9. Метрични действия със свободни вектори

Физиците трябва да осъзнаят, че математиката е доказан път към истината.
Брайън Грийн

9.1. Скаларно произведение на вектори.

Определение 9.1 (Скаларно произведение). *Скаларно произведение* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарича реалното число $\vec{a}\vec{b}$, определено от равенството

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}), \tag{9.1}$$

където $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \in [0,\pi]$ е ъгълът между $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ са съответните им дължини.

Определение 9.2 (Скаларен квадрат). *Скаларен квадрат* $\vec{a}^{\,2}$ на вектора $\vec{a}$ се нарича скаларното произведение на $\vec{a}$ със себе си, т.е.

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2. \tag{9.2}$$

Забележка 9.1. От равенството (9.2) се вижда, че дължината $|\vec{a}|$ на произволен вектор $\vec{a}$ може да бъде намерена чрез

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}. \tag{9.3}$$

Теорема 9.1 (Свойства на скаларното произведение)**.** *Нека $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ са произволни вектори, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава са в сила следните равенства:*
1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (комутативност);
2) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (дистрибутивност);
3) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$ (хомогенност);
4) $\vec{a}^{\,2} \geq 0$, като $\vec{a}^{\,2} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$ (неотрицателност).

Определение 9.3. Векторно пространство над $\mathbb{R}$, в което е зададено скаларно произведение, удовлетворяващо свойствата от Теорема 9.1, се нарича *реално евклидово пространство.*

Пример 9.1. Забележителни реални евклидови пространства са *реалната права* $\mathbb{R}$, *реалната равнина* $\mathbb{R}^2$ и *тримерното пространство* $\mathbb{R}^3$.

Забележка 9.2. Геометричното векторно пространство, снабдено със скаларно произведение, е реално евклидово пространство и се нарича *евклидово геометрично пространство*.

Теорема 9.2. *Нека са дадени векторите $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ относно ортонормирана координатна система (база). Тогава са в сила равенствата:*

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,\ \vec{a}^{\,2} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,\ |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \quad (9.4)$$

Следствие 9.1. *Ако относно ортонормирана координатна система са дадени точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то разстоянието между тях, т.е. дължината на отсечката M_1M_2, се пресмята по формулата*

$$d(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (9.5)$$

Теорема 9.3. *Нека са дадени два ненулеви вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ относно ортонормирана координатна система и φ е ъгълът между тях. Тогава*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (9.6)$$

Забележка 9.3. Ако $\vec{a}\vec{b} > 0$, то ъгълът между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е остър. Ако $\vec{a}\vec{b} < 0$, то ъгълът между векторите е тъп.

Теорема 9.4 (Критерий за ортогоналност)**.** *Два ненулеви вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са взаимно перпендикулярни, точно когато $\vec{a}\vec{b} = 0$.*

Теорема 9.5 (Нормиране на вектори)**.** *Нека $\vec{a} \neq \vec{o}$. Тогава векторът $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ е еднопосочно колинеарен с $\vec{a}$ и има дължина единица, т.е. $|\vec{e}| = 1$.*

Определение 9.4. Нека $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\vec{b} \neq \vec{o}$. Да разгледаме произволна ос, определена от посоката на $\vec{b}$. През точките A и B прекарваме прави, перпендикулярни на $\vec{b}$, които пресичат оста съответно в точките A' и B'. Тогава числото λ, определено от $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\vec{e}$, където $\vec{e}$ е единичен вектор, еднопосочно колинеарен с $\vec{b}$, се нарича *скаларна ортогонална проекция* на вектора $\vec{a}$ върху вектора $\vec{b}$ и се означава с $\operatorname{proj}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Теорема 9.6. *Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са произволни ненулеви вектори. Тогава е в сила равенството*

$$\operatorname{proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}. \quad (9.7)$$

Определение 9.5. Векторът $\overrightarrow{\mathrm{proj}_{\vec{b}}}\,\vec{a} = (\mathrm{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a})\vec{e}$, където $\vec{e}$ е единичен вектор, еднопосочно колинеарен с $\vec{b}$, се нарича *векторна ортогонална проекция* на $\vec{a}$ върху ос, определена от посоката на $\vec{b}$.

Определение 9.6. *Директорни косинуси на посоката*, определена от даден вектор $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$, се наричат косинусите на ъглите α, β и γ, които този вектор сключва съответно с базисните вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

Забележка 9.4. Ако векторът $\vec{e} = (x, y, z)$ е единичен, а базата $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ е ортонормирана, то директорните косинуси на посоката на $\vec{e}$ съвпадат с неговите координати, т.е. $\cos\alpha = x$, $\cos\beta = y$ и $\cos\gamma = z$. Освен това е изпълнено равенството

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Теорема 9.7 (*Метод на Грам*[1]*-Шмид*[2]). *Нека $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ са линейно независими вектори в $\mathbb{R}^m$. Тогава векторите $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, определени от равенствата*

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1 = \vec{a}_1,\\
&\vec{e}_2 = \vec{a}_2 - \tfrac{\vec{e}_1\vec{a}_2}{\vec{e}_1^2}\vec{e}_1,\\
&\vec{e}_3 = \vec{a}_3 - \tfrac{\vec{e}_1\vec{a}_3}{\vec{e}_1^2}\vec{e}_1 - \tfrac{\vec{e}_2\vec{a}_3}{\vec{e}_2^2}\vec{e}_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\vec{e}_n = \vec{a}_n - \tfrac{\vec{e}_1\vec{a}_n}{\vec{e}_1^2}\vec{e}_1 - \tfrac{\vec{e}_2\vec{a}_n}{\vec{e}_2^2}\vec{e}_2 - \dots - \tfrac{\vec{e}_{n-1}\vec{a}_n}{\vec{e}_{n-1}^2}\vec{e}_{n-1},
\end{aligned} \tag{9.8}$$

са ортогонални помежду си.

