

Лекция 7.

Хомогенни координати и безкрайни елементи

Аналитична геометрия

специалности Математика и Бизнес математика, I курс

Хомогенни координати

Точките, правите и равнините в евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$, изучавано в училище, ще наричаме *крайни*.

Нека относно произволна координатна система означим координатите на произволна крайна точка M с $M(X, Y, Z)$. Тези координати ще наричаме *нехомогенни* координати в пространството.

Определение

Всяка наредена четворка x, y, z, t , за които $t \neq 0$ и

$$X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{z}{t},$$

наричаме хомогенни координати на крайната точка M и записваме $M(x, y, z, t)$.

Свойства на хомогенните координати

Хомогенните координати се задават с точност до ненулев множител, тъй като съгласно определението, ако $\lambda \neq 0$, наредените четворки (x, y, z, t) и $(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$ определят една и съща крайна точка с координати (X, Y, Z) , където $X = \frac{\lambda x}{\lambda t} = \frac{x}{t}$, $Y = \frac{\lambda y}{\lambda t} = \frac{y}{t}$, $Z = \frac{\lambda z}{\lambda t} = \frac{z}{t}$.

Ако крайната точка M има нехомогенни координати $M(X, Y, Z)$, то хомогенните ѝ координати могат да бъдат зададени чрез $M(X, Y, Z, 1)$.

Пример. Крайната точка $M(-1, 2, 3)$ има хомогенни координати $M(-1, 2, 3, 1)$. Но същата точка може да се зададе и чрез наредените четворки хомогенни координати $(-2, 4, 6, 2)$, $(-3, 6, 9, 3)$ и т.н.

Безкрайни точки

Нека в тримерното пространство е зададена правата g през точката $M(X_0, Y_0, Z_0)$ и с направляващ ненулев вектор $\vec{p}(a, b, c) \parallel g$. Тогава е известно, че скалярно параметричното уравнение на правата (относно нехомогенни координати) има вида

$$g : \begin{cases} X = X_0 + a.s \\ Y = Y_0 + b.s \\ Z = Z_0 + c.s, \end{cases} \quad (1)$$

където s е реален параметър, а (X, Y, Z) са нехомогенните координати на произволна точка M от правата g . Хомогенните координати на M са $M(X, Y, Z, 1)$. Тогава, наредената четворка $(\frac{1}{s}X, \frac{1}{s}Y, \frac{1}{s}Z, \frac{1}{s})$ при $s \neq 0$, т.е. при $M \neq M_0$, задава същата точка M чрез хомогенни координати. Следователно за хомогенните координати (x, y, z, t) на M имаме

$$x = \frac{X}{s}, \quad y = \frac{Y}{s}, \quad z = \frac{Z}{s}, \quad t = \frac{1}{s}. \quad (2)$$

Разделяйки двете страни на уравненията (1) на s и отчитайки (2), за хомогенните координати на произволна точка M от правата g получаваме

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{X_0}{s} + a \\ y = \frac{Y_0}{s} + b \\ z = \frac{Z_0}{s} + c \\ t = \frac{1}{s}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Нека в горните уравнения оставим $s \rightarrow \pm\infty$ (при което точката M ще се отдалечава от фиксираната точка M_0). Извършвайки граничния преход в (3), получаваме $(x, y, z, t) = (a, b, c, 0)$.

Определение

Безкрайна точка на правата g с направляващ вектор $\vec{p}(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ се нарича точката U с хомогенни координати $U(a, b, c, 0)$.

Добавяйки безкрайната точка U_g към множеството от крайните точки върху g , получаваме разширена права $\bar{g}$, т.е. $\bar{g} = g \cup U_g$.

Успоредните прави имат една и съща безкрайна точка. Това е така, тъй като правите, които са успоредни помежду си, имат един и същ направляващ вектор $\vec{p}(a, b, c)$ и следователно безкрайната им точка има хомогенни координати $U(a, b, c, 0)$.

Можем да направим извода, че в разширената равнина $\overline{\mathbb{R}^2}$ ($\mathbb{R}^2$ плюс безкрайните точки на всички прави, лежащи в нея) всеки две прави се пресичат. Неуспоредните помежду си прави се пресичат в крайна точка, а успоредните прави се пресичат в безкрайната си точка.

