13. Равнина, права и сфера в пространството

Съжалявам, че като студент не стигнах достатъчно далеч в разбирането на поне някои от водещите принципи в математиката, защото хората с такива умения, изглежда, притежават допълнителен усет.

Чарлз Дарвин

13.1. Уравнение на равнина и права.

Нека в тримерното пространство относно произволна координатна система $Oxyz$ са дадени точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и неколинеарните вектори $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Разглеждаме множеството от точки $M(x, y, z)$ в пространството, за които векторът $\overrightarrow{M_0M}$ е компланарен с векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$, т.е.

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q},$$

където $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Това множество представлява *равнина*, която ще означим с α. Ще покажем различни начини за задаване на уравнението на α.

Определение 13.1. Нека $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ са съответно радиус-векторите на точките M и M_0 и векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ са компланарни (лежат в една равнина) с $\overrightarrow{M_0M}$. Тогава уравнението

$$\alpha\colon \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{p} + \mu\vec{q} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \tag{13.1}$$

се нарича *векторно параметрично уравнение* на равнината α. Точките M_0 и M се наричат съответно *фиксирана* и *текуща точка*, а числата λ и μ се наричат *параметри* на равнината.

Определение 13.2. Координатният запис на (13.1)

$$\alpha\colon \left| \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda p_1 + \mu q_1 \\ y = y_0 + \lambda p_2 + \mu q_2 \\ z = z_0 + \lambda p_3 + \mu q_3 \end{array} \right. \tag{13.2}$$

се наричат *скаларно параметрични уравнения* на равнината α.

Теорема 13.1. *Равнината α, минаваща през точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и компланарна с векторите $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$, се определя от уравнението*

$$\alpha\colon \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{13.3}$$

Определение 13.3. Нека $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ са компланарни с равнината α и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Тогава

$$\alpha\colon Ax + By + Cz + D = 0, \tag{13.4}$$

където $A = p_2q_3 - p_3q_2$, $B = p_3q_1 - p_1q_3$, $C = p_1q_2 - p_2q_1$ и $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, се нарича *общо уравнение* на равнината α. Векторът $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$ се нарича *нормален вектор* на α.

Забележка 13.1. Нека относно ортонормирана КС $Oxyz$ е зададена равнина α с уравнение (13.4). Тогава $\overrightarrow{N} = \vec{p} \times \vec{q}$, т.е. $\overrightarrow{N}$ е перпендикулярен на всеки вектор, компланарен с равнината α.

Забележка 13.2. Уравнението на равнина α, която минава през фиксираната точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и има нормален вектор $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$, е

$$\alpha\colon A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{13.5}$$

Теорема 13.2. *Равнината α, съдържаща неколинеарните точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, се определя с уравнението*

$$\alpha\colon \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{13.6}$$

Теорема 13.3 (Взаимно положение на равнина и КС)**.** *Нека относно ортонормирана КС е зададена равнината α с общо уравнение* (13.4) *и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Тогава:*

1) Равнината α минава през координатното начало $O(0, 0, 0)$, точно когато $D = 0$.
2) Равнината α е успоредна на оста Ox, точно когато $A = 0$.
3) Равнината α е успоредна на оста Oy, точно когато $B = 0$.
4) Равнината α е успоредна на оста Oz, точно когато $C = 0$.
5) Равнината α съдържа оста Ox, точно когато $A = D = 0$.
6) Равнината α съдържа оста Oy, точно когато $B = D = 0$.
7) Равнината α съдържа оста Oz, точно когато $C = D = 0$.

8) *Равнината* α *е успоредна на координатната равнина* Oxy*, точно когато уравнението ѝ е* $z = z_0$.
9) *Равнината* α *е успоредна на координатната равнина* Oxz*, точно когато уравнението ѝ е* $y = y_0$.
10) *Равнината* α *е успоредна на координатната равнина* Oyz*, точно когато уравнението ѝ е от вида* $x = x_0$.

Следствие 13.1. *Координатните равнини имат следните общи уравнения* $Oxy\colon z = 0$, $Oxz\colon y = 0$ *и* $Oyz\colon x = 0$.

Теорема 13.4 (Взаимно положение на две равнини)**.** *Нека относно ортонормирана КС са дадени равнини* $\alpha_1\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ *и* $\alpha_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. *Тогава:*

1) α_1 *и* α_2 *съвпадат, точно когато* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$;
2) α_1 *и* α_2 *са успоредни, точно когато* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$;
3) α_1 *и* α_2 *се пресичат, точно когато* (A_1, B_1, C_1) *и* (A_2, B_2, C_2) *не са пропорционални.*

Определение 13.4. Съвкупността от всички равнини, които минават през една права, се нарича *сноп равнини*, а правата се нарича *носител на снопа*.

Теорема 13.5. *Ако* $\alpha_1\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ *и* $\alpha_2\colon A_2x+B_2y+C_2z + D_2 = 0$ *са две равнини от един сноп, то всяка равнина от същия сноп има общо уравнение от вида*

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (13.7)$$

където $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Теорема 13.6 (Разстояние от точка до равнина)**.** *Нека относно ортонормирана КС са дадени точката* $M(x_0, y_0, z_0)$ *и равнината* $\alpha\colon Ax+By+Cz+D = 0$. *Тогава ориентираното разстояние* $\delta(M, \alpha)$ *и абсолютното разстояние* $d(M, \alpha)$ *се пресмятат по формулите:*

$$\delta(M, \alpha) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (13.8)$$

и

$$d(M, \alpha) = |\delta(M, \alpha)|. \quad (13.9)$$

Забележка 13.3. Точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ се намират в едно и също полупространство относно равнината α, ако числата $\alpha(M_1) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ и $\alpha(M_2) = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ са с еднакви знаци, и в различни полупространства относно α, ако $\alpha(M_1)$ и $\alpha(M_2)$ са с противоположни знаци.

Теорема 13.7. *Ако равнините* $\alpha_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *и* $\alpha_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ *се пресичат, то общите уравнения на равнините* β_1 *и* β_2*, които разполовяват двата двустенни ъгъла, образувани от* α_1 *и* α_2*, са*

$$\beta_{1,2}: \ \frac{A_1x + B_1y_{+}C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y_{+}C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (13.10)$$

Забележка 13.4. Знакът „+“ се отнася за равнината, разполовяваща ъгъла, съдържащ точките, за които ориентираните разстояния до двете равнини са с еднакви знаци, а знакът „−“ за равнината, разполовяваща ъгъла, съдържащ точките, чиито ориентирани разстояния до двете равнини са с противоположни знаци.

Уравнение на права в пространството.