Забележка 9.5. Векторите $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ от (9.8) могат да бъдат нормирани до получаването на ортонормираната система от вектори $\vec{e}_i' = \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}$. По този начин от произволна база се получава ортонормирана база.

Задача 9.1. *Докажете, че за скаларното произведение на произволни свободни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са изпълнени свойствата:*

а) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$;
б) $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$.

[1] Йорген Грам (1850–1916) – датски математик.

[2] Ерхард Шмид (1876–1959) – немски математик, роден на територията на днешна Естония.

Решение. б) Като използваме последователно определението за скаларен квадрат на свободен вектор (Определение 9.2) и свойствата на скаларното произведение от Теорема 9.1, получаваме

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2.$$

Останалите тъждества се доказват аналогично.

Задача 9.2. *Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са вектори от произволно векторно пространство над $\mathbb{R}$.*

а) Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни и $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, пресметнете $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$ и $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$.

б) Ако $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, пресметнете $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$, $(\vec{a}+\vec{b})^2$, $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

в) Ако $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$, пресметнете $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$ и $(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-4\vec{b})$.

Решение. а) Тъй като $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни, то $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 0$, което означава че $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 1$. Тогава от (9.1) пресмятаме скаларното произведение $\vec{a}\vec{b} = 2.3.1 = 6$ и скаларните квадрати $\vec{a}^2 = 2^2 = 4$ и $\vec{b}^2 = 3^2 = 9$. Като използваме равенството от Задача 9.1 а), установяваме, че $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 4 - 9 = -5$.

б) Аналогично на а), намираме $\vec{a}\vec{b} = 3.4.\cos\frac{\pi}{3} = 6$, $\vec{a}^2 = 9$, $\vec{b}^2 = 16$. Тогава, като използваме равенството от Задача 9.1 б), получаваме:

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 + 2.6 + 16 = 37 \text{ и } (\vec{a}-\vec{b})^2 = 13.$$

Упътване. в) От свойствата на скаларното произведение, като се има предвид, че $\vec{a}\vec{b} = -1$, $\vec{a}^2 = 2$, $\vec{b}^2 = 1$, получаваме

$$(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-4\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} - 8\vec{b}^2 = -4.$$

Задача 9.3. *Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са вектори, за които $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, то намерете:*

а) стойностите на реалния параметър λ, за които векторите $\vec{c} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \lambda\vec{b}$ са взаимно ортогонални;

б) ъгъла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ така, че векторите $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ да сключват ъгъл с големина $\frac{\pi}{4}$.

Решение. От условието на задачата имаме $\vec{a}^2 = 16$ и $\vec{b}^2 = 4$. Тогава:

а) Векторите $\vec{c}$ и $\vec{d}$ са взаимно ортогонални, точно когато $\vec{c}\vec{d} = 0$. Пресмятаме $\vec{c}\vec{d} = (\vec{a}+\lambda\vec{b})(\vec{a}-\lambda\vec{b}) = \vec{a}^2 - \lambda^2\vec{b}^2 = 16 - 4\lambda^2$, откъдето достигаме до уравнението $4 - \lambda^2 = 0$. Следователно $\lambda = \pm 2$.

б) От първото равенство в (9.6) получаваме

$$\begin{aligned}\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) &= \frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \frac{(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})}{\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}} \\ &= \frac{\vec{a}^2-\vec{b}^2}{\sqrt{(\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2)(\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2)}} \\ &= \frac{12}{\sqrt{(20+2\vec{a}\vec{b})(20-2\vec{a}\vec{b})}}. \qquad (9.9)\end{aligned}$$

От друга страна, $\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Следователно $\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Така от последното равенство и (9.9) получаваме

$$\frac{12}{\sqrt{400-4(\vec{a}\vec{b})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откъдето намираме $\vec{a}\vec{b} = \pm 2\sqrt{7}$. Следователно

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pm\frac{2\sqrt{7}}{4.2} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Задача 9.4. *Докажете, че за всеки четири точки A, B, C и D е изпълнено равенството (тъждество на Ойлер)*

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BD} = 0 \qquad (9.10)$$

и като следствие от него докажете, че:

а) височините в триъгълника се пресичат в една точка (ортоцентър);

б) ако две двойки срещуположни ръбове в един тетраедър са перпендикулярни, то и останалите два срещуположни ръба също са перпендикулярни.

Решение. Нека O е произволна точка. Като приложим тъждеството на Шал към лявата страна на (9.10), получаваме

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}) + \\ &(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}).\end{aligned}$$

Оттук, като използваме дистрибутивното свойство на скаларното произведение, получаваме (9.10).

а) Нека AA_1, BB_1 и CC_1 са височини в произволен $\triangle\, ABC$ и H е пресечната точка на AA_1 и BB_1. Ще докажем, че CC_1 също минава през H. Прилагаме тъждеството на Ойлер за A, B, C и H

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BH} = 0.$$

Тъй като $AH \perp BC$ и $BH \perp CA$, то $\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BH} = 0$. Следователно $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CH} = 0$, което показва, че $CH \perp AB$. От друга страна, $CC_1 \perp AB$, което означава, че H лежи на височината CC_1.

Упътване. Твърдението от б) се доказва аналогично на това от а).

В следващите задачи, ако не е указано друго, ще считаме координатната система за дясна ортонормирана.

Задача 9.5. *Намерете скаларното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, техните дължини, както и ъгъла между тях, ако:*

а) $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (2, -1)$;
б) $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, -1)$;
в) $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, 8)$;
г) $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 0, -1)$;
д) $\vec{a} = (2, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$.

