11. Уравнения на права и окръжност в равнина

Чистата математика е поезия от логически идеи.

Алберт Айнщайн

11.1. Уравнения на права в равнина.

Нека в равнината Oxy относно произволна координатна система са дадени точката $M_0(x_0, y_0)$ и ненулевият вектор $\vec{p}$. Разглеждаме множеството от точки $M(x, y)$ в Oxy, за които векторите $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ са колинеарни, т.е.

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p},$$

където $\lambda \in \mathbb{R}$. Това множество представлява *права линия* (*права*), която означаваме с g. Ще покажем различни начини за задаване на уравнението на g.

Определение 11.1. Нека $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ са съответно радиус-векторите на точките M и M_0 и векторът $\vec{p}$ е колинеарен с $\overrightarrow{M_0M}$. Тогава уравнението

$$g\colon \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{p} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{11.1}$$

се нарича *векторно параметрично уравнение* на правата g, минаваща през точките M и M_0. Точките M_0 и M се наричат съответно *фиксирана* и *текуща точка*, векторът $\vec{p}$ се нарича *направляващ вектор* на правата, а числото λ се нарича *параметър* на правата.

Определение 11.2. Нека $\vec{p} = (a, b)$ е колинеарен вектор на правата g, $M_0(x_0, y_0) \in g$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава уравненията

$$g: \left| \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{array} \right. \tag{11.2}$$

се наричат *скаларно параметрични уравнения* на g.

Определение 11.3. Нека $\vec{p} = (a, b)$ е колинеарен вектор на правата g и $M_0(x_0, y_0) \in g$. Тогава

$$g: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \tag{11.3}$$

се нарича *канонично уравнение* на g.

Определение 11.4. Нека $\vec{p} = (a, b)$ е колинеарен вектор на правата g и $M_0(x_0, y_0) \in g$. Тогава

$$g:\ Ax + By + C = 0, \tag{11.4}$$

където $A = b$, $B = -a$, $C = ay_0 - bx_0$, се нарича *общо уравнение* на g. Векторът $\overrightarrow{N} = (A, B)$ и всеки вектор, колинеарен с $\overrightarrow{N}$, се нарича *нормален вектор* на g.

Забележка 11.1. Уравнението

$$g:\ A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{11.5}$$

е уравнение на правата g, построена през фиксираната точка M_0 с нормален вектор $\overrightarrow{N} = (A, B)$.

Забележка 11.2. Ако относно ортонормирана координатна система в равнината правата g има направляващ вектор $\vec{p} = (a, b)$, то векторите, колинеарни с $(b, -a)$, са перпендикулярни на направлението на правата, т.е. са нормални вектори за правата. Обратно, ако $\overrightarrow{N} = (A, B)$ е нормален вектор на g, то векторите, колинеарни с $(B, -A)$, са направляващи за g.

Определение 11.5. Относно ортонормирана КС уравнението

$$g:\ y = kx + n, \tag{11.6}$$

получено от (11.4) чрез преобразуване и въвеждане на означенията $k = -\frac{A}{B}$ и $n = -\frac{C}{B}$ $(B \neq 0)$, се нарича *декартово уравнение* на правата g. Реалното число k се нарича *ъглов коефициент* на g и се пресмята по формулата $k = \mathrm{tg}\alpha$, където α е ъгълът, който правата сключва с положителната посока на оста Ox. Числото n се нарича *отрез* на правата g от оста Oy.

Забележка 11.3. От условието $B \neq 0$ следва, че правите, успоредни на Oy (както и Oy), нямат декартови уравнения.

Теорема 11.1. *Относно ортонормирана КС* декартовото уравнение *на правата g през точката $M_0(x_0, y_0)$ с ъглов коефициент k се определя от*

$$g:\ y = k(x - x_0) + y_0. \tag{11.7}$$

Теорема 11.2. *Нека $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ са две различни точки. Тогава скаларно параметричните и каноничното уравнение на правата g, минаваща през M_1 и M_2, се определят съответно от*

$$g:\ \left|\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{array}\right., \qquad g:\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{11.8}$$

Определение 11.6. Уравнението

$$g:\ \frac{x}{c}+\frac{y}{d}=1, \tag{11.9}$$

където $c, d \neq 0$, се нарича *отрезово уравнение* на правата g. Реалните числа c и d се наричат *отрези* на g съответно от оста Ox и Oy.

Забележка 11.4. Правата с уравнение (11.9) пресича координатните оси Ox и Oy съответно в точки $M_1(c,0)$ и $M_2(0,d)$.

Теорема 11.3 (Положения на права относно КС)**.** *Нека относно ортонормирана КС е дадена правата $g:\ Ax+By+C=0$. Тогава:*

1) *Правата g минава през координатното начало $O(0,0)$, точно когато $C=0$, т.е. има общо уравнение от вида $Ax+By=0$.*
2) *Правата g е успоредна на Ox, точно когато $A=0$, т.е. има общо уравнение от вида $By+C=0$. Ако $M_0(x_0,y_0)$ е една фиксирана точка от g, то уравнението на правата може да се запише във вида*
$$g:\ y=y_0. \tag{11.10}$$
3) *Правата g е успоредна на Oy, точно когато $B=0$, т.е. има общо уравнение от вида $Ax+C=0$. Ако $M_0(x_0,y_0)$ е една фиксирана точка от g, то уравнението на правата може да се запише във вида*
$$g:\ x=x_0. \tag{11.11}$$

Забележка 11.5. Абсцисната ос Ox има общо уравнение $y=0$, а ординатната ос Oy има общо уравнение $x=0$.

Взаимно положение на две прави в една равнина

Теорема 11.4. *Нека относно ортонормирана координатна система са дадени правите*

$$g_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{и} \quad g_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Тогава:

1) *Правите g_1 и g_2 съвпадат, точно когато $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.*
2) *Правите g_1 и g_2 са успоредни, точно когато $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.*
3) *Правите g_1 и g_2 се пресичат, точно когато $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$.*

Теорема 11.5. *Нека относно ортонормирана координатна система са дадени правите $g_1:\ y=k_1x+n_1$ и $g_2:\ y=k_2x+n_2$. Тогава:*

1) *Правите g_1 и g_2 са взаимно перпендикулярни, точно когато $k_1k_2=-1$.*

2) Правите g_1 и g_2 са успоредни, точно когато $k_1 = k_2$ и $n_1 \neq n_2$.

Теорема 11.6. *Ако правите g_1 и g_2 имат ъглови коефициенти съответно k_1 и k_2, то ъглите между тях се получават чрез*

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}, \qquad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{11.12}$$

Определение 11.7 (Сноп прави в равнина). Съвкупността от всички прави, които лежат в една равнина и минават през една точка S, се нарича *сноп прави*, а точката S се нарича *център на снопа*.