Нека относно произволна координатна система в тримерното пространство $Oxyz$ разгледаме права g, зададена чрез фиксираната точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулев вектор $\vec{v} = (a, b, c)$, колинеарен с g.

Определение 13.5. Уравненията

$$g\colon \left| \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{array} \right. \qquad (13.11)$$

се наричат *скаларно параметрични уравнения* на правата g.

Определение 13.6. Уравнението

$$g\colon \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad (13.12)$$

се нарича *канонично уравнение* на правата g.

Теорема 13.8. *Нека* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *са две различни точки от правата* g*. Тогава скаларно параметричните и каноничното уравнение на* g *имат съответно вида:*

$$g\colon \left| \begin{array}{l} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1), \end{array} \right. \qquad (13.13)$$

$$g\colon \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (13.14)$$

Теорема 13.9. *Произволна права g в тримерното пространство може да се зададе като пресечница на две равнини чрез уравнението*

$$g\colon \left|\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{array}\right. \tag{13.15}$$

където наредените тройки (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) не са пропорционални.

Забележка 13.5. Векторът с координати

$$(B_1C_2 - B_2C_1, A_2C_1 - A_1C_2, A_1B_2 - A_2B_1)$$

е направляващ вектор за правата g, определена с уравнението (13.15). Ако $Oxyz$ е ортонормирана КС, то този вектор е равен на векторното произведение на нормалните вектори $\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$.

Забележка 13.6. Права в тримерното пространство няма общо уравнение, а се представя чрез общите уравнения на две равнини, които я съдържат.

В следващите задачи ще считаме координатната система за дясна ортонормирана, освен ако е указано друго.

Задача 13.1. *Дадена е точката $A(1, 2, 3)$. Намерете уравненията на:*

а) правите g_1, g_2 и g_3 през A, успоредни съответно на Ox, Oy и Oz;
б) равнините α_1, α_2 и α_3 през A, успоредни съответно на Oxy, Oxz и Oyz;
в) равнините β_1, β_2 и β_3 през A, съдържащи съответно Ox, Oy и Oz.

Решение. а) Координатните оси Ox, Oy и Oz са колинеарни съответно на векторите $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$ и $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$. Тогава направляващите вектори на правите, успоредни на Ox, Oy и Oz, са съответно $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$. Следователно, съгласно (13.12), каноничните уравнения на търсените прави са: $g_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{0}$, $g_2 : \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{0}$ и $g_3 : \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$.

б) Обръщаме внимание, че нормалните вектори на две успоредни равнини са колинеарни помежду си. Тъй като нормалните вектори на координатните равнини Oxy, Oxz и Oyz са съответно $\vec{e_3}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_1}$, то същите вектори ще бъдат нормални и за търсените равнини. Тогава, като вземем предвид (13.5), уравнението на равнината през

A, успоредна на Oxy, е $\alpha_1\colon 0(x-1)+0(x-2)+1(z-3)=0$, т.е. $\alpha_1\colon z-3=0$. Аналогично, другите две равнини имат съответно уравнения $\alpha_2\colon y-2=0$ и $\alpha_3\colon x-1=0$.

в) Ще намерим уравнението на равнината β_1 през A и Ox по два начина.

Начин 1. Тъй като Ox лежи в търсената равнина, то направляващият вектор на Ox и всички точки от Ox са компланарни с равнината. Следователно векторът $\vec{e}_1=(1,0,0)$ и точката $O(0,0,0)$ лежат в търсената равнина. Освен това точката A е също от тази равнина. Тогава насочената отсечка $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$ е компланарна с равнината β_1. Тогава от (13.3) получаваме уравнението на търсената равнина

$$\beta_1\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Оттук получаваме общото уравнение $\beta_1\colon 3y-2z=0$.

Ще отбележим, че в първия ред на детерминантата, вместо координатите на точката A, могат да бъдат използвани координатите на другата известна точка от равнината, например точката O.

Начин 2. Съгласно Теорема 13.3, общият вид на равнина, съдържаща оста Ox, е $By+Cz=0$. Чрез заместване на координатите на точка A в това уравнение намираме $2B+3C=0$. Избираме двойка ненулеви стойности за B и C, които удовлетворяват последното условие – например $B=3$, $C=-2$, и така достигаме до общото уравнение от първия начин.

Уравненията на другите равнини са $\beta_2\colon 3x-z=0$ и $\beta_3\colon 2x-y=0$.

Задача 13.2. *Дадени са точките* $M(2,1,-3)$, $N(3,0,2)$, *правата* $g\colon \frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{3}$ *и равнината* $\alpha\colon 2x+5y-3z+6=0$. *Намерете:*

- *а) каноничното уравнение на правата* l *през* M, *успоредна на* g;
- *б) скаларно параметричните уравнения на правата* m *през* N, *перпендикулярна на* α;
- *в) каноничното уравнение на правата* p *през* M *и* N;
- *г) каноничното уравнение на правата* q *през* M, *която сключва с положителните посоки на координатните оси* Ox, Oy *и* Oz *съответно ъгли* 60°, 45° *и* 120°.

Решение. а) Тъй като търсената права l и правата g са успоредни, то направляващите им вектори са колинеарни. Следователно направляващият вектор $\vec{g}=(4,-2,3)$ на g е направляващ вектор за l. Тогава каноничното ѝ уравнение е $l\colon \frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{3}$.

б) Направляващият вектор на права, перпендикулярна на дадена равнина, е колинеарен с нормалния вектор на тази равнина. Нормалният вектор на α е $\overrightarrow{N} = (2, 5, -3)$. Тогава, съгласно (13.11), скаларно параметричните уравнения на търсената права са

$$m\colon \left| \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 2 - 3\lambda. \end{array} \right.$$

в) Тъй като точките M и N са от търсената права, то насочената отсечка $\overrightarrow{MN} = (1, -1, 5)$ е направляващ вектор за нея. Следователно каноничното уравнение на тази права е $p\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{5}$.

г) Директорните косинуси на направлението на търсената права са: $\cos 60^\circ$, $\cos 45^\circ$ и $\cos 120^\circ$. Следователно направляващият вектор на правата е колинеарен с вектора $\vec{v} = (\cos 60^\circ, \cos 45^\circ, \cos 120^\circ) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}) \parallel (1, \sqrt{2}, -1)$. Тогава уравнението на търсената права е $q\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{z+3}{-1}$.

Задача 13.3. *Дадени са точките* $A(1, 2, -1)$, $B(0, 2, 3)$, $C(2, -1, -2)$, *правата* $g\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$ *и равнината* $\alpha\colon 2x + 2y - z + 7 = 0$. *Намерете общото уравнение на равнината* β*:*

а) през A*, успоредна на правите* BC *и* g*;*
б) през A *и* B*, успоредна на* g*;*
в) през A *и* B*, перпендикулярна на* α*;*
г) през A *и* g*;*
д) през A*, перпендикулярна на* g*;*
е) през B*, успоредна на* α*;*
ж) през A*,* B *и* C*.*

Решение. а) Ще решим по два начина.