Хомогенните координати $(x, y, z, t) \neq (0, 0, 0, 0)$.

Ако е дадена наредената четворка $(x, y, z, t) \neq (0, 0, 0, 0)$, то съществува точно една точка, за която (x, y, z, t) са хомогенни координати.

Множеството от всички безкрайни точки в дадена равнина α се нарича безкрайна права U_α . С $\overline{\alpha}$ означаваме разширената равнина $\overline{\alpha} = \alpha \cup U_\alpha$. Ако две равнини са успоредни, те имат обща безкрайна права. Следователно всеки две равнини в разширеното тримерно пространство $\overline{\mathbb{R}^3}$ имат пресечница. Множеството от всички безкрайни точки и прави в пространството се нарича безкрайна равнина Ω . Разширено пространство $\overline{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3 \cup \Omega$.

Уравнения на прави и равнини в хомогенни координати

Нека умножим двете страни на равенствата (3) с s . По този начин уравнението на правата g добива вида

$$g : \begin{cases} sx = X_0 + s.a \\ sy = Y_0 + s.b \\ sz = Z_0 + s.c \\ st = 1 + s.0. \end{cases} \quad (4)$$

Отчитаме, че относно хомогенни координати: $M(sx, sy, sz, st) = (x, y, z, t)$ (произволна точка от g), $M_0(X_0, Y_0, Z_0, 1)$ (фиксирана точка от g) и $U_g(a, b, c, 0)$ (безкрайната точка на g). Тогава краткият запис на уравнението (4) на правата g относно хомогенни координати е

$$M = M_0 + s.U_g. \quad (5)$$

Съгласно (5) две различни точки M_1 и M_2 от правата g ще се получат при две различни стойности на параметъра s (съответно s_1 и s_2) чрез

$$\begin{aligned}M_1 &= M_0 + s_1 \cdot U_g \\M_2 &= M_0 + s_2 \cdot U_g.\end{aligned}\tag{6}$$

От горните две равенства намираме $U_g = \frac{M_1 - M_2}{s_1 - s_2}$ и $M_0 = -\frac{s_2 M_1 - s_1 M_2}{s_1 - s_2}$. Тогава след заместване на тези изрази за M_0 и U_g в (5) и преобразуване получаваме следното параметрично уравнение за правата g относно хомогенни координати в тримерното разширено пространство

$$g : M = \alpha \cdot M_1 + \beta \cdot M_2,\tag{7}$$

където $\alpha = \frac{s - s_2}{s_1 - s_2}$, $\beta = \frac{s_1 - s}{s_1 - s_2}$.

Следователно всяка точка от правата g е линейна комбинация на две нейни произволни точки.

Ако относно хомогенни координати $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ и $M(x, y, z, t)$, координатният запис на уравнението (7) е

$$\left| \begin{array}{l} x = \alpha.x_1 + \beta.x_2 \\ y = \alpha.y_1 + \beta.y_2 \\ z = \alpha.z_1 + \beta.z_2 \\ t = \alpha.t_1 + \beta.t_2. \end{array} \right. \quad (8)$$

Пример - уравнение на права в хомогенни координати

Нека относно хомогенни координати са дадени точките $M_1(1, -2, 3, 4)$ и $M_2(0, 1, -1, 2)$. Последната координата и на двете точки е различна от нула, следователно двете точки са крайни. Уравнението на крайната права g , която те определят, е

$$g : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha - \beta \\ t = 4\alpha + 2\beta \end{cases} \quad (9)$$

Нехомогенните координати на тези точки са $M_1(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $M_2(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Следователно направляващият вектор $\vec{g}$ на правата g има координати $\vec{g} = \overrightarrow{M_1M_2}(-\frac{1}{4}, 1, -\frac{5}{4}) \parallel (1, -4, 5)$. Тогава безкрайната точка на правата g има координати $U_g(1, -4, 5, 0)$.

Пример - уравнение на права в хомогенни координати

Нека относно хомогенни координати са дадени точките $M_1(1, -2, 3, 4)$ и $M_2(0, 1, -1, 0)$. Точката M_1 е крайна, а точката M_2 е безкрайна, тъй като последната ѝ координата е нула. Следователно двете точки определят крайна права g с уравнение

$$g : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha - \beta \\ t = 4\alpha \end{cases} \quad (10)$$

Безкрайната точка на правата g е точката $M_2(0, 1, -1, 0)$, а направляващият вектор на тази права има координати $\vec{g}(0, 1, -1)$.