Теорема 11.7. *Нека $g_1 : A_1x+B_1y+C_1 = 0$ и $g_2 : A_2x+B_2y+C_2 = 0$ са две прави от сноп с център точката S. Тогава всяка права от този сноп има уравнение от вида*

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{11.13}$$

където $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Теорема 11.8 (Разстояние от точка до права)**.** *Нека относно ортонормирана координатна система са дадени правата $g : Ax + By + C = 0$ и точката $M(x_0, y_0)$. Тогава ориентираното разстояние $\delta(M, g)$ и абсолютното разстояние $d(M, g)$ от точката M до правата g се пресмятат съответно чрез формулите:*

$$\delta(M, g) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{11.14}$$

и $d(M, g) = |\delta(M, g)|$, т.е.

$$d(M, g) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{11.15}$$

Забележка 11.6. Точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ се намират в една и съща полуравнина относно правата g, ако числата $g(M_1) = Ax_1 + By_1 + C$ и $g(M_2) = Ax_2 + By_2 + C$ са с еднакви знаци, и в различни полуравнини относно g, ако $g(M_1)$ и $g(M_2)$ са с противоположни знаци.

Теорема 11.9 (Уравнение на ъглополовяща)**.** *Ъглополовящите l_1 и l_2 на двата ъгъла, получени при пресичането на две прави $g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $g_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, се определят от уравненията*

$$l_{1,2} : \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{11.16}$$

Забележка 11.7. Знакът „+“ в уравненията (13.10) се отнася за ъглополовящата на ъгъла, съдържащ точките, чиито ориентирани разстояния до двете прави са с еднакви знаци, а знакът „−“ за ъглополовящата на ъгъла, съдържащ точките, чиито ориентирани разстояния до двете прави са с противоположни знаци.

Ако не е указано друго, в следващите задачи ще считаме координатната система за дясна ортонормирана.

Задача 11.1. *Намерете общото уравнение на правата g, която минава през точката $M(2,-1)$ и*

а) точката $N(3,1)$;
б) е успоредна на Ox (съответно Oy);
в) е успоредна на правата $l:\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}$;
г) е успоредна на правата $m:\ x-3y+10=0$;
д) е перпендикулярна на правата $p:\ 5x+3y-4=0$;
е) сключва ъгъл от 135° с положителната посока на Ox;
ж) отсича от положителните посоки на координатните оси отрези с равни дължини.

Решение. а) Като заместим координатите на точките M и N в (11.8), получаваме каноничното уравнение

$$g:\ \frac{x-2}{3-2}=\frac{y-(-1)}{1-(-1)}\quad\Rightarrow\quad g:\ \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}. \tag{11.17}$$

След освобождаване от знаменателите в последното уравнение и преобразуване достигаме до общото уравнение $g:\ 2x-y-5=0$. Ще отбележим, че същият резултат се получава и в случай че разменим местата на точките M и N в (11.17).

б) За правите през M, успоредни на двете координатни оси Ox и Oy, можем да използваме съответно формулите (11.10) и (11.11). Така получаваме $y=-1$ и $x=2$. Оттук получаваме общите уравнения $y+1=0$ и $x-2=0$.

в) Тъй като успоредните помежду си прави имат колинеарни направляващи вектори, то направляващият вектор $\vec{p}=(3,-2)$ на дадената права l ще бъде направляващ вектор и за търсената права g. Следователно, като имаме предвид, че $M(2,-1)\in g$, от (11.3) получаваме

$$g:\ \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}\quad\Rightarrow\quad g:\ 2x+3y-1=0.$$

г) Успоредните прави имат колинеарни нормални вектори. Следователно нормалният вектор $\overrightarrow{N}_m = (1, -3)$ на правата m е нормален вектор и за търсената права. Можем да постъпим по два начина.

Начин 1. Заместваме координатите на нормалния вектор $\overrightarrow{N}_g = (1, -3)$ на g и на фиксираната точка $M(2, -1)$ в уравнението (11.5), откъдето получаваме

$$g:\ 1(x-2) - 3(y+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad g:\ x - 3y - 5 = 0. \tag{11.18}$$

Начин 2. Най-напред заместваме координатите на нормалния вектор $\overrightarrow{N}_g = (1, -3)$ в (11.4), откъдето следва че общото уравнение на търсената права е от вида

$$g:\ x - 3y + C = 0, \tag{11.19}$$

където C е неизвестна константа. Определяме C от условието, че g минава през точката $M(2, -1)$, като заместим координатите на M в (11.19). Така получаваме уравнението $2 - 3(-1) + C = 0$, чието решение е $C = -5$. Накрая заместваме намерената стойност за C в (11.19) и отново достигаме до крайния резултат в (11.18).

д) Тъй като правите g и p са взаимно перпендикулярни, нормалният вектор $\overrightarrow{N}_p = (5, 3)$ на p е направляващ вектор за g. Тогава, съгласно (11.3), получаваме

$$g:\ \frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{3} \quad \Rightarrow \quad g:\ 3x - 5y - 11 = 0.$$

Задачата може да бъде решена и аналогично на подточка г), като използваме, че нормалните вектори на две перпендикулярни прави са взаимно перпендикулярни. Тогава, тъй като нормалният вектор на p е $\overrightarrow{N}_p = (5, 3)$, то векторът $\overrightarrow{N}_g = (3, -5)$ е нормален за g.

е) В декартовото уравнение (11.6) заместваме първоначално ъгловия коефициент $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$ на g и получаваме

$$g:\ y = -x + n.$$

След това отчитаме, че $M(2, -1)$ лежи върху g и следователно координатите ѝ удовлетворяват горното уравнение, т.е. $-1 = -2 + n$, откъдето намираме $n = 1$. Тогава декартовото уравнение на търсената права е $g:\ y = -x + 1$ и следователно за общото ѝ уравнение получаваме $g:\ x + y - 1 = 0$.

ж) Тъй като по условие отрезите на правата g от Ox и Oy са равни и положителни ($c = d > 0$), то съгласно (11.9) отрезовото уравнение на g има вида

$$g: \frac{x}{c} + \frac{y}{c} = 1 \quad \Rightarrow \quad g: x + y = c.$$

Стойността на константата c намираме, като заместим координатите на точката $M(2, -1)$ в уравнението на g. Така получаваме $c = 1$. Следователно общото уравнение на тази права е $g: x + y - 1 = 0$.

Задача 11.2. *Намерете пресечните точки на правата $l: 2x - 5y - 10 = 0$ с координатните оси и през тези точки прекарайте прави, перпендикулярни на l.*

Решение. Пресечната точка на правата l и абсцисната ос Ox е точката A, чиито координати са решение на системата от уравненията на двете прави, т.е.

$$\left|\begin{array}{l} 2x - 5y - 10 = 0 \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Така получаваме $A(5, 0)$. Аналогично, пресечната точка B на l и ординатната ос Oy е решението на системата

$$\left|\begin{array}{l} 2x - 5y - 10 = 0 \\ x = 0, \end{array}\right.$$

откъдето намираме $B(0, -2)$. По-нататък задачата се решава аналогично на Задача 11.1 д).

