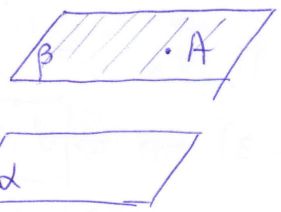
УРАВНЕНИЕ НА РАВНИНА

1. През точка, успоредна на дадена равнина

$A(1,2,3)$, $\alpha: \underbrace{4x-5y+6z}+10=0$

? $\beta \begin{cases} \ni A \\ \parallel \alpha \end{cases}$



от $\beta \parallel \alpha \Rightarrow \vec{N}_\beta \parallel \vec{N}_\alpha \Rightarrow$

$\beta: 4x-5y+6z+D=0$, $D=?$

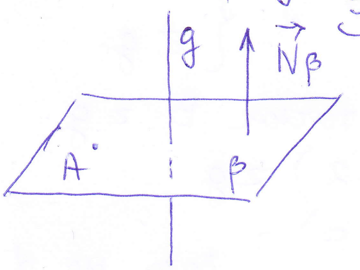
т. $A \in \beta \Rightarrow 4.1-5.2+6.3+D=0$

$\Rightarrow D=-24 \Rightarrow$

$$\boxed{\beta: 4x-5y+6z-24=0}$$

2. През точка, перпендикулярна на дадена права

$A(1,2,3)$, $g: \underbrace{\frac{x}{5}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+2}{-6}}$? $\beta \begin{cases} \ni A \\ \perp g \end{cases}$



от $g \perp \beta \Rightarrow \vec{N}_\beta \parallel \vec{g}(5,4,-6) \parallel g \Rightarrow$

$\beta: 5(x-1)+4(y-2)-6(z-3)=0$

$$\boxed{\beta: 5x+4y-6z+5=0}$$

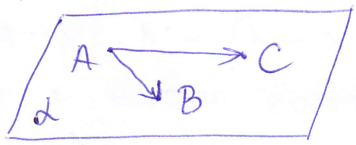
3. През три точки, нележащи върху една права

$A(1,2,3)$

$B(1,0,2)$

$C(0,0,3)$

? $\alpha \begin{cases} \ni A \\ \ni B \\ \ni C \end{cases}$



I н. – с нормален вектор и общо уравнение

$\left.\begin{matrix} \vec{AB}(0,-2,-1) \\ \vec{AC}(-1,-2,0) \end{matrix}\right\}$ база в равнината $\Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} \parallel \vec{N}_\alpha$

$\vec{AB} \times \vec{AC}(-2,1,-2) \parallel (2,-1,2)$

$\Rightarrow \alpha: 2(x-1)-1.(y-2)+2(z-3)=0 \Rightarrow \boxed{\alpha: 2x-y+2z-6=0}$

II н. – с детерминантата от компланарни вектори

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-3 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \alpha: y-2(z-3)-2x=0$$

$$\alpha: 2x-y+2z-6=0$$

(4.) През точка, успоредна на две прави (неуспоредни)

$A(1,2,3)$, $g: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{4}$, $l: \dfrac{x+5}{-2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-1}{3}$

$? \ \alpha \begin{cases} \ni A \\ \parallel l \\ \parallel g \end{cases}$ I н. $\left.\begin{array}{l} \vec{g}(1,3,4) \parallel g \\ \vec{l}(-2,0,3) \parallel l \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\vec{g} \times \vec{l} \parallel \vec{N}_\alpha}$

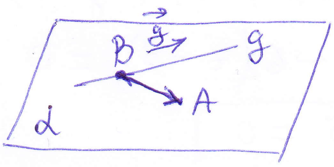
$\vec{g} \times \vec{l}\,(9,-11,6) \parallel \vec{N}_\alpha \Rightarrow$

$\alpha: 9(x-1) - 11(y-2) + 6(z-3) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha: 9x - 11y + 6z - 7 = 0}$

II н. $\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$ и разписваме до

(5.) През точка и права, неминаваща през точката

$A(1,2,3)$, $g: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{4}$ $? \ \alpha \begin{cases} \ni A \\ \ni g \end{cases}$



Взимаме произволна точка $B \in g$.
Например $B(0,1,-2) \in g$

Тогава $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-1,-1,-5) \\ \vec{g}(1,3,4) \end{array}\right\}$ база на α

$\overrightarrow{AB} \times \vec{g}\,(11,-1,-2) \parallel \vec{N}_\alpha$

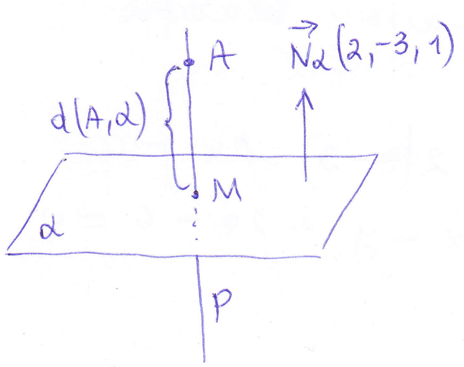
$\Rightarrow \alpha: 11(x-1) - 1.(y-2) - 2(z-3) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha: 11x - y - 2z - 3 = 0}$

или по втория начин с детерминантата

(6.) През две точки и успоредна на дадена права – аналогично на (5.)

(7.) Разстояние от точка до равнина

$A(-1,0,2)$, $\alpha: 2x - 3y + z + 7 = 0$, $d(A,\alpha) = \text{distance} = ?$



1) $p \begin{cases} \ni A \\ \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow p: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-2}{1} \Leftrightarrow$

$p: \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = -3s \\ z = 2 + s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$

скаларно параметрично уравнение на $p \perp \alpha$

Търсим координатите на т. $M = p \cap \alpha$ – прободът на правата p и равнината α (M е ортогоналната проекция на A в равнината α).

$$M: \left| \begin{array}{l} x = -1 + 2s \\ y = -3s \\ z = 2 + s \\ 2x - 3y + z + 7 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow 2(-1+2s) - 3(-3s) + 2 + s + 7 = 0$$

$$14s = -7 \Rightarrow s = -\frac{1}{2}$$

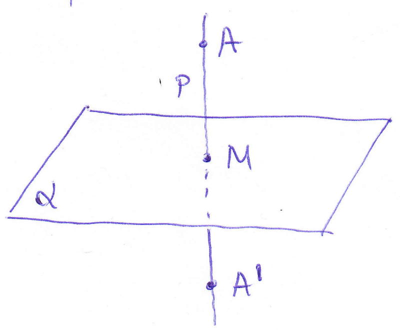
$\Rightarrow$ при $s = -\frac{1}{2}$ от уравнението на p се получават координатите на т. M, т.е.

$$M: \left| \begin{array}{l} x = -1 + 2.\left(-\frac{1}{2}\right) \\ y = +3 . \frac{1}{2} \\ z = 2 - \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \underline{M\left(-2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{d(A, \alpha) = \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{\frac{7}{2}}.}$$

$$\overrightarrow{AM}\left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

8. Ортогонално симетрична точка относно равнина.



A и A' са ортогонално симетрични относно α, ако:

1) $AA' \perp \alpha$

2) $AA' \cap \alpha = M$ – средата на AA', т.е. $AM = MA'$.

Тогава намерената т. $M\left(-2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ е средата на отсечката AA'. Търсим $A' = ?$

$$M = \frac{1}{2}(A + A') \Leftrightarrow A' = 2M - A \Rightarrow \boxed{A'(-3, 3, 1).}$$