Начин 1. Търсената равнина е компланарна с направляващите вектори $\overrightarrow{BC} = (2, -3, -5)$ и $\vec{g} = (2, 3, -1)$ съответно на правите BC и g. Следователно уравнението ѝ има вида

$$\beta\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Оттук получаваме общото уравнение $\beta\colon 9x - 4y + 6z + 5 = 0$.

Начин 2. Най-напред намираме координатите на нормален вектор $\overrightarrow{N}_\beta = \overrightarrow{BC} \times \vec{g} = (18, -8, 12) \parallel (9, -4, 6)$ и след това от (13.5) получаваме

$$\beta\colon 9(x-1) - 4(y-2) + 6(z+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9x - 4y + 6z + 5 = 0.$$

б) Търсената равнина е компланарна с направляващия вектор $\vec{g} = (2, 3, -1)$ на правата g и с насочената отсечка $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 4)$. Тогава от (13.3) следва, че

$$\beta\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето получаваме $\beta\colon 12x - 7y + 3z + 5 = 0$.

в) Аналогично на подточка б), насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ е компланарна с търсената равнина. Тъй като равнината α е перпендикулярна на търсената равнина, то нормалният вектор $\overrightarrow{N}_\alpha = (2, 2, -1)$ също е компланарен с търсената равнина. Постъпвайки като в подточка б), получаваме уравнението $\beta\colon 8x - 7y + 2z + 8 = 0$.

г) Понеже координатите на A не удовлетворяват уравнението на правата g, точката A не лежи върху g и следователно точката и правата определят единствена равнина. Тъй като правата g лежи в търсената равнина, то нейният направляващ вектор $\vec{g} = (2, 3, -1)$ и всяка нейна точка са компланарни с тази равнина. Избираме една точка от правата g, например точката $M(1, -2, 0)$. Тогава насочената отсечка $\overrightarrow{AM} = (0, -4, 1)$ е компланарна с търсената равнина. Следователно получаваме уравнението $\beta\colon x + 2y + 8z + 3 = 0$.

д) Ще решим по два начина.

Начин 1. Тъй като правата g е перпендикулярна на търсената равнина, то направляващият вектор $\vec{g} = (2, 3, -1)$ на g е колинеарен с нормалния вектор на тази равнина. Като вземем предвид (13.5), записваме $\beta\colon 2(x-1) + 3(y-2) - 1(z+1) = 0$, откъдето общото уравнение на равнината е $\beta\colon 2x + 3y - z - 9 = 0$.

Начин 2. Като заместим нормалния вектор в общото уравнение (13.4), получаваме $\beta\colon 2x + 3y - z + D = 0$. От условието, че A лежи в търсената равнина, следва, че координатите на тази точка удовлетворяват уравнението β. Следователно $2.1 + 3.2 - (-1) + D = 0$, откъдето намираме $D = -9$.

е) Тъй като успоредните равнини имат колинеарни нормални вектори, то нормалният вектор $\overrightarrow{N}_\alpha = (2, 2, -1)$ е нормален вектор и на търсената равнина. Аналогично на подгточка г), намираме $\beta\colon 2x + 2y - z - 1 = 0$.

ж) Тъй като трите точки са неколинеарни (проверете), то те определят единствена равнина. Използвайки, че насочените отсечки $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 4)$ и $\overrightarrow{AC} = (1, -3, -1)$ са компланарни с търсената равнина, записваме уравнението ѝ във вида

$$\beta\colon \begin{vmatrix} x & y-2 & z-3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето получаваме $\beta\colon 4x + y + z - 5 = 0$.

Задача 13.4. *Намерете уравнението на равнина α, която е успоредна на правите $g\colon \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{2}$ и $p\colon x = 2+s$, $y = 1+2s$, $z = 4$, ако точката $A(1,-2,2)$ се намира на разстояние $\sqrt{5}$ от α.*

Решение. Тъй като правите g и p са успоредни на равнината, то нормалният ѝ вектор $\overrightarrow{N}_\alpha = (2,-1,2) \times (1,2,0) = (-4,2,5)$. Тогава общото уравнение на равнината е

$$\alpha\colon 4x - 2y - 5z + D = 0. \tag{13.16}$$

Свободния член D намираме от условието $d(A,\alpha) = \sqrt{5}$. Като вземем предвид формулата (13.9) за разстояние от точка до равнина, получаваме

$$d(A,\alpha) = \frac{|4.1 - 2(-2) - 5.2 + D|}{\sqrt{16+4+25}} = \sqrt{5}.$$

Следователно $|D-2| = 15$, което има две решения: $D_1 = -13$ и $D_2 = 17$. Тогава равнините, удовлетворяващи условието на задачата, са две и техните уравнения намираме, като заместим в (13.16) получените стойности за D. Така получаваме $\alpha_1\colon 4x-2y-5z-13 = 0$ и $\alpha_2\colon 4x-2y-5z+17 = 0$.

Задача 13.5. *Намерете уравнението на равнина α, която съдържа оста Oy и е равноотдалечена от точките $M(2,7,3)$ и $N(-1,1,0)$.*

Упътване. Тъй като равнината α съдържа Oy, то нейното уравнение има вида $\alpha\colon Ax + Cz = 0$. Стойностите на коефициентите A и C се намират чрез формулата за разстояние от точка до равнина.

Отговори. $\alpha_1\colon 3x - z = 0$, $\alpha_2\colon x - z = 0$.

Задача 13.6. *Определете взаимното положение на равнините:*

а) $\alpha\colon x + 2y - 3z + 10 = 0$, $\beta\colon 2x - y + z - 4 = 0$;
б) $\alpha\colon 2x - y + 5z + 4 = 0$, $\beta\colon 6x - 3y + 15z + 13 = 0$;
в) $\alpha\colon x + 3y + 2z - 3 = 0$, $\beta\colon 2x + 6y + 4z - 6 = 0$.

Решение. а) Съответните коефициенти през x, y и z в уравненията на двете равнини не са пропорционални, т.е. нормалните им вектори $\overrightarrow{N}_\alpha = (1,2,-3)$ и $\overrightarrow{N}_\beta = (2,-1,1)$ не са колинеарни. Следователно двете равнини се пресичат (в една права).

б) За коефициентите в уравненията на двете равнини е изпълнено $\frac{2}{6} = \frac{-1}{-3} = \frac{5}{15} \neq \frac{4}{13}$. Тогава от Теорема 13.4 следва, че двете равнини са успоредни.