Друг начин, по който лесно могат да бъдат получени координатите на пресечните точки на правата с координатните оси, е като от общото уравнение на правата получим отрезовото ѝ уравнение, т.е. уравнение от вида (11.9)

$$l: 2x - 5y - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad l: \frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1.$$

Тогава отрезите на l от Ox и Oy са съответно $c = 5$ и $d = -2$. Съгласно Забележка 11.4, се вижда, че правата l пресича Ox и Oy в намерените по-горе точки A и B.

Отговори. $5x + 2y - 25 = 0$; $5x + 2y + 4 = 0$.

Задача 11.3. *Намерете стойностите на $a, b \in \mathbb{R}$, за които правите $g: ax - 2y + 1 = 0$ и $l: 6x - 4y + b = 0$: а) съвпадат; б) са успоредни; в) се пресичат; г) са перпендикулярни.*

Решение. Съгласно Теорема 11.4, е известно, че:

а) g и l съвпадат, точно когато

$$\frac{a}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{b}.$$

Използвайки свойствата на пропорциите, от горните равенства намираме $a = 3$, $b = 2$.

б) g и l са успоредни, точно когато

$$\frac{a}{6} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad a = 3, \quad b \neq 2.$$

в) g и l се пресичат, точно когато

$$\frac{a}{6} \neq \frac{-2}{-4} \quad \Rightarrow \quad a \neq 3, \quad b \in \mathbb{R}.$$

г) Нормалните вектори на двете прави са $\overrightarrow{N}_g(a, -2)$ и $\overrightarrow{N}_l(6, -4)$. Правите g и l се перпендикулярни, точно когато $\overrightarrow{N}_g \perp \overrightarrow{N}_l$, т.е. точно когато $\overrightarrow{N}_g \overrightarrow{N}_l = 0$. От последното условие получаваме $6a + 8 = 0$. Следователно $a = -\frac{4}{3}$ ($b \in \mathbb{R}$).

Задача 11.4. *Дадени са правата $g : 3x - y - 11 = 0$ и точката $A(1, 2)$. Намерете:*

а) точката A' – ортогонално симетрична на A относно g;
б) правата g' – симетрична на g относно A;
в) точката P от g, която е равноотдалечена от точките A и $B(0, -1)$;
г) точка Q от g, която е равноотдалечена от точката A и правата $l : x - y - 7 = 0$.

Решение. а) Точката A' е ортогонално симетрична на A относно правата g, ако A' е образът на A при осева симетрия относно g, т.е. ако отсечката AA' е перпендикулярна на g и се разполовява от нея. Тогава за намирането на A' можем да приложим следните стъпки:

Стъпка 1. Построяваме права p през A, която е перпендикулярна на g. Аналогично на Зад. 11.1 д), получаваме $p : x + 3y - 7 = 0$.

Стъпка 2. Намираме пресечната точка M на правите g и p, като решим системата

$$\left| \begin{array}{l} x + 3y - 7 = 0 \\ 3x - y - 11 = 0. \end{array} \right.$$

Така получаваме $M(4, 1)$.

Стъпка 3. Отчитайки, че M е средата на отсечката AA', съгласно формула (7.7), пресмятаме $A' = 2M - A = 2(4, 1) - (1, 2) = (7, 0)$.

б) Правите g и g' са симетрични относно точката A, ако са успоредни помежду си и са на равни разстояния от A. От условието за успоредност на g и g' за общото уравнение на g' получаваме

$g' : 3x - y + C = 0$. Остава да намерим свободния член C. От условието за равноотдалеченост на двете прави от точка A следва, че ориентираните разстояния от A до g и от A до g' ще се различават само по знак. Съгласно (11.14) пресмятаме

$$\delta(A, g) = \frac{3.1 - 2 - 11}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{-10}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10}.$$

Следователно $\delta(A, g') = \sqrt{10}$. Отново чрез (11.14) намираме

$$\delta(A, g') = \frac{3.1 - 2 + C}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{C + 1}{\sqrt{10}}.$$

Така достигаме до уравнението $C + 1 = 10$, откъдето $C = 9$ и следователно $g' : 3x - y + 9 = 0$.

в) От уравнението на правата g изразяваме едната от двете променливи, например y, и получаваме

$$y = 3x - 11. \tag{11.20}$$

Тъй като търсената точка P лежи върху g, то нейните координати удовлетворяват уравнението на g и следователно зависимостта (11.20). Тогава координатите на тази точка са $P(x_0, 3x_0 - 11)$, където $x_0 \in \mathbb{R}$ е търсената неизвестна. Пресмятаме координатите на насочените отсечки $\overrightarrow{AP} = (x_0 - 1, 3x_0 - 13)$ и $\overrightarrow{BP} = (x_0, 3x_0 - 10)$. Условието точка P да бъде равноотдалечена от A и B е равносилно на

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (3x_0 - 13)^2} = \sqrt{x_0^2 + (3x_0 - 10)^2}.$$

Единственото решение на последното уравнение е $x_0 = \frac{7}{2}$. Следователно $P(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$.

г) Както в подточка в), търсената точка от g се определя от $Q(x_0, 3x_0 - 11)$. Тогава $\overrightarrow{AQ} = (x_0 - 1, 3x_0 - 13)$. Като използваме формулата (11.15) за разстоянието от Q до правата l, пресмятаме

$$d(Q, l) = \frac{|x_0 - 3x_0 + 11 - 7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 2x_0|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(4 - 2x_0)^2}}{\sqrt{2}}.$$

Тогава трябва да намерим онази стойност на x_0, за която $|\overrightarrow{AQ}| = d(Q, l)$, т.е. да решим уравнението

$$\sqrt{(x_0 - 1)^2 + (3x_0 - 13)^2} = \frac{\sqrt{(4 - 2x_0)^2}}{\sqrt{2}}.$$

Решение на последното уравнение е $x_0 = \frac{9}{2}$, което означава, че търсената точка е $Q(\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$.

Задача 11.5. *Дадени са правата $l: 3x + 4y - 5 = 0$ и точката $A(6, 3)$. Намерете:*

а) ортогонално симетричната точка A' на A относно l;
б) права g, успоредна на l, която е на разстояние $\frac{1}{5}$ от l;
в) права p, перпендикулярна на l, която е на разстояние 3 от A.

Решение. б) Тъй като g е успоредна на l, то g има общо уравнение от вида $g: 3x + 4y + C = 0$. Избираме произволна точка от l, например точката $M(3, -1)$. Тогава за разстоянието от M до g знаем, че $d(M, g) = \frac{1}{5}$. От друга страна, съгласно (11.15), пресмятаме

$$d(M, g) = \frac{|3.3 - 4.1 + C|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|C + 5|}{5}.$$

Като вземем предвид равенствата за $d(M, g)$, достигаме до уравнението $|C + 5| = 1$, чиито решения са $C_1 = -4$ и $C_2 = -6$. Следователно двете прави, удовлетворяващи условието на задачата, са $g_1: 3x + 4y - 4 = 0$ и $g_2: 3x + 4y - 6 = 0$.

