,y,z,u) = g\left(R(x,y)z, u\right).$$

Тензорът на Ричи ρ и скаларните кривини τ и τ^* се определят съответно от

$$\rho(y,z) = g^{ij} R(e_i, y, z, e_j),$$

$$\tau = g^{ij} \rho(e_i, e_j), \qquad \tau^* = g^{ij} \rho(e_i, J e_j).$$

Нека S е симетричен тензор от тип (0,2). Разглеждаме следните кривино-подобни тензори:

$$\begin{aligned}\psi_1(S)(x,y,z,u) &= g(y,z)S(x,u) - g(x,z)S(y,u)\\ &\quad + g(x,u)S(y,z) - g(y,u)S(x,z),\end{aligned}$$

$$\pi_1(x,y,z,u) = g(y,z)g(x,u) - g(x,z)g(y,u),$$

$$\pi_2(x,y,z,u) = g(y,Jz)g(x,Ju) - g(x,Jz)g(y,Ju).$$

Известно е, че конформно инвариантният тензор на Вайл $W(R)$ за R върху $2n$-мерно псевдориманово многообразие има вида

$$W(R) = R - \frac{1}{2(n-1)}\left\{\psi_1(\rho) - \frac{\tau}{2n-1}\pi_1\right\}.$$

Нека $\alpha = \{x, y\}$ е неизродена допирателна площадка с база $x, y \in T_pM$, $p \in M$. Тогава секционната кривина $k(\alpha)$ на α се определя от

$$k(\alpha; p) = \frac{R(x, y, y, x)}{\pi_1(x, y, y, x)}.$$

Една площадка α в T_pM се нарича:

- *холоморфна*, ако $J\alpha = \alpha$;
- *напълно реална*, ако $J\alpha \perp \alpha$ по отношение на g.

Квадратичната норма на ∇J се определя от

$$\|\nabla J\|^2 = g^{ij} g^{kl} g \left((\nabla_{e_i} J) e_k, (\nabla_{e_j} J) e_l \right).$$

Почти комплексно многообразие с норденова метрика, за което $\|\nabla J\|^2 = 0$, се нарича *изотропно келерово почти комплексно многообразие с норденова метрика* [3]*.

*[3] **D. Mekerov, M. Manev**, *On the geometry of Quasi-Kähler manifolds with Norden metric*, Nihonkai Math. J. **16**(2) (2005), 89-93.

2. Почти комплексни многообразия с постоянни холоморфни секционни кривини

В [1]* Г. Джелепов и К. Грибачев доказват следната

Теорема А. *Едно почти комплексно многообразие с норденова метрика притежава точково постоянна холоморфна секционна кривина точно когато*

$$\begin{aligned}
&3\{R(x,y,z,u)+R(x,y,Jz,Ju)+R(Jx,Jy,z,u)+R(Jx,Jy,Jz,Ju)\}\\
&-R(Jy,Jz,x,u)+R(Jx,Jz,y,u)-R(y,z,Jx,Ju)+R(x,z,Jy,Ju)\\
&-R(Jx,z,y,Ju)+R(Jy,z,x,Ju)-R(x,Jz,Jy,u)+R(y,Jz,Jx,u)\\
&=8H\{\pi_1+\pi_2\},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

където $H \in FM$, $x,y,z,u \in \mathfrak{X}(M)$. *В този случай* $H(p)$ *е холоморфната секционна кривина на всички неизродени холоморфни площадки в* T_pM, $p \in M$. ■

*[1] **G. Djelepov, K. Gribachev**, *Generalized B-manifolds of constant holomorphic sectional curvature*, Plovdiv Univ. Sci. Works-Math. **23**(1) (1985), 125-131.

От (2.1) следва

$$H(p) = \frac{1}{4n^2}(\tau + \tau^{**}),$$

където $\tau^{**} = g^{il}g^{jk}R(e_i, e_j, Je_k, Je_l)$.

В [5]* е доказано, че за $\mathcal{W}_2$-многообразие е в сила

$$\|\nabla J\|^2 = 2(\tau + \tau^{**}),$$

а в [3]** за $\mathcal{W}_3$-многообразие е установено, че

$$\|\nabla J\|^2 = -2(\tau + \tau^{**}).$$

*[5] **M. Teofilova**, *Lie groups as four-dimensional conformal Kähler manifolds with Norden metric*, In:Topics of Contemporary Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, eds. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2007), 319-326.

[3] **D. Mekerov, M. Manev, *On the geometry of Quasi-Kähler manifolds with Norden metric*, Nihonkai Math. J. **16**(2) (2005), 89-93.