Решение. а) От (9.4) получаваме $\vec{a}\vec{b} = 3.2 + 1.(-1) = 5$, $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$. Тогава, след заместване в (9.6), получаваме $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следователно $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

б) Аналогично на а), пресмятаме $\vec{a}\vec{b} = 1.0 + 1.1 + 0.(-1) = 1$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$. Тогава $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, откъдето $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Отговори. в) $\vec{a}\vec{b} = 0$, $|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{69}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$;
г) $\vec{a}\vec{b} = -3$, $|\vec{a}| = \sqrt{6}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$; д) $\vec{a}\vec{b} = 8$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$, $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{8}{9}$.

Задача 9.6. *Намерете вектор $\vec{p}$, сключващ остър ъгъл с оста Oz, колинеарен с вектора $\vec{a} = (2, -3, 6)$ и такъв, че $|\vec{p}| = 14$.*

Решение. От условието за колинеарност между векторите $\vec{p}$ и $\vec{a}$ следва, че $\vec{p} = \lambda\vec{a} = \lambda(2, -3, 6)$. Тогава $|\vec{p}| = |\lambda||\vec{a}| = 7|\lambda| = 14$, откъдето $|\lambda| = 2$, т.е. $\lambda = \pm 2$. Тъй като ъгълът между векторите $\vec{p}$ и $\vec{e}_3 = (0, 0, 1) \parallel Oz$ е остър, то е изпълнено $\vec{p}\vec{e}_3 = 6\lambda > 0$. Следователно търсената стойност на коефициента на колинеарност е $\lambda = 2$, откъдето $\vec{p} = (4, -6, 12)$.

Задача 9.7. *Намерете координатите на вектора $\vec{p}$, сключващ равни тъпи ъгли с векторите $\vec{a} = (-1, 1, -1)$, $\vec{b} = (-1, 1, 1)$ и $\vec{c} = (5, -1, -1)$, ако $|\vec{p}| = \sqrt{5}$.*

Решение. Нека $\vec{p} = (x, y, z)$. Пресмятаме $\vec{a}\vec{p} = y - x - z$, $\vec{b}\vec{p} = y - x + z$, $\vec{c}\vec{p} = 5x - y - z$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{3}$, $|\vec{c}| = 3\sqrt{3}$. Тъй като $\vec{p}$ сключва равни ъгли с $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то е изпълнено $\frac{\vec{a}\vec{p}}{|\vec{a}||\vec{p}|} = \frac{\vec{b}\vec{p}}{|\vec{b}||\vec{p}|} = \frac{\vec{c}\vec{p}}{|\vec{c}||\vec{p}|}$, откъдето след заместване получаваме

$$\frac{y - x - z}{\sqrt{15}} = \frac{y - x + z}{\sqrt{15}} = \frac{5x - y - z}{3\sqrt{15}}.$$

От горните равенства намираме $y = 2x$, $z = 0$. Следователно $\vec{p} = (x, 2x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Сега отчитаме условието за дължината на $\vec{p}$, съгласно което достигаме до уравнението $x^2 + 4x^2 = 5$. Тогава $x = \pm 1$. Така получихме противоположните вектори $\vec{p}_1 = (1, 2, 0)$ и $\vec{p}_2 = (-1, -2, 0)$, които образуват равни ъгли с $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Тъй като $\vec{a}\vec{p}_1 = 1 > 0$, а $\vec{a}\vec{p}_2 = -1 < 0$, то векторът $\vec{p}_2$ сключва равни тъпи ъгли с $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и следователно търсеният вектор е $\vec{p} = \vec{p}_2 = (-1, -2, 0)$.

Задача 9.8. *Намерете директорните косинуси на посоката, определена от насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, ако:*

а) $A(-2, 1, 3)$, $B(0, -1, 2)$;
б) $A(1, 2, 4)$, $B(-1, 4, 8)$;
в) $A(6, 4, 6)$, $B(6, 7, 10)$.

Решение. а) Пресмятаме координатите на $\overrightarrow{AB} = (2, -2, -1)$, откъдето намираме $|\overrightarrow{AB}| = 3$. Тогава директорните косинуси на посоката на $\overrightarrow{AB}$ са координатите на единичния вектор

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{3}(2, -2, -1)$$

и следователно се определят от равенствата

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{1}{3}.$$

Отговори. б) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$; в) $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\gamma = \frac{4}{5}$.

Задача 9.9. *Намерете единичния вектор $\vec{a}$, който сключва ъгли от 45° и 60° съответно с координатните оси Ox и Oy и остър ъгъл γ с Oz. Намерете скаларната проекция на $\vec{a}$ върху вектора $\vec{b} = (\sqrt{2}, -3, -5)$.*

Решение. Тъй като векторът $\vec{a}$ е единичен, то координатните му съвпадат с директорните косинуси на посоката, определена от него, т.е. с косинусите на ъглите, които образува с координатите оси.

Така $\vec{a} = (\cos 45°, \cos 60°, \cos\gamma) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \cos\gamma)$. При това е изпълнено $\cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2\gamma = 1$, откъдето $\cos\gamma = \pm\frac{1}{2}$. Понеже по условие ъгъл γ е остър, то $\cos\gamma = \frac{1}{2}$. Следователно $\vec{a} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Скаларната проекция на $\vec{a}$ върху $\vec{b}$ пресмятаме по формулата

$$\operatorname{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 9.10. *Намерете векторната проекция на $\vec{a} = (4, -3, 2)$ върху ос l, която сключва с координатните оси равни остри ъгли.*

Решение. Най-напред ще намерим единичен вектор $\vec{e}$, определящ посоката върху оста l. Аналогично на предходната задача, имаме

$$\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad \text{и} \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

където α, β и γ са ъглите, които $\vec{e}$ сключва с трите координатни оси. По условие имаме $\alpha = \beta = \gamma$, откъдето следва, че $3\cos^2\alpha = 1$, т.е. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ (защото ъглите са остри). Така получаваме $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Тогава скаларната проекция на $\vec{a}$ върху вектора $\vec{e}$ е $\operatorname{proj}_{\vec{e}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{e}}{|\vec{e}|} = \sqrt{3}$. Следователно векторната проекция на $\vec{a}$ върху оста l е $\overrightarrow{\operatorname{proj}}_{\vec{e}} \vec{a} = (\operatorname{proj}_{\vec{e}} \vec{a})\vec{e} = \sqrt{3}\,\vec{e} = (1, 1, 1)$.