в) От условието $p \perp l$ следва, че общото уравнение на p е от вида $p: 4x - 3y + C = 0$. Съгласно (11.15), намираме

$$d(A, p) = \frac{|4.6 - 3.3 + C|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|C + 15|}{5}.$$

Следователно, като вземем предвид условието, $\frac{|C+15|}{5} = 3$. Решенията на последното уравнение са $C_1 = 0$ и $C_2 = -30$. Така намираме двете прави $p_1: 4x - 3y = 0$ и $p_2: 4x - 3y - 30 = 0$.

Отговори. а) $A'(0, -5)$.

Задача 11.6. *Намерете уравнението на правите l, минаващи през точка $M(-1, 2)$ и сключващи ъгъл 45° с правата $g: x - 3y + 2 = 0$.*

Решение. Декартовото уравнение на правата g има вида $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Следователно ъгловият коефициент на тази права е $k_g = \frac{1}{3}$. От друга страна, съгласно (11.7), декартовото уравнение на права l, минаваща през точката M, е $l\colon y = k(x+1) + 2$, където k е неизвестният ъглов коефициент на l. Съгласно формула (11.12) и условието на задачата, за ъгла между g и l имаме

$$\operatorname{tg} \sphericalangle(g, l) = \pm \frac{k - \frac{1}{3}}{1 + \frac{k}{3}} = 1.$$

Решавайки двете уравнения за k, намираме $k_1 = 2$ и $k_2 = -\frac{1}{2}$. Следователно правите, удовлетворяващи условието на задачата, са $l_1\colon 2x - y + 4 = 0$ и $l_2\colon x + 2y - 3 = 0$.

Задача 11.7. *Светлинен лъч, пуснат от точката* $A(1,1)$*, след отразяването си от правата* $a:\ x-y-2=0$*, става успореден на правата* $b:\ 3x-y+5=0$*. Намерете уравненията на правите* l *и* l'*, съдържащи съответно падащия и отразения лъч.*

Решение. От оптиката е известно, че ъгълът на падане е равен на ъгъла на отразяване (правите l и l' сключват равни ъгли с правата a). Следователно ортогонално симетричните точки на точките от l относно правата a ще лежат върху l' и обратно. Означаваме с A' ортогонално симетричната точка на A относно a и като използваме Задача 11.5 а), намираме $A'(3,-1)$. Тогава построяваме правата l' през точката A' и успоредна на правата b. Така получаваме $l':\ 3x-y-10=0$. След това намираме координатите на точката на падане (отразяване) P като пресечна точка на правите a и l'. Решавайки системата от техните уравнения, получаваме $P(4,2)$. Правата l също минава през тази точка. Тогава построяваме уравнението на l през точките A и P. Така намираме $l:\ x-3y+2=0$.

Задача 11.8. *Светлинен лъч, насочен по правата* $l:\ 2x-3y-12=0$*, се отразява от оста* Ox*. Намерете уравнението на правата, съдържаща отразения лъч.*

Упътване. Намерете пресечната точка A на l и Ox. Изберете произволна точка B от l, различна от A, и намерете ортогонално симетричната ѝ точка B' относно Ox. Тогава l' минава през A и B'.

Отговори. $l':\ 2x+3y-12=0$.

Задача 11.9. *Намерете уравнението на права, отсичаща от положителните посоки на координатните оси отрези, чиито дължини се отнасят, както* $1:2$*, ако лицето на триъгълника, който правата образува при пресичането си с осите, е* 36*.*

Решение. Съгласно условието на задачата, ако $a>0$ е отрезът от положителната посока на оста Ox, то отрезът от Oy е $2a$. Следователно отрезовото уравнение на търсената права има вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1 \quad \Rightarrow \quad 2x+y-2a=0.$$

Триъгълникът, който правата загражда при пресичането си с координатните оси, е правоъгълен и катетите му имат дължини, равни на дължините на съответните отрези, т.е. a и $2a$. Тогава за лицето на този триъгълник пресмятаме $S=\frac{2a.a}{2}=a^2=36$. Следователно $a=6$ и търсената права има общо уравнение $2x+y-12=0$.

Задача 11.10. *Намерете уравнението на ъглополовящата на тъпия ъгъл между правите* $p:5x+12y-5=0$ *и* $q:3x-4y-3=0$*.*

Решение. За решаване на задачата ще използваме едно познато свойство на фигурата ромб – а именно, че диагоналите на ромб са ъглополовящи на ъглите му. За да приложим това свойство, първо намираме направляващи вектори $\vec{p}$ и $\vec{q}$ на двете прави, които определят тъпия ъгъл между тях. За тази цел използваме условието, че ъгълът между два вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$ е тъп, точно когато $\vec{p}\vec{q} < 0$. Такива вектори са например $\vec{p}(-12, 5) \parallel p$ и $\vec{q}(4, 3) \parallel q$. След това намираме единичните вектори $\vec{p}'$ и $\vec{q}'$, еднопосочно колинеарни съответно с $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Пресмятаме $|\vec{p}| = \sqrt{144 + 25} = 13$ и $|\vec{q}| = \sqrt{16 + 9} = 5$. Тогава $\vec{p}' = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = (-\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ и $\vec{q}' = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Тъй като векторите $\vec{p}'$ и $\vec{q}'$ определят ромб (със страна единица), то векторът $\vec{l}$ от диагонала на този ромб е колинеарен с търсената ъглополовяща. Съгласно правилото на успоредника за събиране на вектори, получаваме $\vec{l} = \vec{p}' + \vec{q}' = (-\frac{8}{65}, \frac{64}{65}) \parallel (-1, 8)$.

Намираме пресечната точка $M(1, 0)$ на правите p и q като решение на системата от техните уравнения.

Тогава построяваме уравнението на ъглополовящата l на тъпия ъгъл между p и q като права през M с направляващ вектор $(-1, 8)$ и получаваме $l: 8x + y - 8 = 0$.

Задача 11.11. *Намерете уравненията на правите, които са на разстояние* 2 *от точката* $A(1, 0)$ *и принадлежат на снопа, съдържащ правите* $l_1: x + y = 0$ *и* $l_2: x + 2y - 1 = 0$.

Решение. Като вземем предвид (11.13), общото уравнение на права g от снопа, съдържащ l_1 и l_2, се определя от $\lambda(x+y)+\mu(x+2y-1) = 0$, т.е.

$$g: (\lambda + \mu)x + (\lambda + 2\mu)y - \mu = 0. \tag{11.21}$$

Съгласно (11.15), разстоянието от A до g е

$$d(A, g) = \frac{|\lambda|}{\sqrt{(\lambda + \mu)^2 + (\lambda + 2\mu)^2}}. \tag{11.22}$$

От друга страна, по условие имаме $d(A, g) = 2$. Оттук и (11.22) получаваме $\frac{\lambda_1}{\mu_1} = -2$ и $\frac{\lambda_2}{\mu_2} = -\frac{10}{7}$. Избираме две двойки стойности за параметрите λ и μ, удовлетворяващи горните условия, например $(\lambda_1, \mu_1) = (2, -1)$ и $(\lambda_2, \mu_2) = (10, -7)$. Тогава, след заместване на тези стойности в (11.21), получаваме уравненията на две прави от снопа $g_1: x + 1 = 0$ и $g_2: 3x - 4y + 7 = 0$, които са решения на задачата.