Теорема 2.1. *Нека* (M, J, g) *е почти комплексно многообразие с норденова метрика и точково постоянни холоморфни секционни кривини* $H(p)$, $p \in M$. *Тогава:*

(i) $\|\nabla J\|^2 = 8n^2 H(p)$, *ако* $(M, J, g) \in \mathcal{W}_2$;

(ii) $\|\nabla J\|^2 = -8n^2 H(p)$, *ако* $(M, J, g) \in \mathcal{W}_3$. ∎

Следствие 2.1. *Нека* (M, J, g) *е почти комплексно многообразие с норденова метрика от класа* $\mathcal{W}_2$ *или* $\mathcal{W}_3$ *с точково постоянна холоморфна секционна кривина* $H(p)$, $p \in M$. *Тогава* (M, J, g) *е изотропно келерово точно когато* $H(p) = 0$. ∎

3. Пример на 4-мерно $\mathcal{W}_2$-многообразие чрез групи на Ли

Нека $\mathfrak{g}$ е 4-мерна реална алгебра на Ли, съответстваща на реална свързана група на Ли G. Ако $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ е база от ляво инвариантни векторни полета на G и $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$ $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$, то е известно, че структурните константи C_{ij}^k удовлетворяват условията

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k,$$

$$C_{ij}^k C_{ks}^l + C_{js}^k C_{ki}^l + C_{si}^k C_{kj}^l = 0 \text{ (тъжд. на Якоби).}$$

Дефинираме почти комплексна структура J и норденова метрика g върху G съответно чрез следните условия:

$$JX_1 = X_3, \quad JX_2 = X_4, \quad JX_3 = -X_1, \quad JX_4 = -X_2, \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} g(X_1, X_1) = g(X_2, X_2) = -g(X_3, X_3) = -g(X_4, X_4) = 1, \\ g(X_i, X_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$N_{12}^1 = C_{34}^1 - C_{12}^1 - C_{23}^3 + C_{14}^3,$$

$$N_{12}^2 = C_{34}^2 - C_{12}^2 - C_{23}^4 + C_{14}^4,$$

$$N_{12}^3 = C_{34}^3 - C_{12}^3 + C_{23}^1 - C_{14}^1,$$

$$N_{12}^4 = C_{34}^4 - C_{12}^4 + C_{23}^2 - C_{14}^2.$$

$$\theta_1 = 2C_{13}^1 - C_{12}^4 + C_{14}^2 + C_{23}^2 - C_{34}^4,$$

$$\theta_2 = 2C_{24}^2 + C_{12}^3 + C_{14}^1 + C_{23}^1 + C_{34}^3,$$

$$\theta_3 = 2C_{13}^3 + C_{12}^2 + C_{14}^4 + C_{23}^4 + C_{34}^2,$$

$$\theta_4 = 2C_{24}^4 - C_{12}^1 + C_{14}^3 + C_{23}^3 - C_{34}^1.$$

Теорема 3.1. *Нека* (G, J, g) *е 4-мерно почти комплексно многообразие с норденова метрика, определено от (3.1) и (3.2). Тогава* (G, J, g) *е* $\mathcal{W}_2$*-многообразие, точно когато за алгебрата на Ли* $\mathfrak{g}$ *на* G *са изпълнени следните условия:*

$$
\begin{aligned}
&C_{13}^1 = C_{12}^4 - C_{23}^2 = C_{34}^4 - C_{14}^2, \\
&C_{13}^3 = -\left(C_{12}^2 + C_{23}^4\right) = -\left(C_{14}^4 + C_{34}^2\right), \\
&C_{24}^4 = C_{12}^1 - C_{14}^3 = C_{34}^1 - C_{23}^3, \\
&C_{24}^2 = -\left(C_{12}^3 + C_{14}^1\right) = -\left(C_{23}^1 + C_{34}^3\right),
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

където C_{ij}^k, $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$ *удовлетворяват тъждеството на Якоби.* ■

Едно решение на уравненията (3.3) и тъждеството на Якоби и 2-параметричното семейство от разрешими алгебри на Ли $\mathfrak{g}$, определени от

$$
\mathfrak{g}: \begin{array}{ll} [X_1, X_2] = \lambda X_1 - \lambda X_2, & [X_2, X_3] = \mu X_1 + \lambda X_4, \\ [X_1, X_3] = \mu X_2 + \lambda X_4, & [X_2, X_4] = \mu X_1 + \lambda X_3, \\ [X_1, X_4] = \mu X_2 + \lambda X_3, & [X_3, X_4] = -\mu X_3 + \mu X_4, \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}. & \end{array} \tag{3.4}
$$

Изучаваме $\mathcal{W}_2$-многообразието (G, J, g), където алгебрата на Ли $\mathfrak{g}$ на G е дефинирана чрез (3.4).