Пример - уравнение на права в хомогенни координати

Нека относно хомогенни координати са дадени точките $M_1(1, -2, 3, 0)$ и $M_2(0, 1, -1, 0)$. И двете дадени точки са безкрайни, тъй като последните им координати са равни на нула. Тогава двете точки определят безкрайна права ω с уравнение

$$\omega : \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha - \beta \\ t = 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

Всички точки от правата ω са безкрайни (тя не съдържа крайни точки).

Уравнение на равнина

Относно хомогенни координати всяка точка от дадена равнина α е линейна комбинация на три точки от същата равнина, т.е. равнина се задава чрез уравнението

$$\alpha : M = \lambda M_1 + \mu M_2 + \nu M_3, \quad (12)$$

където M_1 , M_2 и M_3 са три фиксирани точки от α .

Общи уравнения в хомогенни координати

Относно нехомогенни координати (X, Y) права g в равнина се определя с общото си уравнение

$$g : AX + BY + C = 0. \quad (13)$$

Като използваме, че $X = \frac{x}{t}$, $Y = \frac{y}{t}$ (при $t \neq 0$), от горното уравнение получаваме $A\frac{x}{t} + B\frac{y}{t} + C = 0$, откъдето

$$g : Ax + By + Ct = 0. \quad (14)$$

Уравнението (14) се удовлетворява от всички крайни точки върху g . Безкрайната точка на g има координати $U_g(a, b, 0)$, където $\vec{g}(a, b)$ е направляващият вектор на g . Тъй като $\vec{g} \perp \vec{N}_g(A, B)$, следва че $A.a + B.b = 0$. Това означава, че и безкрайната точка на g удовлетворява уравнението (14), което се нарича общо уравнение на права в равнина относно хомогенни координати.

Безкрайните прави съдържат само безкрайни точки ($t = 0$) и затова техните общи уравнения в хомогенни координати са $t = 0$.

Аналогично получаваме, че общото уравнение на равнина α относно хомогенни координати има вида

$$\alpha : Ax + By + Cz + Dt = 0. \quad (15)$$

Безкрайната равнина се определя от $\Omega : t = 0$.

Относно хомогенни координати права g в разширеното тримерно пространство може да се зададе като пресечница на две равнини по следния начин

$$g : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1t = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2t = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Двойно отношение на четири точки

Нека точките P_1 , P_2 , P_3 и P_4 лежат върху една права. Тогава относно хомогенни координати имаме

$$\begin{aligned}P_3 &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \\ P_4 &= \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2.\end{aligned}\tag{17}$$

Определение

Числото

$$\delta(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{\lambda_2 \mu_1}{\lambda_1 \mu_2}\tag{18}$$

се нарича *двойно отношение на четирите точки P_1 , P_2 , P_3 и P_4 , лежащи върху една права.*

Нека върху правата изберем координатна система с начало точката O е единичен вектор $\vec{e}$. Тогава относно хомогенни координати точката $O(0,1)$, а безкрайната точка на тази права $U(1,0)$. За точките $P_1(x_1, t_1)$ и $P_2(x_2, t_2)$ от правата имаме

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1 \cdot 1 + t_1 \cdot 0 & x_2 &= x_2 \cdot 1 + t_2 \cdot 0 \\t_1 &= x_1 \cdot 0 + t_1 \cdot 1 & t_2 &= x_2 \cdot 0 + t_2 \cdot 1.\end{aligned}\tag{19}$$

Следователно $P_1 = x_1 \cdot U + t_1 \cdot O$ и $P_2 = x_2 \cdot U + t_2 \cdot O$, откъдето намираме $U = \frac{t_2 P_1 - t_1 P_2}{x_1 t_2 - x_2 t_1}$ и $O = -\frac{x_2 P_1 - x_1 P_2}{x_1 t_2 - x_2 t_1}$.