Задача 11.12. *Даден е* $\triangle ABC$ *с върхове* $A(3, -1)$, $B(1, 4)$ *и медицентър* $G(0, 2)$. *Намерете:*

а) координатите на върха C;
б) уравненията на страните на $\triangle ABC$;
в) уравненията на височините в $\triangle ABC$;
г) уравненията на симетралите на страните на $\triangle ABC$.

Решение. а) Съгласно формулата за медицентър (7.9), за координатите на точка C пресмятаме $C = 3G - A - B = 3(0,2) - (3,-1) - (1,4) = (-4,3)$.

б) Като използваме (11.8), за уравненията на страните на $\triangle ABC$ получаваме $AB : 5x + 2y - 13 = 0$, $AC : 4x + 7y - 5 = 0$, $BC : x - 5y + 19 = 0$.

в) Тъй като височината h_A през върху A е перпендикулярна на страната BC, построяваме нейното уравнения като права през точката A с нормален вектор $\overrightarrow{BC}(-5,-1)$. С помощта на (11.5) получаваме $h_A : 5x+y-14 = 0$. Аналогично за останалите две височини намираме $h_B : 7x - 4y + 9 = 0$ и $h_C : 2x - 5y + 23 = 0$.

г) Симетралата s_{AB} на страната AB минава през средата ѝ M и е перпендикулярна на нея. Чрез (7.7) намираме $M(2, \frac{3}{2})$. Тогава, като използваме (11.5), построяваме уравнението на s_{AB} като права през M с нормален вектор $\overrightarrow{AB}(-2,5)$. По този начин получаваме уравнението $s_{AB} : 4x - 10y + 7 = 0$. Аналогично, за другите две симетрали получаваме $s_{AC} : 14x - 8y + 15 = 0$, $s_{BC} : 5x + y + 4 = 0$.

Задача 11.13. *Даден е $\triangle ABC$ с върхове $A(2,3)$, $B(5,7)$, $C(-3,-9)$. Намерете уравненията на медианата m, височината h и на ъглополовящата l на вътрешния ъгъл при A.*

Решение. За намиране уравнението на ъглополовящата през върха A могат да бъдат използвани Зад. 11.10 или Зад. 9.12. Тук ще разгледаме по-подробно трети начин за решаване на същата задача чрез формула (13.10). Първо намираме уравненията на правите g_1 и g_2, съдържащи съответно страните AB и AC, както следва $g_1 : 4x - 3y + 1 = 0$ и $g_2 : 12x - 5y - 9 = 0$. Тогава, съгласно (13.10), уравненията на ъглополовящите на двата ъгъла, получени при пресичането на g_1 и g_2, т.е. на двата ъгъла при върха A, имат вида

$$l_{1,2} : \frac{4x - 3y + 1}{5} = \pm \frac{12x - 5y - 9}{13}. \tag{11.23}$$

За да определим коя от двете прави в (11.23) е ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A, използваме точка, лежаща в този ъгъл. Такава точка е например средата $M(1,-1)$ на отсечката BC. Пресмятаме ориентираните разстояния от тази точка до правите g_1 и g_2, както следва $\delta(M, g_1) = \frac{8}{5}$ и $\delta(M, g_2) = \frac{8}{13}$. Тъй като двете ориентирани разстояния са с еднакви знаци, то от (11.23) избираме уравнението със знак „+“. Следователно търсената ъглополовяща има уравнение $l:\ 4x+7y-29=0$.

Упътване. За уравненията на медианата и височината използвайте Зад. 11.12.

Отговори. $m:\ 4x-y-5=0$; $h:\ x+2y-8=0$.

Задача 11.14. *Бедрата на равнобедрен триъгълник лежат на правите с уравнения $g_1:\ x-2y+3=0$ и $g_2:\ 2x-y-6=0$. Намерете уравнението на основата му, ако тя минава през точката $P(2,4)$.*

Решение. Ще използваме, че правата, съдържаща основата на равнобедрен триъгълник, е перпендикулярна на ъглополовящата на срещуположния ѝ ъгъл, т.е. на ъгъла между бедрата му. Уравненията на ъглополовящите l_1 и l_2 на двата ъгъла между правите g_1 и g_2 се определят чрез

$$l_{1,2}:\ \frac{x-2y+3}{\sqrt{5}}=\pm\frac{2x-y-6}{\sqrt{5}},$$

откъдето получаваме $l_1:\ x+y-9=0$ и $l_2:\ x-y-1=0$. Тогава търсените прави са две, които означаваме с p_1 и p_2. Построяваме уравненията им като прави през P, перпендикулярни съответно на l_1 и l_2. Следователно намираме $p_1:\ x-y+2=0$ и $p_2:\ x+y-6=0$.

Задача 11.15. *Основата и едното бедро на равнобедрен триъгълник лежат съответно върху правите с уравнения $g_1:\ x+y+1=0$ и $g_2:\ x-3y+9=0$. Ако точката $P(2,1)$ е от другото бедро на триъгълника, намерете координатите на върховете му.*

Решение. Намираме уравнението на правата $l:\ x+y-3=0$ през P, успоредна на основата g_1. След това намираме координатите на $P'(0,3)$ – пресечната точка на l и g_2. Тъй като триъгълникът е равнобедрен, то средата $N(1,2)$ на отсечката PP' лежи върху височината към основата. Построяваме уравнението на тази височина $h:\ x-y+1=0$ като права през N, перпендикулярна на основата g_1. Два от върховете на триъгълника намираме като пресечни точки съответно на g_1 и g_2 и на h и g_2. Нека това са съответно върховете $A(-3,2)$ и $C(3,4)$. Тогава координатите на върха $B(1,-2)$ получаваме, като отчетем, че $M=h\cap g_1=(-1,0)$ е средата на отсечката AB.

Задача 11.16. *Дадена е точка $A(1,7)$. Ако правите $p:\ 2x+3y-10=0$ и $q:\ x-2y+3=0$ са симетрали съответно на страните AB и AC на $\triangle\, ABC$, намерете координатите на B и C.*

Решение. Намираме уравненията на страните AB и AC като прави през A, перпендикулярни на съответните им симетрали. Така получаваме $AB : 3x - 2y + 11 = 0$ и $AC : 2x + y - 9 = 0$. След това намираме пресечната точка на всяка от тези страни със съответната ѝ симетрала – средите на страните. Така средата на AB е $M(-1, 4)$, а на AC е $N(3, 3)$. За да намерим координатите на върховете B и C, прилагаме формулата за среда на отсечка, съгласно която $B = 2M - A$, $C = 2N - A$. Следователно $B(-3, 1)$ и $C(5, -1)$.

