Уравнение на права в равнина

Зад. 2. Намерете стойностите на $a, b \in \mathbb{R}$ така, че правите $g: ax - 2y - 1 = 0$ и $l: 6x - 4y - b = 0$

а) съвпадат;

б) са успоредни;

в) се пресичат;

г) са перпендикулярни.

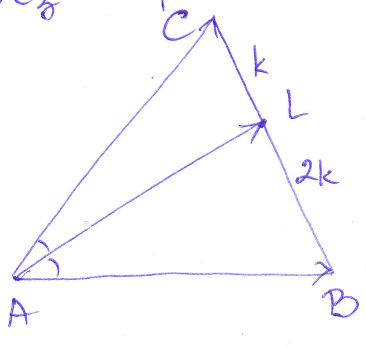
Решение а) Правите $g: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l: A_2x + By_2 + C_2 = 0$ съвпадат $\Leftrightarrow$ $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$. Следователно $\dfrac{a}{6} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{-1}{-b} \Leftrightarrow$ $\underline{a = 3,\ b = 2.}$

б) $g \parallel l \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2} \Rightarrow \underline{a = 3,\ b \neq 2.}$

в) $g \cap l \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow \underline{a \neq 3}$

г) $g \perp l \Leftrightarrow \vec{N}_g \perp \vec{N}_l \Rightarrow \vec{N}_g(a, -2)$ и $\vec{N}_l(6, -4)$, то $\vec{N}_g \vec{N}_l = 6a + 8 = 0 \Leftrightarrow \underline{a = -\frac{4}{3}}.$

Зад. 3. Дадени са т. $A(0, -2)$, $B(8, 4)$, $C(3, -6)$. Намерете уравнението на ъглополовящата в $\triangle ABC$ през върха A.



$\vec{AB}(8, 6) \Rightarrow \|\vec{AB}\| = 10$

$\vec{AC}(3, -4) \Rightarrow \|\vec{AC}\| = 5$ $\Rightarrow$

$\dfrac{BL}{CL} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow$

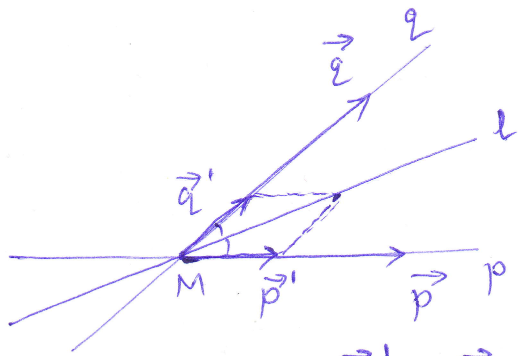
$\vec{AL} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{AB} + 2\vec{AC}\right) \Rightarrow$

$\vec{AL} = \dfrac{1}{3}(14, -2) \parallel (7, -1) \Rightarrow$

уравнението на правата, съдържаща ъглополовящата AL е $l: \dfrac{x - 0}{7} = \dfrac{y + 2}{-1} \Leftrightarrow \boxed{x + 7y + 14 = 0}$

ЗАД. 4. Дадени са правите $p: x - 7y - 1 = 0$ и $q: x + y + 7 = 0$.
Намерете:

а) уравнението на ъглополовящата на острия ъгъл между правите p и q.



$\vec{N}_p(1,-7)$ и $\vec{N}_q(1,1)$ $\Rightarrow$

$\vec{p}\,(7,1) \parallel p$ и $\vec{q}\,(1,-1) \parallel q$

$\vec{p}\vec{q} = 7 - 1 = 6 > 0$ $\Rightarrow$

$\vec{p}$ и $\vec{q}$ сключват остър ъгъл

Търсим вектори $\vec{p}\,' \parallel \vec{p}$ и $\vec{q}\,' \parallel \vec{q}$, които $\|\vec{p}\,'\| = \|\vec{q}\,'\|$.
Най-удобно е да намерим $\vec{p}\,'$ и $\vec{q}\,'$: $\|\vec{p}\,'\| = 1$, $\|\vec{q}\,'\| = 1$,
т.е. да нормираме векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

$$\vec{p}\,' = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} \quad \text{и} \quad \vec{q}\,' = \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}\,' = \frac{1}{5\sqrt{2}}\vec{p} \quad \text{и} \quad \vec{q}\,' = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{q}$$

Тъй като $\|\vec{p}\| = 5\sqrt{2}$ и $\|\vec{q}\| = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \vec{p}\,' = \frac{1}{5\sqrt{2}}(7,1) \quad \text{и} \quad \vec{q}\,' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

Тогава $\vec{p}\,'$ и $\vec{q}\,''$ определят ромб, а диагоналът в ромба е ъглополовяща $\Rightarrow$ $\vec{\ell} = \vec{p}\,' + \vec{q}\,'$ е колинеарен на търсената права.

$$\vec{\ell} = \vec{p}\,' + \vec{q}\,' = \frac{1}{5\sqrt{2}}(7,1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(12,-4) \parallel (3,-1)$$

$\Rightarrow$ Остава да намерим пресечната точка $M = p \cap q$.

$$M: \left| \begin{array}{l} x - 7y - 1 = 0 \\ x + y + 7 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow M(-6,-1) \Rightarrow \ell \left\{ \begin{array}{l} \ni M \\ \parallel \vec{\ell} \end{array} \right.$$

е търсената права

$$\Rightarrow \ell: \frac{x+6}{3} = \frac{y+1}{-1} \Leftrightarrow \boxed{\ell: x + 3y + 9 = 0}$$

б) уравнението на ъглополовящата на правите
$p: x - 7y - 1 = 0$ и $q: x + y + 7 = 0$, в който лежи координатното начало.

Ако $p: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $q: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то уравненията на ъглополовящите l_1 и l_2 на двата ъгъла между p и q са

$$l_{1,2}: \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

като знакът "+" е за ъгъла, в който лежат точките, за които ориентираните разстояния до двете прави са с еднакви знаци, а знакът "−" е за ъгъла, в който лежат точките, за които ориентираните разстояния до правите са с противоположни знаци.

Ако $M(x_0, y_0)$, а $g: Ax + By + C = 0$, то ориентираното разстояние $\delta(M, g) = \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Знакът на $\delta(M, g)$ съвпада със знака на числителя, който можем да означим $g(M) = Ax_0 + By_0 + C$.

Пресмятаме за т. $O(0,0)$

$p(O) = -1$ и $q(O) = 7 \Rightarrow \delta(O, p)$ и $\delta(O, q)$ са с противоположни знаци $\Rightarrow$

$$l: \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = - \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \Rightarrow$$

$$l: \frac{x - 7y - 1}{5\sqrt{2}} = - \frac{x + y + 7}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{l: 3x - y + 34 = 0}$$