Задача 9.11. *Като използвате метода на Грам-Шмид (Теорема 9.7), ортогонализирайте системите от вектори:*

а) $\vec{a}_1 = (1, -1)$, $\vec{a}_2 = (2, -1)$;
б) $\vec{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 1, -1)$;
в) $\vec{a}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 1)$.

Решение. а) Тъй като координатите на $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не са пропорционални, то двата вектора са линейно независими. Нека $\vec{e}_1 = \vec{a}_1$. Пресмятаме $\vec{e}_1\vec{a}_2 = 3$ и $\vec{e}_1^{\,2} = 2$. Тогава от (9.8) получаваме

$$\vec{e}_2 = \vec{a}_2 - \frac{3}{2}\vec{e}_1 = (2, -1) - \frac{3}{2}(1, -1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

б) Аналогично на подточка а), първо установяваме, че дадените три вектора не са линейно зависими, понеже детерминантата от координатите им е различна от нула. Нека $\vec{e}_1 = \vec{a}_1$. Тогава имаме $\vec{e}_1\vec{a}_2 = -1$, $\vec{e}_1^{\,2} = 2$. Следователно $\vec{e}_2 = (-1, 1, 0) + \frac{1}{2}(1, 0, 1) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$. След това изчисляваме $\vec{e}_1\vec{a}_3 = -1$, $\vec{e}_2\vec{a}_3 = \frac{1}{2}$, $\vec{e}_2^{\,2} = \frac{3}{2}$. Тогава $\vec{e}_3 = \vec{a}_3 + \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

Отговори. в) $\vec{e}_1(0, 1, 1)$, $\vec{e}_2(1, 0, 0)$, $\vec{e}_3(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Задача 9.12. *Даден е $\triangle ABC$ с върхове точките $A(0,-2)$, $B(8,4)$ и $C(3,-6)$. Намерете дължините на медианата през върха C и на ъглополовящата през върха A и докажете, че триъгълникът е правоъгълен.*

Решение. За да намерим дължината на медианата през C, най-напред намираме средата $M(4,1)$ на страната AB. Остава да намерим дължината на насочената отсечка $\overrightarrow{CM}$. За целта пресмятаме $\overrightarrow{CM} = (1,7)$ и намираме $|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{1^2+7^2} = 5\sqrt{2}$.

Нека AL е ъглополовящата през върха A, като $L \in BC$. От училищния курс е известно, че $\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC}$. Пресмятаме $\overrightarrow{AB} = (8,6)$ и $\overrightarrow{AC} = (3,-4)$. Следователно $|\overrightarrow{AB}| = 10$ и $|\overrightarrow{AC}| = 5$. Тогава $\frac{BL}{CL} = \frac{2}{1}$ и от (7.6) получаваме

$$\overrightarrow{AL} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3} = \left(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Оттук пресмятаме $|\overrightarrow{AL}| = \frac{10}{3}\sqrt{2}$.

Тъй като $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = 0$, то триъгълникът е правоъгълен с прав ъгъл при върха A.

Задача 9.13. *Даден е $\triangle ABC$ с върхове $A(2,0,2)$, $B(0,2,-2)$ и $C(2,2,0)$. Намерете:*

а) дължините на страните и големините на вътрешните ъгли на $\triangle ABC$;
б) координатите на петата H на височината през върха A.

Решение. а) Намираме насочените отсечки $\overrightarrow{AB} = (-2,2,-4)$, $\overrightarrow{AC} = (0,2,-2)$ и $\overrightarrow{BC} = (2,0,2)$. За дължините им получаваме съответно $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{6}$, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{2}$ (следователно $\triangle ABC$ е равнобедрен). Пресмятаме скаларните произведения $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC} = 12$ и $\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB} = -4$. Вътрешните ъгли на триъгълника намираме чрез

$$\cos\sphericalangle ABC = \cos\sphericalangle BAC = \cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\sphericalangle ACB = \cos\sphericalangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|} = -\frac{1}{2}.$$

Следователно $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = \frac{\pi}{6}$, $\sphericalangle ACB = \frac{2\pi}{3}$.

б) Тъй като точката H е от правата BC, то насочените отсечки $\overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{BC}$ са колинеарни. Последното условие е равносилно на $\overrightarrow{BH} = x\overrightarrow{BC}$, $x \in \mathbb{R}$. Тъй като AH е височина към страната BC, насочените отсечки $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{BC}$ са перпендикулярни. Следователно имаме $\overrightarrow{AH}\overrightarrow{BC} = 0$. От друга страна, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC}$. Така за неизвестния коефициент на колинеарност x получаваме уравнението $(\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC})\overrightarrow{BC} = 0$, откъдето $x = -\frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}^2} = \frac{3}{2}$. Тогава за радиус-вектора $\overrightarrow{OH}$ на точката H получаваме

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OB} + x\overrightarrow{BC} = (0, 2, -2) + \frac{3}{2}(2, 0, 2).$$

Следователно $H(3, 2, 1)$.

Задача 9.14. *Даден е* $\triangle\ ABC$.

а) Ако $A(3, -1, 3)$, $B(2, 0, 3)$, $C(2, -1, 4)$, *докажете, че* $\triangle\ ABC$ *е равностранен и намерете разстоянието от медицентъра му* G *до центъра на координатната система.*

б) Ако $A(8, 5, 2)$, $B(8, 2, -1)$, $C(6, 3, 1)$, *докажете, че* $\triangle\ ABC$ *е равнобедрен и правоъгълен* ($\sphericalangle C = \frac{\pi}{2}$).

