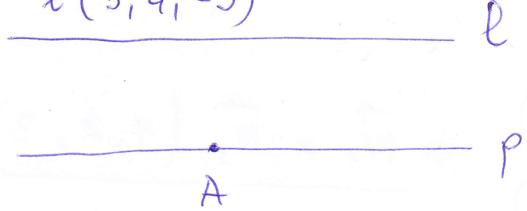
Уравнение на права в тримерното пространство

1. Права през 2 точки

$$\left.\begin{array}{l} A(1,2,3) \\ B(2,0,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}(1,-2,-7) \parallel p$$

$$\Rightarrow \boxed{p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-7}}$$

2. Права през точка, успоредна на дадена права



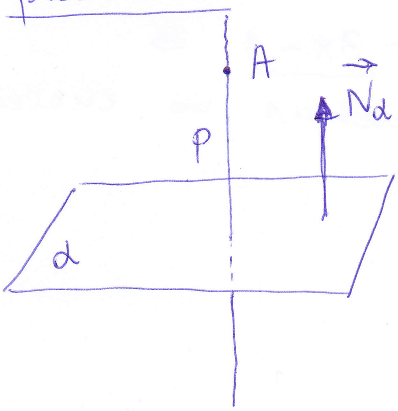
$A(1,2,3)$

$$l: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{-5}$$

$? \; p \begin{cases} \ni A \\ \parallel l \end{cases} \Rightarrow$ Направляващият вектор $\vec{p}$ на правата p е колинеарен на l, т.е. $\vec{p} \parallel \vec{l}$

$$\Rightarrow \boxed{p: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-5}}$$

3. Права през точка, перпендикулярна на дадена равнина



$$\alpha: \underbrace{2x - y + 4z}\, - 10 = 0$$

$A(1,2,3) \qquad \Rightarrow \vec{N}_\alpha(2,-1,4)$

$? \; p \begin{cases} \ni A \\ \perp \alpha \end{cases}$

$\vec{N}_\alpha(2,-1,4) \parallel p \Rightarrow$

$$\boxed{p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4}}$$

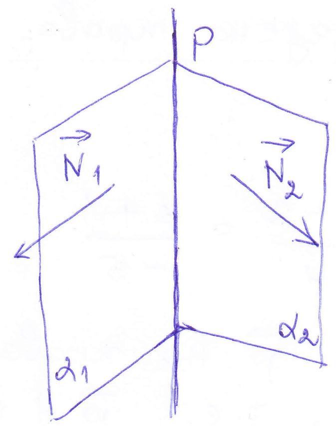
4. Права като пресечница на две равнини

$$p: \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Намерете канонично уравнение на p.

Равнината $\alpha_1 : x - 2y + z - 3 = 0$ има нормален вектор $\vec{N}_1(1, -2, 1)$.

Равнината $\alpha_2 : x + y - z + 1 = 0$ има нормален вектор $\vec{N}_2(1, 1, -1)$.



$$\left.\begin{matrix} \vec{N}_1 \perp p \\ \vec{N}_2 \perp p \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{p \parallel \vec{N}_1 \times \vec{N}_2}$$

$$\begin{matrix} \vec{N}_1(1, -2, 1) \\ \vec{N}_2(1, 1, -1) \end{matrix} \Rightarrow \underline{\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 (1, 2, 3) \parallel p}$$

Търсим една точка от p, т.е. едно решение (x, y, z) на неопределената система линейни уравнения:

$$p: \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \Big] + \Rightarrow 2x - y - 2 = 0 \Rightarrow \underline{y = 2x - 2}$$

$$\Downarrow$$

$$z = x + y + 1 = x + 2x - 2 + 1 = \underline{3x - 1} \Rightarrow$$

$(x, 2x - 2, 3x - 1)$ са всички решения на системата.

При $x = 0 \Rightarrow$ т. $M(0, -2, -1) \in p$.

$$\Rightarrow \boxed{p: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{3}}$$

$\downarrow$

Обратно. Оттук чрез с-вата на пропорциите, каноничното уравнение на p е еквивалентно на

$$p: \begin{cases} 2x = y + 2 \\ 3x = z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow p: \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 3x - z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

същата права, зададена като пресечница на други равнини

Равнината $\beta_1 : 2x - y - 2 = 0 \parallel Oz$, а равнината $\beta_2 : 3x - z - 1 = 0 \parallel Oy$.