Задача 11.17. *Две от медианите в $\triangle ABC$ лежат върху правите $m : x + y - 3 = 0$ и $p : 2x + 3y - 1 = 0$, а точката $A(1, 1)$ е връх на триъгълника. Намерете координатите на останалите два върха и уравненията на страните на триъгълника.*

Решение. Проверяваме, че координатите на точката A не удовлетворяват уравненията на правите m и p. Следователно тези прави задават медианите през останалите два върха на триъгълника. Нека m е медианата през B, а p е медианата през C. За да намерим координатите на B и C, е удобно да използваме скаларно параметрични уравнения за правите m и p.

От уравнението на m изразяваме $y = 3 - x$. Тогава можем да изберем x за параметър на правата, т.е. $x = s$, и в такъв случай, съгласно (11.2), скаларно параметричните уравнения на тази права имат вида

$$m : \left| \begin{array}{l} x = s \\ y = 3 - s. \end{array} \right. \tag{11.24}$$

Тъй като точката B е от правата m, то съществува стойност на параметъра $s = s_0$, за която координатите на B удовлетворяват уравнението (11.24). Следователно координатите на тази точка са от вида $B(s_0, 3 - s_0)$.

Тъй като векторът $\overrightarrow{N} = (2, 3)$ е нормален за правата p, то векторът $\vec{p} = (3, -2)$ е направляващ за нея. Избираме една точка от p, например точката $D(-1, 1)$. Тогава, като вземем предвид (11.2), скаларно параметричните уравнения на тази права са

$$p : \left| \begin{array}{l} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 2t, \end{array} \right. \tag{11.25}$$

където с t сме означили параметъра на правата. Тъй като точката C лежи на правата p, то нейните координати са от вида $C(-1 + 3t_0, 1 - 2t_0)$.

Тогава, за да намерим координатите на B и C, трябва да намерим стойностите s_0 и t_0 на параметрите на правите m и p, които отговарят на тези точки.

Нека с M и N означим съответно средите на страните AB и AC. Тогава, използвайки познатата формула за среда на отсечка, за координатите на тези точки получаваме

$$M\left(\frac{1+s_0}{2}, \frac{4-s_0}{2}\right), \quad N\left(\frac{3t_0}{2}, 1-t_0\right). \tag{11.26}$$

Сега отчитаме, че M лежи на медианата през върха C, т.е. на правата p, а N лежи на медианата през върха B, т.е. на правата m. Следователно координатите на M и N трябва да удовлетворяват съответно уравненията на p и m. След заместване на координатите на тези точки от (11.26) в съответните общи уравнения на двете прави, дадени в условието на задачата, намираме търсените стойности на параметрите $s_0 = 12$ и $t_0 = 4$. Следователно $B(12, -9)$ и $C(11, -7)$.

Отговори. $AB:\ 10x + 11y - 21 = 0$; $AC:\ 4x + 5y - 9 = 0$;
$BC:\ 2x + y - 15 = 0$.

Задача 11.18. *За правоъгълния* $\triangle\ ABC$ *(*$\sphericalangle C = 90^\circ$*) е известно, че* $C(2, 3)$ *е един от върховете му,* $M(1, 6)$ *е средата на хипотенузата, а точката* $D(7, 4)$ *лежи на хипотенузата. Намерете координатите на върховете* A *и* B *и уравненията на страните на триъгълника.*

Решение. Тъй като точките M и D са от хипотенузата AB, то насочената отсечка $\overrightarrow{MD} = (6, -2) \parallel \vec{p} = (3, -1)$, т.е. $\vec{p}$ е направляващ вектор за правата AB. Тогава, съгласно (11.2), скаларно параметричните уравнения на тази права се определят от

$$AB: \left|\begin{array}{l} x = 1 + 3s \\ y = 6 - s. \end{array}\right.$$

Следователно върхът A ще има координати от вида $A(1+3s_0, 6-s_0)$. Тъй като M е средата на AB, съгласно формулата за среда на отсечка, за другия връх от хипотенузата получаваме $B(1-3s_0, 6+s_0)$. Намираме координатите на насочените отсечки $\overrightarrow{AC} = (1-3s_0, s_0-3)$ и $\overrightarrow{BC} = (1 + 3s_0, -s_0 - 3)$. Условието $\sphericalangle C = 90^\circ$ е еквивалентно на $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0$. Пресмятаме скаларното произведение и достигаме до квадратното уравнение

$$(1 - 3s_0)(1 + 3s_0) - (s_0 - 3)(s_0 + 3) = 0,$$

чиито корени са $s_0 = \pm 1$. При $s_0 = 1$ имаме $A(4, 5)$, $B(-2, 7)$, а за $s_0 = -1$ получаваме $A(-2, 7)$, $B(4, 5)$. Уравненията на правите, съдържащи двата катета, са $x - y + 1 = 0$ и $x + y - 5 = 0$.

Задача 11.19. *За* $\triangle ABC$ *с ортоцентър* $H(14, 15)$ *е известно, че* $AB : x+2y-5 = 0$, $AC : 5x+4y-13 = 0$. *Намерете координатите на върховете на триъгълника и лицето му.*

Решение. Намираме $A(1, 2)$ като пресечна точка на AB и AC. Построяваме височините $h_B : 4x-5y+19 = 0$ и $h_C : 2x-y-13 = 0$ като прави през H, перпендикулярни съответно на AC и AB. Тогава $B(-1, 3)$ е пресечната точка на h_B и AB, а $C(5, -3)$ на h_C и AC. Накрая пресмятаме $S_{ABC} = 3$.

Задача 11.20. *Диагоналите на успоредника* $ABCD$ *се пресичат в точка* $O(3, 2)$. *Ако* $A(5, 1)$ *и* $B(2, -1)$, *то намерете координатите на другите два върха на успоредника, уравненията на страните му и лицето му.*

Упътване. Използвайте, че O е среда на AC и BD.

Отговори. $C(1, 3)$, $D(4, 5)$; $AB : 2x-3y-7 = 0$, $CD : 2x-3y+7 = 0$, $AD : 4x + y - 21 = 0$, $BC : 4x + y - 7 = 0$; $S_{ABCD} = 14$.

Задача 11.21. *Намерете уравненията на страните на квадрат* $ABCD$, *ако два от неговите върхове са* $A(2, 0)$ *и* $B(-1, 4)$.

Упътване. Намерете уравнението на AB като права през A и B, уравненията на AD и BC като прави съответно през A и B, перпендикулярни на AB, а на CD като права, успоредна на AB и такава, че $d(A, CD) = |\overrightarrow{AB}|$.

Отговори. $AB : 4x + 3y - 8 = 0$; $AD : 3x - 4y - 6 = 0$; $BC : 3x - 4y + 19 = 0$; $(CD)_1 : 4x + 3y + 17 = 0$, $(CD)_2 : 4x + 3y - 33 = 0$.

11.2. **Уравнение на окръжност в равнина.**

Определение 11.8. Множеството от всички точки в една равнина, които се намират на равни разстояния r от дадена фиксирана точка C от същата равнина, се нарича *окръжност*. Точката C се нарича *център* на окръжността, а разстоянието r – *радиус* на окръжността.