в) Четирите съответни коефициента в двете уравнения са пропорционални. Следователно двете уравнения задават една и съща равнина (сливащи се равнини).

Задача 13.7. *Дадена е равнината $\alpha\colon 2x-2y-z+4=0$. Намерете уравненията на равнина, успоредна на α, ако:*

а) точката $A(2,-1,3)$ се намира на разстояние 5 единици от търсената равнина;

б) разстоянието между α и търсената равнина е 2 единици.

Решение. Общото уравнение на равнина, която е успоредна на α, е $\beta\colon 2x-2y-z+D=0$.

а) От условието $d(A,\beta)=5$ получаваме $|D+1|=15$, откъдето $D_1=-16$ и $D_2=14$. Това означава, че търсените равнини са $\beta_1\colon 2x-2y-z-16=0$ и $\beta_2\colon 2x-2y-z+14=0$.

б) Тъй като равнините α и β са успоредни, то разстоянието между тях е равно на разстоянието от произволна точка от едната равнина до другата равнина. Избираме произволна точка от равнината α, например пресечната ѝ точка (пробода) $M(x_0,0,0)$ с координатната ос Ox. Като заместим координатите на M в уравнението на α, намираме $2x_0+4=0$, откъдето $x_0=-2$, т.е. $M(-2,0,0)$. Тогава $d(\alpha,\beta)=d(M,\beta)=\frac{|D-4|}{3}=2$. Следователно $|D-4|=6$, откъдето намираме $D_1=-2$ и $D_2=10$. Това означава, че търсените равнини са $\beta_1\colon 2x-2y-z-2=0$ и $\beta_2\colon 2x-2y-z+10=0$.

Задача 13.8. *Намерете стойностите на реалния параметър λ, за които равнините $\alpha\colon x-y+\lambda z+3=0$ и $\beta\colon 2x+y+2z-6=0$: а) са перпендикулярни; б) сключват ъгъл с големина $45°$.*

Решение. а) Условието за перпендикулярност на равнините α и β е равносилно на $\overrightarrow{N}_\alpha\overrightarrow{N}_\beta=0$, където $\overrightarrow{N}_\alpha=(1,-1,\lambda)$ и $\overrightarrow{N}_\beta=(2,1,2)$ са съответните им нормални вектори. Следователно $\alpha\perp\beta$, точно когато $2\lambda+1=0$, т.е. $\lambda=-\frac{1}{2}$.

б) Пресмятаме косинуса на ъгъла между двете равнини, както следва

$$\cos\sphericalangle(\alpha,\beta)=\cos\sphericalangle(\overrightarrow{N}_\alpha,\overrightarrow{N}_\beta)=\frac{\overrightarrow{N}_\alpha\overrightarrow{N}_\beta}{|\overrightarrow{N}_\alpha||\overrightarrow{N}_\beta|}=\frac{2\lambda+1}{3\sqrt{\lambda^2+2}}.$$

От друга страна, по условие имаме $\cos\sphericalangle(\alpha,\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. От последните две равенства получаваме $2(2\lambda+1)^2 = 9(\lambda^2+2)$, откъдето следва че $\lambda = 4$.

Задача 13.9. *Намерете уравнението на равнината β, разполовяваща онзи двустенен ъгъл, образуван при пресичането на равнините $\alpha_1\colon 2x-y+2z-3=0$ и $\alpha_2\colon 3x+2y-6z-1=0$, в който се намира точката $M(1,2,-3)$.*

Решение. Уравненията на двете равнини, разполовяващи двустенния ъгъл, образуван при пресичането на α_1 и α_2, се задават чрез

$$\beta_{1,2}\colon \frac{2x-y+2z-3}{\sqrt{4+1+4}} = \pm\frac{3x+2y-6z-1}{\sqrt{9+4+36}}. \tag{13.17}$$

Пресмятаме $\alpha_1(M) = -9 < 0$ и $\alpha_2(M) = 24 > 0$. Ориентираните разстояния от точката M до равнините α_1 и α_2 са с противоположни знаци, следователно търсената равнина е равнината от уравнението (13.17) със знак минус, т.е. $\beta\colon 23x-y-4z-24=0$.

Задача 13.10. *Намерете стойностите на реалните параметри a и b така, че равнините $\alpha\colon x+2y-z+b=0$, $\beta\colon 2x-y+3z-1=0$ и $\gamma\colon x+ay-6z+10=0$:*

а) да имат една обща точка;

б) да имат една обща права;

в) да се пресичат в три различни успоредни прави.

Решение. За решаване на задачата ще разгледаме системата от уравненията на трите равнини. Чрез метода на Гаус получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -b \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & a & -6 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -b \\ 0 & -5 & 5 & 2b+1 \\ 0 & a-2 & -5 & b-10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -b \\ 0 & -5 & 5 & 2b+1 \\ 0 & 0 & a-7 & \frac{a+b+2ab-52}{5} \end{array}\right).$$

а) Трите равнини се пресичат в една точка, точно когато системата от уравненията им има единствено решение, т.е. е съвместима и определена. Това условие е изпълнено, точно когато $a \neq 7$ и $b \in \mathbb{R}$.

б) Трите равнини се пресичат в една права (принадлежат на сноп равнини с носител тази права), точно когато системата от уравненията им е съвместима и неопределена с ранг 2. Това е налице, точно когато $a-7=0$ и $a+b+2ab-52=0$. Следователно $a=7$, $b=3$.

в) Тъй като никои две от равнините не могат да бъдат успоредни помежду си, то те ще се пресичат в три различни успоредни прави, точно когато системата от уравненията им е несъвместима. Това условие е изпълнено, точно когато $a-7=0$, но $a+b+2ab-52\neq 0$. Следователно $a=7$, $b\neq 3$.

Задача 13.11. *Намерете канонично уравнение на правата l, ако:*
а) $l\colon \left| \begin{array}{l} x-y+z-4=0 \\ x+y-2z-2=0 \end{array} \right.$; *б)* $l\colon \left| \begin{array}{l} 2x+y+3z-4=0 \\ x-y+z+1=0. \end{array} \right.$

Решение. а) Ще решим този пример по два начина.

Начин 1. Нормалните вектори на двете равнини, задаващи правата l, са $\overrightarrow{N}_1=(1,-1,1)$ и $\overrightarrow{N}_2=(1,1,-2)$. Тогава тяхното векторно произведение $\overrightarrow{N}_1\times\overrightarrow{N}_2=(1,3,2)$ е направляващ вектор на l. Намираме координатите на една точка от l, например пресечна точка $M(x_0,y_0,0)$ с координатната равнина Oxy. Като заместим координатите на M в уравнението на правата, получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} x_0-y_0-4=0 \\ x_0+y_0-2=0, \end{array} \right.$$

чието решение е $x_0=3$, $y_0=-1$. Следователно $M(3,-1,0)$. Тогава каноничното уравнение на тази права е $l\colon \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$.