Отговори. а) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(7, -2, 10)$, разстоянието от G до O е $|\overrightarrow{OG}| = \sqrt{17}$; б) $\overrightarrow{CA} = (2, 2, 1)$, $\overrightarrow{CB} = (2, -1, -2)$, откъдето $|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = 3$, $\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB} = 0$.

9.2. **Векторно и смесено произведение на вектори.**

Определение 9.7 (Векторно произведение). *Векторно произведение* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарича векторът $\vec{a} \times \vec{b}$, за който са изпълнени условията:

1) ако $\vec{a} = \vec{o}$ или $\vec{b} = \vec{o}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$;
2) ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ненулеви вектори, то
   а) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$;
   б) $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$, т.е. $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{b} = 0$;
   в) ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, то векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ (в този ред) образуват положително (дясно) ориентирана база в тримерното пространство.

Теорема 9.8. *Ако* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ *и* $\vec{e}_3$ *образуват дясно ориентирана ортонормирана база, то за тях са валидни равенствата:*

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

Теорема 9.9 (Свойства на векторното произведение). *Нека* $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *са произволни вектори, а* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогава са в сила следните равенства:*

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ *(антикомутативност);*
2) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$ *(дистрибутивност);*
3) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ *(хомогенност);*
4) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$ *(тъждество на Лагранж[1]);*
5) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{o}$ *(тъждество на Якоби[2]).*

Теорема 9.10 (Критерий за колинеарност)**.** *Два ненулеви вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *са колинеарни (линейно зависими), точно когато* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.

Теорема 9.11. *Нека относно ортонормирана координатна система са дадени векторите* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *и* $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. *Тогава координатите на векторното произведение* $\vec{a} \times \vec{b}$ *се намират по правилото*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \tag{9.11}$$

Теорема 9.12. *Нека* $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. *Тогава за лицето на успоредника* $S_{усп}$ *и лицето на триъгълника* $S_{тр}$, *определени от* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *са в сила формулите:*

$$S_{усп} = |\vec{a} \times \vec{b}| \quad \text{и} \quad S_{тр} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{9.12}$$

Теорема 9.13. *Нека* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ *и* $C(x_3, y_3)$ *са неколинеарни точки в равнината* Oxy *и означим*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогава лицето на $\triangle\, ABC$ *се пресмята чрез формулата*

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|. \tag{9.13}$$

Теорема 9.14. *За двойното векторно произведение* $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ *са в сила равенствата:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\vec{c})\vec{a}, \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}. \tag{9.14}$$

Определение 9.8 (Смесено произведение)*. Смесено произведение* на три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се нарича реалното число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, определено от равенството

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}. \tag{9.15}$$

[1]Джузепе Лодовико Лаграджиа (1736–1813) – италиански математик и астроном, по-известен под името Жозеф Луи Лагранж.

[2]Карл Густав Якоб Якоби (1804–1851) – немски математик.

Теорема 9.15 (Свойства на смесеното произведение)**.** *Нека $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ са произволни вектори, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава са в сила следните равенства:*
1) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$;
2) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}$;
3) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\,\vec{d} = \vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}$;
4) $(\lambda\vec{a})\vec{b}\,\vec{c} = \lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$,

Теорема 9.16 (Критерий за компланарност)**.** *Три ненулеви вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни (линейно зависими), точно когато $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$.*

Теорема 9.17. *Нека относно ортонормирана КС са дадени векторите $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$. Тогава е в сила равенството*

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{9.16}$$

Теорема 9.18. *Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са некомпланарни. Тогава за обема на паралелепипеда $V_{пар}$ и обема на триъгълната пирамида (тетраедъра) $V_{тет}$, определени от $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, са в сила формулите:*

$$V_{пар} = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}| \quad и \quad V_{тет} = \frac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|. \tag{9.17}$$

Задача 9.15. *Нека $\overrightarrow{AB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, където $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са единични вектори. Намерете ъгъла, образуван от $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако дължината на медианата AM в $\triangle\, ABC$ е $\frac{\sqrt{13}}{4}$.*

Решение. Тъй като $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, то за намирането на ъгъла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е достатъчно да намерим $\vec{a}\vec{b}$. Понеже точка M е среда на BC, то $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Нека $x = \vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$. Тогава от първото равенство в (9.14) получаваме

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}^{\,2}\,\vec{b} - (\vec{b}\,\vec{a})\vec{a} = \vec{b} - x\vec{a}.$$

Следователно

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{b} - x\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(2\vec{b} - x\vec{a}),$$

откъдето получаваме (вж. Задача 9.1 б))

$$\overrightarrow{AM}^{\,2} = \frac{1}{4}(4\vec{b}^2 - 4x\vec{b}\,\vec{a} + x^2\vec{a}^2) = \frac{4 - 3x^2}{4}.$$

От друга страна, $\overrightarrow{AM}^{\,2} = \frac{13}{16}$ (по условие), което ни води до $12x^2 = 3$, чиито решения са $x = \pm\frac{1}{2}$. Следователно $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}\,) = \pm\frac{1}{2}$, което означава че $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}\,) = \frac{\pi}{3}$ или $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}\,) = \frac{2\pi}{3}$.

Задача 9.16. *Намерете координатите на векторите* $(\vec{a} \times \vec{b}\,) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ *и* $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\,)$, *и пресметнете стойността на* $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, *ако:*

а) $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (3, -1, 2)$, $\vec{c} = (1, 0, -1)$;
б) $\vec{a} = (-2, 2, 1)$, $\vec{b} = (4, 1, -3)$, $\vec{c} = (0, 1, 2)$;
в) $\vec{a} = (2, 3, 0)$, $\vec{b} = (1, -2, 5)$, $\vec{c} = (-1, 3, 1)$.