Теорема 11.10. *Относно ортонормирана координатна система в равнината* Oxy *уравнението на окръжност* k *с център точката* $C(a, b)$ *и радиус* $r > 0$ *е*

$$k : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \tag{11.27}$$

Теорема 11.11. *Уравнението от втора степен*

$$x^2 + y^2 + mx + ny + l = 0 \tag{11.28}$$

е уравнение на окръжност, точно когато

$$m^2 + n^2 - 4l > 0. \tag{11.29}$$

В такъв случай център и радиус на окръжността са съответно

$$C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right) \quad \text{и} \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 4l}.$$

Забележка 11.8. Окръжност k с център точката $C(a, b)$ и радиус r се задава параметрично чрез:

$$k : \left| \begin{array}{l} x = a + r\cos\varphi \\ y = b + r\sin\varphi, \end{array} \right.$$

където параметърът φ се изменя в интервал с дължина 2π, например $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Теорема 11.12 (Взаимно положение на точка и окръжност)**.** *Нека в равнината Oxy е дадена окръжност k с център точката $C(a, b)$ и радиус $r > 0$. Тогава са в сила твърденията:*

1) Точката $M(x_0, y_0)$ лежи във вътрешността на окръжността, точно когато $F(M) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 < 0$.
2) Точката $M(x_0, y_0)$ лежи върху окръжността, точно когато $F(M) = 0$.
3) Точката $M(x_0, y_0)$ лежи вън от окръжността, точно когато $F(M) > 0$.

Забележка 11.9. За установяване на взаимното положение на точката M и окръжността k, зададена с (11.27), можем да сравним дължината на насочената отсечка $\overrightarrow{CM}$ с радиуса r. Изброените по-горе три случая се получават съответно при $|\overrightarrow{CM}| < r$, $|\overrightarrow{CM}| = r$ и $|\overrightarrow{CM}| > r$.

Теорема 11.13 (Допирателни прави към окръжност)**.** *Нека в равнината Oxy е дадена окръжност k с център точката $C(a, b)$ и радиус $r > 0$. Тогава са в сила твърденията:*

1) През точка, вътрешна за окръжността k, не минават реални допирателни прави към k.

2) През точка $M(x_0, y_0)$, лежаща върху окръжността k, минава единствена допирателна към k. Нейното уравнение се задава чрез формулата

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0 \tag{11.30}$$

или чрез

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2. \tag{11.31}$$

3) През точка, външна за окръжността k, минават две допирателни към k.

Задача 11.22. *Проверете дали дадените по-долу уравнения задават окръжност и в такъв случай намерете центъра и радиуса ѝ:*

а) $4x^2 - 4y^2 - 6xy + 4y - 1 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$;
г) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 4 = 0$;
е) $x^2 + y^2 + 5x - 5y + 12 = 0$;
ж) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y + 19 = 0$.

Решение. а) Даденото уравнение не е от вида (11.28), тъй като коефициентите пред x^2 и y^2 не са равни и присъства събираемо xy. Следователно това уравнение не задава окръжност (уравнението определя друг вид крива от втора степен).

б) Даденото уравнение е от вида (11.28). За да установим дали това уравнение задава окръжност, остава да проверим дали е изпълнено условието (11.29). Един начин да направим това е, като в лявата страна на даденото уравнение отделим точни квадрати. Преобразуваме уравнението, както следва

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 10y + 25) - 25 = 0.$$

Последното уравнение е еквивалентно на

$$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

Тогава, съгласно (11.27), даденото уравнение задава окръжност с център $C(-1, 5)$ и радиус $r = 5$.

в) Както в подточка б), уравнението е от вида (11.28), но (11.29) не е изпълнено, тъй като $2^2 + (-4)^2 - 4.9 < 0$. Следователно това не е уравнение на окръжност.

г) Уравнението е от вида (11.28) и условието (11.29) е изпълнено (проверете). Тогава отделяме точни квадрати, както следва

$$3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3\left(y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) - 1 = 0.$$

Откъдето получаваме

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

Следователно уравнението задава окръжност с център $C(1, -\frac{2}{3})$ и радиус $r = \frac{4}{3}$.

Отговори. д) $C(0,0)$, $r = 2$; е) $C(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$, $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $C(1,-2)$, $r = \frac{1}{2}$.

Задача 11.23. *Намерете уравнението на окръжност:*

а) с център точката $C(-2,3)$ и радиус $r = 4$;
б) с център точката $C(2,1)$, ако точката $M(-2,4)$ лежи на окръжността;
в) с диаметър отсечката AB, ако $A(2,-2)$ и $B(8,6)$;
г) с център $C(2,2)$, ако правата $p : 3x + y - 18 = 0$ се допира до окръжността;
д) с център $C(5,4)$, допираща се външно до окръжността с уравнение $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$.

Решение. а) Чрез заместване на радиуса и координатите на центъра в (11.27) получаваме $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$.

б) За радиуса r на търсената окръжност е валидно $r = |\overrightarrow{CM}| = 5$. Тогава, аналогично на подточка а), намираме $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

в) Тъй като отсечката AB е диаметър, то средата $C(5,2)$ на AB е центърът на търсената окръжност, а радиусът ѝ $r = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = 5$. Следователно уравнението на тази окръжност е

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

г) Тъй като правата p се допира до търсената окръжност, разстоянието $d(C,p)$ от центъра ѝ C до p е равно на радиуса на окръжността. Чрез (11.15) пресмятаме $d(C,p) = \sqrt{10}$. Следователно уравнението на окръжността е $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$.

д) Както в Зад. 11.22, установяваме, че даденото уравнение задава окръжност с център $C'(2,0)$ и радиус $r' = 3$. Тъй като дадената и търсената окръжност се допират външно, то $CC' = r + r'$, където r е радиусът на търсената окръжност. Пресмятаме $\overrightarrow{CC'} = (-3,-4)$, откъдето $|\overrightarrow{CC'}| = 5$ и следователно $r = 5 - 3 = 2$. Търсената окръжност се определя от $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 4$.

Задача 11.24. *Намерете уравнението на окръжността, описана около триъгълника с върхове $A(1,-1)$, $B(1,1)$, $D(5,3)$.*

Решение. Ще решим задачата по два начина.

Начин 1. Тъй като уравнението на търсената окръжност е от вида (11.28), то ще намерим стойностите на неизвестните коефициенти m, n и l. Заместваме координатите на трите точки A, B и D, лежащи върху окръжността, в уравнението (11.28) и така получаваме определената система

$$\left|\begin{aligned} &m - n + l = -2\\ &m + n + l = -2\\ &5m + 3n + l = -34. \end{aligned}\right.$$

Решението на горната система е $m = -8$, $n = 0$, $l = 6$. След заместване на тези стойности в (11.28) установяваме, че търсената окръжност има уравнение $x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$.