Начин 2. Намираме координатите на две точки от правата, например $M(3,-1,0)$ и $N(0,-10,-6)$. Тогава насочената отсечка $\overrightarrow{MN}$ е направляващ вектор за правата l.

Отговори. б) $l\colon \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-3}$.

Задача 13.12. *Определете взаимното положение на правата l и равнината α, ако:*
а) $l\colon \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}$, $\alpha\colon 3x+2y-z-10=0$;
б) $l\colon x=2+2s$, $y=1+4s$, $z=-2-s$, $\alpha\colon 3x-y+2z+5=0$;
в) $l\colon \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{2}$, $\alpha\colon 2x-2y+z+3=0$.

Решение. а) Направляващият вектор на правата е $\vec{l}=(2,-1,3)$, а нормалният на равнината е $\overrightarrow{N}=(3,2,-1)$. Пресмятаме скаларното произведение $\overrightarrow{N}\vec{l}=6-2-3=1\neq 0$. Следователно правата не е компланарна с равнината, т.е. правата l пресича равнината α.

б) Аналогично на а), намираме $\vec{l}=(2,4,-1)$ и $\overrightarrow{N}=(3,-1,2)$ и пресмятаме $\overrightarrow{N}\vec{l}=0$, което показва, че правата е компланарна с равнината, т.е. е успоредна на равнината или лежи в нея. За да разграничим двата случая, избираме една точка от правата l и проверяваме дали тази точка лежи в равнината α. Например точката $A(2,1,-2)$. Заместваме координатите на A в уравнението на α и получаваме $\alpha(A) = 6 \neq 0$. Следователно A не лежи в α, което показва, че правата е успоредна на равнината.

в) Отново $\overrightarrow{N}\vec{l} = 0$. Затова избираме една точка от правата l, например $A(-1,2,3)$, и пресмятаме $\alpha(A) = 0$. Следователно правата l лежи в равнината α.

Ще отбележим, че задачата може да се реши и като се изследва броя на общите точки между правата и равнината, т.е. се реши системата от техните уравнения.

Задача 13.13. *Намерете уравнението на равнина, която:*

а) съдържа точката $A(2,3,1)$ и правата

$$l\colon \left|\begin{array}{l} 3x-2y+5z-2=0 \\ x-4y+z+3=0 \end{array}\right. ;$$

б) е перпендикулярна на $\alpha\colon x+2y+3z+5=0$ и съдържа правата

$$l\colon \left|\begin{array}{l} 2x+y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{array}\right. ;$$

в) е на разстояние $\sqrt{14}$ от координатното начало и съдържа правата

$$l\colon \left|\begin{array}{l} 2x-3y-z=0 \\ 4x+y+5z-28=0. \end{array}\right.$$

Решение. а) Търсената равнина принадлежи на снопа равнини с носител правата l. Следователно нейното уравнение е от вида

$$\beta\colon \lambda(3x-2y+5z-2)+\mu(x-4y+z+3)=0. \qquad (13.18)$$

Като се вземе предвид, че точката A лежи в равнината β, получаваме $\lambda - 2\mu = 0$. Избираме една двойка ненулеви стойности за параметрите, която удовлетворява последното условие, например $\lambda = 2$, $\mu = 1$, и заместваме тези стойности в уравнението (13.18). Така получаваме $\beta\colon 7x-8y+11z-1=0$.

в) Уравнението на търсената равнина е от вида

$$2(\lambda+2\mu)x+(\mu-3\lambda)y+(5\mu-\lambda)z-28\mu=0.$$

От условието $d(O,\beta) = \sqrt{14}$ получаваме $\frac{28|\mu|}{\sqrt{14(\lambda^2+3\mu^2)}} = \sqrt{14}$. Последното уравнение е еквивалентно на $\lambda^2 = \mu^2$, откъдето $\lambda = \pm\mu$. При $\lambda = 1$, $\mu = 1$ получаваме равнината $\beta_1\colon 3x-y+2z-14=0$, а при $\lambda = 1$, $\mu = -1$ получаваме $\beta_2\colon x+2y+3z-14=0$.

Упътване. б) Използвайте Зад. 13.8 а).

Отговори. б) $\beta\colon x + y - z + 1 = 0$.

Задача 13.14. *Намерете уравнението на правата l, която минава през точката $A(2,1,-2)$, пресича оста Oy и е перпендикулярна на правата $p\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{1}$.*

Решение. Най-напред ще намерим уравненията на две равнини, съдържащи l. Понеже точката A е от правата l, то тези равнини ще съдържат A. Тъй като правата l пресича правата Oy, то те лежат в една равнина α. Това е равнината α през точката A и Oy, т.е. $\alpha\colon x+z=0$. Тъй като l е перпендикулярна на p, то l лежи в равнина β през A, перпендикулярна на p. Уравнението на тази равнина е $\beta\colon 2x - y + z - 1 = 0$. Следователно

$$l\colon \left|\begin{array}{l} x + z = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Задача 13.15. *Намерете ортогоналната проекция на:*

а) точката $A(1,2,-3)$ в равнината $\alpha\colon x + y - 2z + 3 = 0$ и разстоянието от A до α;

б) точката $B(0,2,4)$ върху правата $g\colon x = 2+s, y = 2-s, z = 2s$ и разстоянието от B до g;

в) правата $l\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$ върху равнината $\beta\colon x+2y-z+4 = 0$.

Решение. а) Построяваме правата p през A, перпендикулярна на равнината α. Тази права има уравнения

$$p\colon \left|\begin{array}{l} x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = -3 - 2s. \end{array}\right.$$

Тогава пресечната точка A' на p и α е търсената ортогонална проекция на A върху α. Заместваме изразите за x, y и z от уравнението на правата p в уравнението на равнината α и достигаме до уравнението $6s + 12 = 0$, откъдето намираме $s = -2$. След заместване на тази стойност на параметъра в уравнението на правата получаваме $A'(-1,0,1)$. Разстоянието от A до α пресмятаме чрез формулата (13.9) или чрез $|\overrightarrow{AA'}| = 2\sqrt{6}$.

б) Построяваме равнината γ през точката B, перпендикулярна на правата g. Тази равнина има уравнение $\gamma\colon x-y+2z-6 = 0$. Тогава пресечната точка B' на g и γ е търсената ортогонална проекция на B върху g. Аналогично на подточка а), намираме $B'(3,1,2)$. Разстоянието от B до g пресмятаме чрез $|\overrightarrow{BB'}| = \sqrt{14}$.