Аналогично имаме $P_3 = x_3 \cdot U + t_3 \cdot O$ и $P_4 = x_4 \cdot U + t_4 \cdot O$. В последните две равенства заместваем U и O и след преобразуване получаваме

$$\begin{aligned}P_3 &= \frac{1}{x_1 t_2 - x_2 t_1} [(x_3 t_2 - x_2 t_3) P_1 + (x_1 t_3 - x_3 t_1) P_2], \\P_4 &= \frac{1}{x_1 t_2 - x_2 t_1} [(x_4 t_2 - x_2 t_4) P_1 + (x_1 t_4 - x_4 t_1) P_2].\end{aligned}\tag{20}$$

Следователно, съгласно определението на двойно отношение на четири точки и (20) имаме следното изразяване на двойното отношение относно хомогенни координати

$$\delta(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(x_1t_3 - x_3t_1)(x_2t_4 - x_4t_2)}{(x_2t_3 - x_3t_2)(x_1t_4 - x_4t_1)}. \quad (21)$$

Ако точките $P_i(X_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) са крайни, хомогенните им координати са от вида $P_i(X_i, 1)$. След заместването им в (21) получаваме представяне на двойното отношение на четири крайни точки относно нехомогенни координати

$$\delta(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(X_1 - X_3)(X_2 - X_4)}{(X_2 - X_3)(X_1 - X_4)}. \quad (22)$$

Следователно двойното отношение на четири точки се изразява по следния начин чрез две прости отношения на три точки

$$\delta(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)}. \quad (23)$$

Ако точките $P_i(X_i)$ ($i = 1, 2, 3$) са крайни, а точката $P_4 = U_\infty$ е безкрайна, т.е. в хомогенни координати $P_i(X_i, 1)$ ($i = 1, 2, 3$) и $P_4(X_4, 0)$, то от (21) получаваме

$$\delta(P_1P_2P_3U_\infty) = \frac{X_1 - X_3}{X_2 - X_3}. \quad (24)$$

Следователно $\delta(P_1P_2P_3U_\infty) = (P_1P_2P_3)$ – простото отношение на точките P_1, P_2, P_3 .

Свойства на двойното отношение на четири точки:

- $\delta(P_1P_2P_3P_4) = \delta(P_3P_4P_1P_2)$;
- $\delta(P_1P_2P_4P_3) = \delta(P_2P_1P_3P_4) = \frac{1}{\delta(P_1P_2P_3P_4)}$;
- $\delta(P_4P_2P_3P_1) = \delta(P_1P_3P_2P_4) = 1 - \delta(P_1P_2P_3P_4)$.

Хармонични групи

Определение

Точките P_1, P_2, P_3, P_4 , лежащи върху една права, образуват хармонична група, ако $\delta(P_1P_2P_3P_4) = -1$.

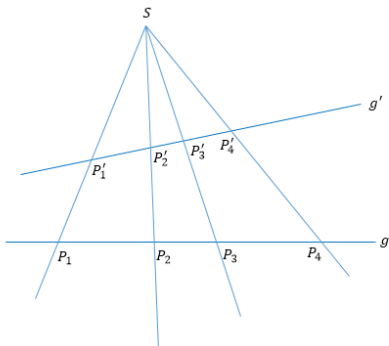
Точката C е среда на отсечката AB , точно когато $(ABCU) = -1$ (където U е безкрайната точка на правата AB).

Ако P_1, P_2, P_3, P_4 образуват хармонична група, то двойката точки P_1, P_2 "дели" двойката P_3, P_4 .

Теорема на Пап

Твърдение (Теорема на Пап)

Нека точките P_1, P_2, P_3, P_4 лежат върху правата g , а точките P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 лежат върху правата g' , като правите g и g' не минават през пресечната точка S на правите $P_i P'_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Тогава $\delta(P_1 P_2 P_3 P_4) = \delta(P'_1 P'_2 P'_3 P'_4)$.



Литература

- Гр. Станилов. Аналитична геометрия. Софтех, София, 1993, ISBN 954-8495-01-5.
- Д. Мекеров, П. Рангелова, Б. Царева, Е. Павлов. Ръководство за решаване на задачи по аналитична геометрия, 4. изд. УИ "П. Хилендарски" , Пловдив, 2008, ISBN 978-954-423-447-8.
- Douglas F. Riddle. Analytic Geometry, 6. ed. Cengage Learning, 1995, ISBN-13: 978-0534948542.