Решение. а) Съгласно (9.11) пресмятаме

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (5, 1, -7).$$

Аналогично намираме $(\vec{a} \times \vec{b}\,) \times \vec{c} = (-1, -2, -1)$ и $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\,) = (-3, 0, 3)$. Като се има предвид (9.16), получаваме

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 12.$$

Отговори. б) $(-7, -2, -10)$, $(6, 14, -7)$, $(16, 13, 6)$, -22;
в) $(15, -10, -7)$, $(11, -8, 35)$, $(3, -2, 39)$, -52.

Задача 9.17. *Дадени са векторите* $\vec{a} = (4, -2, -4)$, $\vec{b} = (0, 1, 4)$ *и* $\vec{c} = (1, 1, 1)$. *Намерете координатите на вектора* $\vec{p}$, *перпендикулярен на* $\vec{a}$ *и на* $\vec{b}$, *ако* $|\vec{p}| = 6\sqrt{2}$ *и ъгълът между* $\vec{p}$ *и* $\vec{c}$ *е остър.*

Решение. Ще решим задачата по два начина.

Начин 1. При това решение ще използваме само свойствата на скаларното произведение. Нека $\vec{p} = (x, y, z)$. Тъй като $\vec{p} \perp \vec{a}$ и $\vec{p} \perp \vec{b}$, то имаме $\vec{p}\vec{a} = 0$ и $\vec{p}\vec{b} = 0$. От последните две условия получаваме хомогенната система уравнения

$$\left| \begin{array}{l} 4x - 2y - 4z = 0 \\ y + 4z = 0, \end{array} \right.$$

чиито решения са $y = 4x$, $z = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Следователно векторите $\vec{p} = (x, 4x, -x)$ са едновременно перпендикулярни на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отчитайки и условието за дължината на $\vec{p}$, достигаме до уравнението $\sqrt{x^2 + 16x^2 + (-x)^2} = 6\sqrt{2}$ с решения $x = \pm 2$. Така получаваме векторите $\vec{p}_1 = (2, 8, -2)$ и $\vec{p}_2 = (-2, -8, 2)$. Пресмятаме $\vec{p}_1\vec{c} = 8 > 0$ и $\vec{p}_2\,\vec{c} = -8 < 0$. Следователно векторът $\vec{p}_1$ сключва остър ъгъл с

$\vec{c}$, а векторът $\vec{p}_2$ – тъп. Така установихме, че търсеният вектор е $\vec{p} = \vec{p}_1 = (2, 8, -2)$.

Начин 2. При това решение ще използваме и свойствата на векторното произведение. Понеже векторът $\vec{p}$ е ортогонален едновременно на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\vec{p}$ трябва да бъде колинеарен с векторното им произведение $\vec{a} \times \vec{b} = (-4, -16, 4)$. Следователно $\vec{p} = x(-4, -16, 4)$, $x \in \mathbb{R}$. Съгласно условието за дължината на $\vec{p}$, получаваме уравнението $12|x|\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, откъдето намираме $x = \pm\frac{1}{2}$. По-нататък решението продължава като по първия начин.

Задача 9.18. *Намерете вектора $\vec{p}$, който е перпендикулярен на векторите $\vec{a} = (2, -3, 1)$ и $\vec{b} = (6, -2, 3)$, ако скаларното му произведение с вектора $\vec{c} = (1, 2, 7)$ е равно на 13.*

Отговори. $\vec{p} = (-1, 0, 2)$.

Задача 9.19. *Дадени са точките $A(1, -2, 3)$, $B(2, 1, 2)$ и $C(3, 2, 1)$. Намерете вектора $\vec{p}$, колинеарен на височината през върха A в $\triangle\, ABC$, ако е известно, че $|\vec{p}\,| = 4\sqrt{6}$ и ъгълът между $\vec{p}$ и абсцисната ос е остър.*

Решение. Понеже търсеният вектор $\vec{p}$ е колинеарен на височината през A, то $\vec{p}$ е перпендикулярен на $\overrightarrow{BC} = (1, 1, -1)$. Ще намерим още един вектор, перпендикулярен на $\vec{p}$. Тъй като векторът $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (-2, 0, -2)$ е едновременно перпендикулярен на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, то $\vec{n}$ е перпендикулярен на равнината на $\triangle\, ABC$. Векторът $\vec{p}$ е колинеарен на права от равнината на $\triangle\, ABC$. Следователно $\vec{n} \perp \vec{p}$. Тогава векторът $\vec{p}$ е едновременно перпендикулярен на $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BC}$ и следователно е колинеарен на векторното произведение $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) \times \overrightarrow{BC} = (2, -4, -2)$. Оттук нататък задачата се решава аналогично на предходните две задачи.

Отговори. $\vec{p} = (4, -8, -4)$.

Задача 9.20. *Определете стойностите на реалния параметър λ така, че векторите $\vec{a} = (1, 2, \lambda)$, $\vec{b} = (4, 5, 6)$ и $\vec{c} = (7, 8, \lambda^2)$ да бъдат компланарни.*

Упътване. Използвайте, че $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни, точно когато $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Отговори. $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$.

Задача 9.21. *Намерете лицето на $\triangle\, ABC$ с върхове $A(2, -2, 0)$, $B(4, 0, 1)$ и $C(0, -2, 1)$.*

Решение. Пресмятаме векторното произведение на две насочени отсечки, определени от две от страните на триъгълника, например $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -4, 4)$. Тогава, съгласно формула (9.12), имаме

$$S_{ABC} = \tfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \tfrac{6}{2} = 3.$$

Задача 9.22. *Намерете разстоянието от точката* $A(0, -2)$ *до правата, определена от точките* $B(-3, 4)$ *и* $C(1, 1)$.