в) Построяваме равнината δ през правата l и перпендикулярна на равнината β. Получаваме $\delta\colon y+2z-1=0$. Тогава търсената ортогонална проекция l' на правата l върху равнината β е пресечницата на равнините β и δ. Следователно $l'\colon y+2z-1=0,\ x+2y-z+4=0$.

Задача 13.16. *Даден е триъгълник с върхове $A(-2,1,4)$, $B(4,1,-2)$ и $C(2,0,-2)$. Намерете уравнението на височината през върха C.*

Решение. Аналогично на Задача 13.15 б), намираме ортогоналната проекция $H(3,1,-1)$ на точката C върху правата AB. Тогава търсената права минава през C и H и има уравнение $h\colon \frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1}$.

Забележка 13.7. Задачата може да бъде решена и като директно се намери вектор, колинеарен с височината, както в Задача 9.19.

Задача 13.17. *Дадени са равнината $\alpha\colon 2x-3y+z+3=0$ и точката $A(1,-2,3)$. Намерете ортогонално симетричната точка A' на A относно α.*

Решение. Ще разделим решението на три стъпки:

Стъпка 1. Построяваме правата p, минаваща през A и перпендикулярна на α. Скаларно параметричните уравнения на тази права са

$$p\colon \left|\begin{array}{l} x=1+2s \\ y=-2-3s \\ z=3+s. \end{array}\right.$$

Стъпка 2. Намираме координатите на пресечната точка M на правата p и равнината α (ортогоналната проекция на A в α). Това е точката $M(-1,1,2)$.

Стъпка 3. Тъй като M е среда на отсечката AA', то за координатите на трите точки е изпълнено $M=\frac{A+A'}{2}$, откъдето $A'=2M-A$. Така получаваме $A'(-3,4,1)$.

Задача 13.18. *Дадени са правата $l\colon \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ и точката $A(2,3,-6)$. Намерете ортогонално симетричната точка A' на A относно l.*

Решение. Ще разделим решението на три стъпки:

Стъпка 1. Равнината α, минаваща през точката A и перпендикулярна на l, има уравнение $\alpha\colon 2x+2y-z-16=0$.

Стъпка 2. Пресечната точка на правата l и равнината α (ортогоналната проекция на A върху l) е $M(4,3,-2)$.

Стъпка 3. Тъй като M е среда на отсечката AA', то $A'(6,3,2)$.

Задача 13.19. *Светлинен лъч, пуснат от точката $A(1,1,3)$ успоредно на оста Ox, се отразява от равнината $\alpha\colon x+y-z-5=0$. Намерете точката на отражение и уравнението на правата, съдържаща отразения лъч.*

Решение. Уравнението на правата, съдържаща пуснатия от точка A светлинен лъч, е $l\colon x=1+s$, $y=1$, $z=3$. Точката на отражението, т.е. пресечната точка на l и α, е $B(7,1,3)$. Тъй като правата l', съдържаща отразения лъч, също минава през B и ъгълът на падане е равен на ъгъла на отразяване, то нормалният вектор на равнината на отразяване е ъглополовяща на ъгъла, образуван от падащия и отразения лъч. Оттук следва, че ортогонално симетричната точка относно равнината α на произволна точка от l лежи върху l' и обратно. Намираме ортогонално симетричната точка $A'(5,5,-1)$ на A. Тогава, като се вземе предвид, че A' и B лежат върху l', получаваме следното уравнение: $l'\colon \frac{x-5}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+1}{2}$.

Задача 13.20. *Светлинен лъч, пуснат от координатното начало, след отразяването си от равнината $\alpha\colon 2x+3y+z-14=0$, става успореден на Oy. Намерете уравнението на правата, съдържаща падащия лъч.*

Решение. Намираме координатите на точката $O'(4,6,2)$, ортогонално симетрична на координатното начало O относно равнината α. Уравнението на правата, съдържаща отразения лъч, е $l'\colon x=4$, $y=6+s$, $z=2$. Тогава пресечната точка на l' и α е $B(4,\frac{4}{3},2)$. Тъй като правата l, съдържаща падащия лъч, минава през точките O и B, то нейното уравнение е $l\colon \frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

Задача 13.21. *Определете взаимното положение на правите:*

$$а)\ l\colon \left|\begin{array}{l} x=3+s\\ y=-4-2s\\ z=-4-s\end{array}\right. \quad и \quad p\colon \left|\begin{array}{l} x=2+t\\ y=3+3t\\ z=2t\end{array}\right. ;$$

$$б)\ l\colon \left|\begin{array}{l} x=2+s\\ y=3-s\\ z=1+2s\end{array}\right. \quad и \quad p\colon \left|\begin{array}{l} x=2t\\ y=1+t\\ z=2-t\end{array}\right. ;$$

$$в)\ l\colon \left|\begin{array}{l} x=2+2s\\ y=-1+s\\ z=1-s\end{array}\right. \quad и \quad p\colon \left|\begin{array}{l} x=4t\\ y=2+2t\\ z=3-2t\end{array}\right. ;$$

$$г)\ l\colon \left|\begin{array}{l} x=4+s\\ y=2-2s\\ z=1+3s\end{array}\right. \quad и \quad p\colon \left|\begin{array}{l} x=3-t\\ y=4+2t\\ z=-2-3t.\end{array}\right.$$

Ако правите се пресичат, намерете координатите на пресечната им точка. В случай че правите определят единствена равнина, намерете нейното уравнение.

Решение. а) Направляващите вектори $\vec{l}(1,-2,-1)$ и $\vec{p}(1,3,2)$ на двете прави не са колинеарни. Следователно двете прави не са успоредни и не съвпадат. Дали правите се пресичат или са кръстосани, ще проверим по два начина.

Начин 1. Избираме по една точка от всяка от правите, например $A(3,-4,-4) \in l$ и $B(2,3,0) \in p$, и намираме $\overrightarrow{AB}(-1,7,4)$. Тъй като смесеното произведение е

$$\vec{l}\,\vec{p}\,\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0, \tag{13.19}$$

то векторите $\vec{l}$, $\vec{p}$ и $\overrightarrow{AB}$, а следователно и правите l и p са компланарни. От друга страна, $\vec{l} \nparallel \vec{p}$, което означава че правите се пресичат. Пресечната точка на двете прави намираме, като решим системата от техните уравнения. Приравняваме съответните изрази за x, y и z от уравненията на правите и достигаме до

$$\left| \begin{array}{l} s - t = -1 \\ 2s + 3t = -7 \\ s + 2t = -4. \end{array} \right. \tag{13.20}$$

Горната система има единствено решение $s = -2$, $t = -1$. Като заместим намерените стойности на параметрите съответно в уравнението на l или p, получаваме координатите на пресечната им точка $M(1,0,-2)$.