Начин 2. От училищния курс по геометрия е известно, че центърът на описаната около триъгълник окръжност е пресечната точка на симетралите на страните му. Затова ще построим уравненията на две симетрали в $\triangle\, ABC$, например симетралите s_1 и s_2 съответно на страните AB и AD. Намираме координатите на средите $M(1,0)$ на AB и $N(3,1)$ на AD. Построяваме правата s_1 през M, перпендикулярна на $\overrightarrow{AB} = (0,2)$, и правата s_2 през N, перпендикулярна на $\overrightarrow{AD} = (4,4)$. Тези прави имат уравнения съответно $s_1 : y = 0$ и $s_2 : x + y - 4 = 0$. Тогава тяхната пресечна точка $C(4,0)$ е центърът на търсената окръжност. Радиусът получаваме, като намерим дължината на някой от векторите $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ или $\overrightarrow{DC}$. Така достигаме до уравнението $(x-4)^2 + y^2 = 10$, което е еквивалентно на уравнението, получено по първия начин.

Задача 11.25. *Намерете окръжността през точките $A(3,0)$ и $B(-1,2)$, ако центърът ѝ лежи на правата $l : x + 2y - 3 = 0$. Намерете допирателните към окръжността, които са успоредни на l.*

Решение. За първата част на задачата постъпваме аналогично на Зад. 11.23 г). Намираме уравнението на симетралата s на страната AB, $s : 2x - y - 1 = 0$. Тогава центърът на окръжността е пресечната точка на s и дадената права l. Така намираме $C(1,1)$. Радиусът на окръжността е $r = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$. Тогава търсената окръжност се задава с уравнението

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5. \qquad (11.32)$$

Права, допирателна към окръжността и успоредна на l, има общо уравнение от вида

$$p : x + 2y + a = 0, \qquad (11.33)$$

където a е неизвестна константа. Всяка допирателна права и окръжността, към която тя се допира, имат единствена обща точка. Следователно стойността на a трябва да бъде такава, че системата от уравненията

$$\left| \begin{array}{l} (x-1)^2+(y-1)^2=5 \\ x+2y+a=0 \end{array} \right.$$

да има единствено решение. След заместване на $x=-2y-a$ в първото уравнение и преобразуване достигаме до квадратното уравнение

$$5y^2+2(2a+1)y+a^2+2a-3=0. \tag{11.34}$$

Стойността на a трябва да бъде определена така, че (11.34) да има единствено решение. Тъй като коефициентът пред y^2 не може да се анулира, горното условие е възможно само когато дискриминантата D на (11.34) е равна на нула. Пресмятаме $D=a^2+6a-16$. Уравнението $D=0$ има два корена, $a_1=-8$ и $a_2=2$. Чрез заместване на тези стойности в (11.33) получаваме уравненията на търсените допирателни $p_1: x+2y-8=0$ и $p_2: x+2y+2=0$.

Задача 11.26. *Намерете уравнението на окръжност, която се допира до координатните оси и минава през точката $A(2,4)$.*

Решение. Тъй като окръжността се допира до координатните оси Ox и Oy, то $d(C,Ox)=d(C,Oy)=r$, където r е радиусът на окръжността. Тогава, ако $C(x_0,y_0)$ е центърът на тази окръжност, то $|x_0|=|y_0|=r$. Освен това отчитаме, че C и A трябва да лежат в един и същи квадрант. Тъй като A се намира в първи квадрант, то $x_0>0$ и $y_0>0$, откъдето получаваме $C(r,r)$. Понеже точката A лежи на окръжността, то $|\overrightarrow{AC}|=r$. Оттук, като се има предвид че $\overrightarrow{AC}=(r-2,r-4)$, достигаме до квадратното уравнение $r^2-12r+20=0$ с корени $r_1=2$ и $r_2=10$. Следователелно $C_1(2,2)$, $C_2(10,10)$ и уравненията на двете окръжности, удовлетворяващи условието на задачата, са: $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ и $(x-10)^2+(y-10)^2=100$.

Задача 11.27. *Намерете уравнението на окръжност, която се допира до положителни части на координатните оси, ако центърът ѝ лежи на правата $g: 5x-3y-10=0$.*

Упътване. Използвайте Зад. 11.26.

Отговори. $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

Задача 11.28. *Определете взаимното положение на окръжността $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ и точки $M(2,-2)$, $N(7,-1)$ и $P(-5,-10)$.*

Решение. Нека означим $F(x, y) = (x-3)^2+(y+4)^2-25$. Замествайки координатите на всяка от дадените точки в $F(x, y)$, получаваме съответно

$$F(M) = F(2, -2) = (2-3)^2 + (-2+4)^2 - 25 = -20 < 0,$$

$F(N) = 0$ и $F(P) = 75 > 0$. Следователно, съгласно Теорема 11.12, точката M е вътрешна за окръжността, точката N лежи на окръжността, а точката P е външна за окръжността.

Задача 11.29. *Намерете допирателните към окръжността*

$$k\colon (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25,$$

минаващи през точката $M(-3, 1)$.

Решение. Тъй като точката M лежи на окръжността (проверете), през нея минава една допирателна към тази окръжност. Уравнението на допирателната можем за построим като права през M с нормален вектор $\overrightarrow{MC} = (4, -3)$, т.е. чрез формула (11.30), където $C(1, -2)$ е центърът на дадената окръжност. Така получаваме правата $4x - 3y + 15 = 0$.

Задача 11.30. *Намерете допирателните към окръжността*

$$k\colon x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0$$

в точките ѝ с абсциса 10.

Упътване. Търсените точки са $T_1(10, 9)$ и $T_2(10, -5)$. По аналогичен начин, като в предходната задача, установете, че двете допирателни имат уравнения $t_1\colon 3x + 7y - 93 = 0$ и $t_2\colon 3x - 7y - 65 = 0$.

Задача 11.31. *Намерете допирателните към окръжността*

$$k\colon (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9,$$

минаващи през точката $M(1, 4)$.

Решение. Точката M се явява външна за дадената окръжност (проверете) и затова през нея минават две допирателни към окръжността. Произволна права p през M има общо уравнение от вида $p:\ \lambda(x-1) + \mu(y-4) = 0$, т.е.

$$p:\ \lambda x + \mu y - \lambda - 4\mu = 0,$$

където $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ са координатите на нормалния вектор на p. Условието правата p да се допира до дадената окръжност е еквивалентно на условието $d(C, p) = r$, където $C(1, -1)$ е центърът на окръжността, а $r = 3$ е нейният радиус. Чрез формулата (11.15) пресмятаме

$$d(C, p) = \frac{5|\mu|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}.$$

Тогава от $\frac{5|\mu|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} = 3$ получаваме уравнението $9\lambda^2 = 16\mu^2$, чиито решения са $\frac{\lambda}{\mu} = \pm\frac{4}{3}$. От двете двойки решения $(\lambda_1, \mu_1) = (4, 3)$ и $(\lambda_2, \mu_2) = (4, -3)$ получаваме уравненията на двете допирателни $p_1 :\ 4x + 3y - 16 = 0$ и $p_2 :\ 4x - 3y + 8 = 0$.