Компоненти на свързаността на Леви-Чивита:

$$\nabla_{X_1}X_1 = -\lambda X_2, \qquad \nabla_{X_2}X_2 = -\lambda X_1,$$
$$\nabla_{X_3}X_3 = \mu X_4, \qquad \nabla_{X_4}X_4 = \mu X_3,$$
$$\nabla_{X_1}X_2 = \lambda X_1 + \mu(X_3 + X_4),$$
$$\nabla_{X_1}X_3 = \nabla_{X_1}X_4 = \mu X_2,$$
$$\nabla_{X_2}X_1 = \lambda X_2 + \mu(X_3 + X_4),$$
$$\nabla_{X_2}X_3 = \nabla_{X_2}X_4 = \mu X_1,$$
$$\nabla_{X_3}X_1 = \nabla_{X_3}X_2 = -\lambda X_4,$$
$$\nabla_{X_3}X_4 = -\lambda(X_1 + X_2) - \mu X_3,$$
$$\nabla_{X_4}X_1 = \nabla_{X_4}X_2 = -\lambda X_3,$$
$$\nabla_{X_4}X_3 = -\lambda(X_1 + X_2) - \mu X_4.$$

Компоненти на тензора F:

$$F_{114} = -F_{214} = F_{312} = \frac{1}{2}F_{322} = \frac{1}{2}F_{411} = F_{412} = -\lambda,$$

$$F_{112} = \frac{1}{2}F_{122} = \frac{1}{2}F_{211} = F_{212} = -F_{314} = F_{414} = \mu.$$

Квадратична норма на ∇J:

$$\|\nabla J\|^2 = -32(\lambda^2 - \mu^2).$$

Кривини свойства:

$$-\tfrac{1}{2}R_{1221} = -R_{1341} = -R_{2342} = R_{3123} = \tfrac{1}{2}R_{3443} = R_{4124} = \lambda^2 + \mu^2,$$

$$R_{1331} = R_{1441} = R_{2332} = R_{2442} = -R_{1324} = -R_{1423} = \lambda^2 - \mu^2,$$

$$R_{1231} = R_{1241} = R_{2132} = R_{2142}$$
$$= -R_{3143} = -R_{3243} = -R_{4134} = -R_{4234} = 2\lambda\mu.$$

$$\rho_{11} = \rho_{22} = -4\lambda^2, \qquad \rho_{33} = \rho_{44} = -4\mu^2,$$
$$\rho_{12} = \rho_{34} = -2(\lambda^2 + \mu^2), \qquad \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = 4\lambda\mu.$$

$$\tau = -8(\lambda^2 - \mu^2), \qquad \tau^* = 16\lambda\mu.$$

Секционни кривини $k(\alpha_{ij})$:

Разглеждаме площадката α_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, с база $\{X_i, X_j\}$.

- напълно реални площадки - α_{12}, α_{14}, α_{23}, α_{34};
- холоморфни площадки - α_{13}, α_{24}.

$$k(\alpha_{13}) = k(\alpha_{24}) = -(\lambda^2 - \mu^2).$$

Теорема 3.2. *Разглежданото многообразие* (G, J, g) *притежава постоянни холоморфни секционни кривини.* ∎

Тензор на Вайл:

$$\frac{1}{2}W_{1221} = W_{1331} = W_{1441} = W_{2332} = W_{2442} = \frac{1}{2}W_{3443}$$

$$= -\frac{1}{3}W_{1324} = -\frac{1}{3}W_{1423} = \frac{1}{3}(\lambda^2 - \mu^2).$$

Теорема 3.3. *Следните условия са еквивалентни:*

(i) (G, J, g) *е изотропно келерово*;

(ii) $|\lambda| = |\mu|$;

(iii) $\tau = 0$;

(iv) (G, J, g) *е с нулева холоморфна секционна кривина*;

(v) тензорът на Вайл е нулев;

(vi) $R = \frac{1}{2}\psi_1(\rho)$. ■

Литература

[1] **G. Djelepov, K. Gribachev**, *Generalized B-manifolds of constant holomorphic sectional curvature*, Plovdiv Univ. Sci. Works-Math. **23**(1) (1985), 125-131.

[2] **G. Ganchev, A. Borisov**, *Note on the almost complex manifolds with a Norden metric*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. **39**(5) (1986), 31-34.

[3] **D. Mekerov, M. Manev**, *On the geometry of Quasi-Kähler manifolds with Norden metric*, Nihonkai Math. J. **16**(2) (2005), 89-93.

[4] **A. Newlander, L. Niremberg**, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. Math. **65** (1957), 391-404.

[5] **M. Teofilova**, *Lie groups as four-dimensional conformal Kähler manifolds with Norden metric*, In:Topics of Contemporary Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, eds. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2007), 319-326.