Като използваме координатите на M и направляващите вектори на двете прави, получаваме уравнението $x + 3y - 5z - 11 = 0$ на равнината, която ги съдържа.

Начин 2. Чрез приравняване на x, y и z от уравненията на правите достигаме до системата линейни уравнения (13.20). Тъй като тази система има единствено решение, то заключаваме, че правите се пресичат. Пресечната точка M намираме по предходния начин.

б) Както в подточка а), направляващите вектори на двете прави $\vec{l}(1,-1,2)$ и $\vec{p}(2,1,-1)$ не са колинеарни. Пресмятаме детерминантата от координатите на $\vec{l}$, $\vec{p}$ и $\overrightarrow{AB}(-2,-2,1)$, където $A(2,3,1) \in l$ и $B(0,1,2) \in p$, и установяваме, че тази детерминанта е различна от нула. Това показва, че двете прави не са компланарни. Получените резултати показват, че правите са кръстосани.

в) Тъй като $\vec{l}(2,1,-1) \parallel \vec{p}(4,2,-2)$, но $\overrightarrow{AB}(-2,3,2) \nparallel \vec{l}$, където $A(2,-1,1) \in l$ и $B(0,2,3) \in p$, то правите са успоредни и определят единствена равнина. Като се вземе предвид, че точката A (или B) и векторите $\vec{l}$ и $\overrightarrow{AB}$ са компланарни с тази равнина, получаваме нейното уравнение $5x - 2y + 8z - 20 = 0$.

г) Направляващите вектори $\vec{l}(1,-2,3)$ и $\vec{p}(-1,2,-3)$ на правите са колинеарни. Пресмятаме $\overrightarrow{AB}(-1,2,-3)$, където $A(4,2,1) \in l$ и $B(3,4,-2) \in p$. Тъй като трите вектора $\vec{l} \parallel \vec{p} \parallel \overrightarrow{AB}$, то правите l и p са сливащи се (двете уравнения задават една и съща права).

Задача 13.22. *Намерете трансверзалата*[1] *на кръстосаните прави:*

а) $l\colon \left|\begin{array}{l} x = 1+s \\ y = 2-s \\ z = 1+s \end{array}\right.$ *и* $p\colon \left|\begin{array}{l} x = t \\ y = 3+t \\ z = -3+2t \end{array}\right.$,
която лежи в равнината $\alpha\colon x + y + 2z - 3 = 0$*;*

б) $l\colon \left|\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array}\right.$ *и* $p\colon \left|\begin{array}{l} x + y + 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{array}\right.$ *през т.* $A(1,-2,1)$*;*

в) $l\colon \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{1}$, $p\colon \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$, *която е успоредна на правата* $g\colon \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}$*;*

г) $l\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$, $p\colon x = 1+2s, y = -2s, z = -1+s$, *перпендикулярна на тези прави (ос на правите).*

Решение. Проверете, че дадените прави са кръстосани.

а) Търсената трансверзала минава през пресечните точки на правите l и p с равнината α, които са съответно $A(0,3,0)$ и $B(1,4,-1)$. Следователно нейното уравнение е $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$.

б) По същия начин като в Задача 13.13 а) намираме уравнението на равнината $\alpha\colon x + y + z = 0$ през A и правата l и равнината $\beta\colon 3x + 2y - z + 2 = 0$ през A и правата p. Тогава трансверзалата на двете прави е пресечницата на α и β.

в) Построяваме равнината $\alpha\colon x - 2y + 3z + 3 = 0$ през правата l и успоредна на правата g, както и равнината $\beta\colon y - 3z - 5 = 0$ през p, успоредна на g. Търсената трансверзала е пресечницата на равнините α и β.

г) Направляващите вектори на двете прави са съответно $\vec{l}(2,4,1)$ и $\vec{p}(2,-2,1)$. Векторът $\vec{v} = \vec{l} \times \vec{p} = (6,0,-12)$ е перпендикулярен

[1]Трансверзала е права, която пресича две кръстосани прави.

на направленията на правите l и p и следователно е колинеарен с тяхната ос. Построяваме равнината $\alpha\colon 8x - 5y + 4z - 10 = 0$ през правата p и успоредна на $\vec{v}$ и равнината $\beta\colon 4x + 5y + 2z - 2 = 0$ през p и успоредна на $\vec{v}$. Тогава оста на двете прави е пресечницата на α и β.

Задача 13.23. *Уравнението на движението на точка $M(x, y, z)$ е*

$$\left|\begin{array}{l} x = 5 - 2t \\ y = -3 + 2t \\ z = 5 - t. \end{array}\right. \tag{13.21}$$

Намерете скоростта, с която се движи M, и разстоянието d, което точката изминава от $t_0 = 0$ до $t_1 = 4$.

Решение. Точката M се движи по правата с уравнение (13.21). Скоростта на движение V е равна на дължината на направляващия вектор $\vec{v} = (-2, 2, -1)$ на тази права, т.е. $V = |\vec{v}| = 3$.

При $t = t_0 = 0$ точката се намира в началното си положение $M_0(5, -3, 5)$, а при $t = t_1 = 4$ точката е в положение $M_1(-3, 5, 1)$. Разстоянието d, което точката изминава от M_0 до M_1, е равно на дължината на $\overrightarrow{M_0M_1}$, т.е. $d = |\overrightarrow{M_0M_1}| = 12$.

Задача 13.24. *Съставете уравнението на движението на точката $M(x, y, z)$ с начално положение $M_0(3, -1, -5)$, движеща се равномерно праволинейно по направление на вектора $\vec{p} = (-2, 6, 3)$ със скорост $V = 21$.*

Решение. Точката M се движи по права през M_0 с направляващ вектор $\vec{v}$, колинеарен на $\vec{p}$ и с дължина 21. Тъй като $|\vec{p}| = 7$, то $\vec{v} = 3\vec{p} = (-6, 18, 9)$. Тогава уравнението на движението на точката M е правата

$$l : \left|\begin{array}{l} x = 3 - 6t \\ y = -1 + 18t \\ z = -5 + 9t. \end{array}\right.$$

13.2. **Уравнение на сфера.**

Определение 13.7. Множеството от точки в пространството, които се намират на равни разстояния от една фиксирана точка C, се нарича *сфера.* Точката C се нарича *център* на сферата, а разстоянието от C до точките от сферата – *радиус*.