Решение. Ще решим задачата по два начина. Най-напред ще отбележим, че търсеното разстояние се явява дължината на височината към страната BC в $\triangle\, ABC$.

Начин 1. Ще използваме $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. И така, намираме $\overrightarrow{AB} = (-3, 6)$ и $\overrightarrow{AC} = (1, 3)$. Тъй като $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ лежат в равнината Oxy, то третите им координати са равни на нула, т.е. $\overrightarrow{AB} = (-3, 6, 0)$ и $\overrightarrow{AC} = (1, 3, 0)$. Тогава от (9.11) получаваме $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 0, -15)$. Като използваме формулата за лице на триъгълник (9.12), намираме $S_{ABC} = \frac{15}{2}$. От друга страна, $S_{ABC} = \frac{BC\, h_A}{2}$, където височината h_A е търсеното разстояние. Пресмятаме $\overrightarrow{BC} = (4, -3)$ и $|\overrightarrow{BC}| = 5$. Така достигаме до $\frac{5h_A}{2} = \frac{15}{2}$, откъдето $h_A = 3$.

Начин 2. Тъй като върховете на $\triangle\, ABC$ лежат в равнината Oxy, то можем да използваме формула (9.13). Пресмятаме детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15,$$

откъдето $S_{ABC} = \frac{15}{2}$. Оттук нататък решението е същото като по първия начин.

Задача 9.23. *Даден е тетраедърът* $ABCD$ *с върхове* $A(1, -1, 2)$, $B(2, 3, -1)$, $C(4, 3, -1)$, $D(2, 5, 5)$. *Намерете разстоянието от* D *до равнината на* $\triangle\, ABC$.

Решение. Най-напред ще намерим обема на тетраедъра $ABCD$, като използваме (9.17). За целта намираме координатите на три насочени отсечки, определени от три произволни ръба на тетраедъра, например $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 4, -3)$ и $\overrightarrow{AD} = (1, 6, 3)$. Сега, съгласно (9.16), пресмятаме тяхното смесено произведение $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = -60$. Така от (9.17) получаваме $V_{ABCD} = 10$. От друга страна, от училищния курс знаем, че $V_{ABCD} = \frac{S_{ABC}\, h_D}{3}$, където височината h_D през върха D се явява търсеното разстояние. Пресмятаме $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, -6, -8)$ и съгласно (9.12) намираме $S_{ABC} = 5$. Така достигаме до $\frac{5h_D}{3} = 10$, откъдето $h_D = 6$.

Задача 9.24. *Намерете ортогоналната проекция на $\vec{c} = (4, -2, 1)$ върху равнината, определена от $\vec{a} = (2, -3, -3)$ и $\vec{b} = (1, -1, -2)$.*

Решение. Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и C' е ортогоналната проекция на C върху равнината α, определена от $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогава $\overrightarrow{OC'}$ е представител на вектора $\vec{c}'$, който е ортогоналната проекция на $\vec{c}$ в α. Тъй като $CC' \perp \alpha$, то насочената отсечка $\overrightarrow{CC'}$ е колинеарна с вектора $\vec{a} \times \vec{b} = (3, 1, 1)$, т.е. $\overrightarrow{CC'} = \lambda(3, 1, 1)$. От тъждеството на Шал имаме $\vec{c}' = \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CC'} = (3\lambda + 4, \lambda - 2, \lambda + 1)$. Освен това $\vec{c}'$ е компланарен с $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следователно, от критерия за компланарност, имаме $\vec{a}\vec{b}\vec{c}' = 0$. От последното условие намираме $\lambda = -1$. Окончателно получаваме $\vec{c}' = (1, -3, 0)$.

Задача 9.25. *Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ са произволни вектори. Докажете тъждествата:*

а) $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{b} \times \vec{c})(\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2$;
б) $\vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = (\vec{b}\,\vec{d})(\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b}\,\vec{c})(\vec{a} \times \vec{d})$;
в) $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 + ((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c})^2 = (\vec{a} \times \vec{b})^2 \vec{c}^2$;
г) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 (\vec{a} \times \vec{c})^2 - [(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{c})]^2 = \vec{a}^2 (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2$;
д) $[\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})][(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}] = -(\vec{a}\vec{c})(\vec{a} \times \vec{b})^2$.

Решение. д) Като използваме последователно формулите за двойно векторно произведение и дистрибутивното свойство на скаларното произведение, получаваме

$$\begin{aligned}
[\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})][(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}] &= -(\vec{a}^2\vec{b} - (\vec{a}\,\vec{b})\vec{a})((\vec{a}\,\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\,\vec{c})\vec{a}) \\
&= -[\vec{a}^2\vec{b}^2\vec{a}\vec{c} - \vec{a}^2(\vec{b}\,\vec{c})(\vec{a}\,\vec{b}) - (\vec{a}\vec{b})^2\vec{a}\vec{c} + (\vec{a}\,\vec{b})(\vec{b}\,\vec{c})\vec{a}^2] \\
&= -\vec{a}\,\vec{c}[\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2] = -\vec{a}\,\vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})^2.
\end{aligned}$$

Упътване. За преобразуване на дясната страна на тъждеството от подточка а) използвайте определението за смесено произведение, за б) – формулите за двойно векторно произведение, а за в) и г) – тъждеството на Лагранж.