Теорема 13.10. *Нека $Oxyz$ е ортонормирана КС. Тогава уравнението на сфера S с център точката $C(a, b, c)$ и радиус $r > 0$ е*

$$S\colon (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2. \qquad (13.22)$$

Теорема 13.11. *Нека $l^2 + m^2 + n^2 - 4p > 0$, където $l, m, n, p \in \mathbb{R}$. Тогава*

$$x^2 + y^2 + z^2 + lx + my + nz + p = 0 \qquad (13.23)$$

е уравнение на сфера с център $C(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2})$ и радиус

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 4p}.$$

В следващите задачи ще считаме координатната система за дясна ортонормирана, освен ако е указано друго.

Задача 13.25. *Намерете уравнението на сфера:*

а) с център $C(5, -3, 7)$ и радиус $r = 2$;
б) с център координатното начало и радиус $r = 3$;
в) с център $C(4, -4, -2)$, минаваща през координатното начало;
г) с краища на един неин диаметър точките $A(2, -3, 5)$ и $B(4, 1, -3)$;
д) с център точката $C(-2, 0, 1)$, допираща се до равнината $\alpha\colon 2x + 2y + z + 15 = 0$.

Решение. а) Заместваме координатите на центъра и радиуса в (13.22) и получаваме търсеното уравнение $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 4$.

в) Тъй като точката $O(0, 0, 0)$ лежи върху сферата, а C е нейният център, то $r = |\overrightarrow{OC}| = 6$. Тогава търсеното уравнение е

$$(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 36.$$

г) Центърът C на тази сфера е средата на отсечката AB, а радиусът ѝ е $r = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$. Тогава $C(3, -1, 1)$ и $r = \sqrt{21}$, следователно сферата има уравнение $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$.

д) Тъй като сферата се допира до равнината α, то разстоянието от центъра ѝ C до α е равно на радиуса, т.е. $d(C, \alpha) = 4 = r$. Следователно уравнението на тази сфера е

$$(x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16.$$

Отговори. б) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Задача 13.26. *Установете кои от следващите уравнения задават сфера и намерете центъра и радиуса ѝ:*

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 10z - 14 = 0$;
б) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 8x - 16y - 8z - 1 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 18 = 0$;

г) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 10 = 0$.

Решение. а) Чрез отделяне на точни квадрати в лявата страна на даденото уравнение установяваме, че то е еквивалентно на

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 64.$$

Това уравнение задава сфера с център $C(3,-4,5)$ и радиус $r = 8$.

б) Разделяме двете страни на уравнението на 4 и чрез отделяне на точни квадрати получаваме $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 25/4$. Следователно даденото уравнение определя сфера с център $C(-1,2,1)$ и радиус $r = 5/2$.

в) Даденото уравнение е еквивалентно на $x^2+y^2+(z-3)^2 = -9$, което не е уравнение на реална сфера, тъй като $r = 3i$.

Отговори. г) $C(-1,3,-\frac{1}{2})$, $r = 9/2$.

Задача 13.27. *Намерете уравнението на сфера с радиус $r = 3$, която се допира до равнината $\alpha\colon x + 2y + 2z + 3 = 0$ в точката $M(1,1,-3)$.*

Решение. Центърът C на търсената сфера лежи върху правата p, която минава през M и е перпендикулярна на α. Скаларно параметричните уравнения на тази права са

$$p\colon \left|\begin{array}{l} x = 1 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = -3 + 2s. \end{array}\right.$$

Следователно центърът е $C(1+s_0, 1+2s_0, -3+2s_0),\ s_0 \in \mathbb{R}$. Тъй като $d(C,\alpha) = r = 3$, то $|s_0| = 1$. При $s_0 = -1$ имаме $C(0,-1,-5)$ и уравнението на сферата е

$$x^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 9.$$

При $s = 1$ имаме $C(2,3,-1)$ и сферата има уравнение

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

Задача 13.28. *Намерете уравнението на равнина, която се допира до сферата $S\colon x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$ в точка $M(6,-3,-2)$.*

Решение. Центърът на дадената сфера е $O(0,0,0)$. Търсената допирателна равнина минава през M и е перпендикулярна на $\overrightarrow{OM}$. Следователно уравнението ѝ е $6x - 3y - 2z - 49 = 0$.

Задача 13.29. *Намерете уравненията на допирателните равнини към сферата $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = 9$, които са успоредни на равнината $\alpha\colon x + 2y - 2z + 13 = 0$.*

Решение. Центърът и радиусът на дадената сфера са съответно $C(0,0,0)$ и $r = 3$. Тъй като търсените допирателни равнини са успоредни на α, то те имат уравнения от вида $\beta\colon x+2y-2z+D=0$. Свободния член D определяме от условието $d(C,\beta) = r$, откъдето получаваме $D_1 = -9$ и $D_2 = 9$. Следователно търсените равнини са $\beta_1\colon x+2y-2z-9=0$ и $\beta_2\colon x+2y-2z+9=0$.

Задача 13.30. *Намерете уравнението на сферата, която е описана около тетраедъра с върхове $A(1,0,2)$, $B(1,-2,-2)$, $C(-3,2,-2)$ и $D(-1,4,2)$.*

Решение. Ще решим задачата по два начина.

Начин 1. Ще използваме, че всяка сфера има уравнение от вида $x^2+y^2+z^2+lx+my+nz+p=0$ и че всяка от дадените четири точки удовлетворява това уравнение. Чрез заместване на координатите на тези точки в уравнението на сферата получаваме следната система линейни уравнения

$$\left|\begin{array}{l} l+2n+p=-5 \\ l-2m-2n+p=-9 \\ 3l-2m+2n-p=17 \\ l-4m-2n-p=21. \end{array}\right.$$

Тази система има единствено решение $l=-4$, $m=-6$, $n=4$, $p=-9$. Следователно търсената сфера има уравнение

$$x^2+y^2+z^2-4x-6y+4z-9=0.$$

Начин 2. Ще намерим уравненията на три равнини, минаващи през центъра на сферата (диаметрални равнини). Избираме три отсечки с краища дадените точки и през средата на всяка от тях построяваме равнина, перпендикулярна на съответната отсечка. Например през $M(1,-1,0)$, $N(-1,1,0)$ и $P(0,2,2)$, които са среди съответно на AB, AC и AD, построяваме съответно равнините $\alpha\colon y+2z+1=0$, $\beta\colon 2x-y+2z+3=0$ и $\gamma\colon x-2y+4=0$. Пресечната точка на тези три равнини е центърът $Q(2,3,-2)$ на сферата. Разстоянието от Q до всяка от четирите дадени точки е равно на радиуса $r=\sqrt{26}$. Следователно търсената сфера има уравнение $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=26$, което е еквивалентно на уравнението, получено по първия начин.