9.3. **Приложения в механиката.**

Теорема 9.19 (Работа)**.** *Работата W, която силата $\vec{F}$ извършва за праволинейното преместване на материална точка по посока на вектора $\vec{s}$, е равна на скаларното произведение на силата и вектора на преместването, т.е.*

$$W = \vec{F}\,\vec{s}. \tag{9.18}$$

Теорема 9.20 (Въртящ момент)**.** *Нека твърдо тяло е закрепено в точката A, а в точката B е приложена сила $\vec{F}$. Тогава векторът $\vec{M}$ на въртящия момент на $\vec{F}$ относно точката A се пресмята като векторно произведение на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ и вектора на силата $\vec{F}$, т.е.*

$$\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}. \tag{9.19}$$

Задача 9.26. *Към връх на куб със страна 1 са приложени три сили с големини 1, 2 и 3, като направленията им съвпадат с диагоналите на страните на куба, минаващи през този връх. Намерете големината на равнодействащата на трите сили.*

Решение. Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е произволен куб с дължина на страната 1. За краткост ще означим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. БОНО можем да приемем, че трите сили $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ и $\vec{F_3}$ са приложени към върха A по посока на куба, т.е. са еднопосочно колинеарни с насочените отсечки $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{AD_1}$. Следователно, имаме

$$\begin{aligned} &\vec{F_1} = \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda(\vec{a}+\vec{b}),\ \vec{F_2} = \mu\overrightarrow{AB_1} = \mu(\vec{a}+\vec{c}),\\ &\vec{F_3} = \nu\overrightarrow{AD_1} = \nu(\vec{b}+\vec{c}), \end{aligned} \tag{9.20}$$

където $\lambda, \mu, \nu > 0$. Известно е, че равнодействащата $\vec{F}$ на трите сили е равна на тяхната сума. Тогава, от определението за скаларен квадрат на вектор и свойствата на скаларното произведение, получаваме

$$\vec{F}^{\,2} = (\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3})^2 = \vec{F_1}^2+\vec{F_2}^2+\vec{F_3}^2+2(\vec{F_1}\vec{F_2}+\vec{F_1}\vec{F_3}+\vec{F_2}\vec{F_3}). \tag{9.21}$$

Очевидно, за да намерим $|\vec{F}|$, е необходимо да пресметнем найдесния израз в (9.21). Като се има предвид, че $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1$ и $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c} = 0$, от свойствата на скаларното произведение и

(9.20), получаваме

$$\begin{aligned} &\vec{F}_1^{\,2} = \lambda^2(\vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^{\,2}) = 2\lambda^2, \quad \vec{F}_2^{\,2} = 2\mu^2, \quad \vec{F}_2^{\,2} = 2\nu^2 \\ &\vec{F}_1\vec{F}_2 = \lambda\mu(\vec{a} + \vec{b}\,)(\vec{a} + \vec{c}\,) = \lambda\mu(\vec{a}^{\,2} + \vec{a}\,\vec{c} + \vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c}\,) = \lambda\mu \\ &\vec{F}_1\vec{F}_3 = \lambda\nu, \quad \vec{F}_2\vec{F}_3 = \mu\nu. \end{aligned} \tag{9.22}$$

От друга страна, по условие имаме

$$|\vec{F}_1| = \sqrt{\vec{F}_1^{\,2}} = 1, \quad |\vec{F}_2| = \sqrt{\vec{F}_2^{\,2}} = 2 \quad \text{и} \quad |\vec{F}_3| = \sqrt{\vec{F}_3^{\,2}} = 3,$$

т.е. $\vec{F}_1^{\,2} = 1$, $\vec{F}_2^{\,2} = 4$, $\vec{F}_3^{\,2} = 9$. Оттук и от първия ред на (9.22) намираме стойностите на коефициентите на колинеарност $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mu = \sqrt{2}$, $\nu = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Следователно $\vec{F}_1\vec{F}_2 = 1$, $\vec{F}_1\vec{F}_3 = \frac{3}{2}$ и $\vec{F}_2\vec{F}_3 = 3$. Така, като заместим в (9.21), получаваме $\vec{F}^2 = 25$, т.е. $|\vec{F}| = 5$.

Задача 9.27. *Дадени са сили* $\vec{F}_1 = (3, 4, -2)$ *и* $\vec{F}_2 = (2, -3, 5)$, *приложени в една точка. Определете каква работа ще извърши равнодействащата на тези сили* $\vec{F}$, *ако нейната приложна точка се движи праволинейно от* $A(5, -3, -4)$ *до* $B(4, -1, 1)$.

Решение. Намираме равнодействащата сила $\vec{F}$ на силите $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ чрез $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (5, 1, 3)$. Намираме и координатите на насочената отсечка $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 5)$, която е представител на вектора на преместването от A до B. Тогава, съгласно (9.18), за работата, извършена от силата $\vec{F}$, пресмятаме $W = \vec{F}\,\overrightarrow{AB} = 12$.

Задача 9.28. *Определете работата, която ще извърши силата* $\vec{F} = (3, -2, -5)$, *ако приложната ѝ точка се движи праволинейно от* $A(2, -3, 5)$ *до* $B(3, -2, -1)$.

Отговори. $W = 31$.

Задача 9.29. *Дадени са силите* $\vec{F}_1 = (2, -1, -3)$, $\vec{F}_2 = (3, 2, -1)$ *и* $\vec{F}_3 = (-4, 1, 3)$ *и приложна точка* $B(-1, 4, -2)$. *Намерете големината на въртящия момент* $\vec{M}$ *на равнодействащата сила* $\vec{F}$ *на трите сили относно точката* $A(2, 3, -1)$.

Решение. Векторът на равнодействащата сила $\vec{F}$ на трите сили е $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1, 2, -1)$, а $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, -1)$. Тогава, като вземем предвид формула (9.19), за момента $\vec{M}$ на силата $\vec{F}$ относно A пресмятаме $\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = (1, -4, -7)$. Следователно големината на момента е $|\vec{M}| = \sqrt{66}$.

Задача 9.30. *Нека силата* $\vec{F} = (3, 2, -4)$ *е приложена в точката* $A(2, -1, 1)$. *Намерете големината на момента* $\vec{M}$ *на* $\vec{F}$ *относно координатното начало.*

Упътване. Тъй като $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = (2, 11, 7)$, то $|\vec{M}| = \sqrt{174}$.