

Хомогенни координати и безкрайни елементи

1. Хомогенни координати на крайни точки

Нека $M(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ е зададена със своите стандартни (нехомогенни, афинни, декартови) координати.

Тогава наредената четворка (x, y, z, t) , където $t \neq 0$, се нарича *хомогенни координати* на точката $M(X, Y, Z)$, ако

$$X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{z}{t}.$$

Забележка. За точките $M(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ хомогенни координати се дефинират чрез наредената тройка (x, y, t) , за която

$$X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad t \neq 0.$$

Преход от хомогенни към нехомогенни координати и обратно – пример.

Нека $M(1, 2, 3, 4)$ в хомогенни координати. Тогава

$$M(1, 2, 3, 4) \rightarrow M\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right) \text{ в нехомогенни координати.}$$

Обратно. Ако $M(X, Y, Z)$ в афинни (или декартови) координати, то $M(X, Y, Z, 1)$ е същата точка в хомогенни координати.

Важно свойство на хомогенните координати е, че са определени с точност до ненулев множител, тъй като при $\lambda \neq 0$ наредените четворки (x, y, z, t) и $(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$ определят една и съща точка в хомогенни координати. Това е вярно поради

$$X = \frac{\lambda x}{\lambda t} = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{\lambda y}{\lambda t} = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{\lambda z}{\lambda t} = \frac{z}{t}.$$

Следователно, ако точката $M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ в нехомогенни координати, то $M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right)$ в хомогенни координати може да се запише във вида $M(1, 2, 3, 4)$.

2. Безкрайни точки

Нека в тримерното пространство е зададена правата g през точката $M(X_0, Y_0, Z_0)$ и с направляващ ненулев вектор $\vec{p}(a, b, c) \parallel g$. Тогава е известно, че скалярно параметричното уравнение на правата (относно нехомогенни координати) има вида

$$g : \begin{cases} X = X_0 + a.s \\ Y = Y_0 + b.s \\ Z = Z_0 + c.s, \end{cases} \quad (1)$$

където s е реален параметър, а (X, Y, Z) са нехомогенните координати на произволна точка M от правата g . Хомогенните координати на M са $M(X, Y, Z, 1)$.

Тогава, наредената четворка $(\frac{1}{s}X, \frac{1}{s}Y, \frac{1}{s}Z, \frac{1}{s})$ при $s \neq 0$, т.е. при $M \neq M_0$, задава същата точка M чрез хомогенни координати.

Следователно за хомогенните координати (x, y, z, t) на M имаме

$$x = \frac{X}{s}, \quad y = \frac{Y}{s}, \quad z = \frac{Z}{s}, \quad t = \frac{1}{s}. \quad (2)$$

Разделяйки двете страни на уравненията (1) на s и отчитайки (2), за хомогенните координати на произволна точка M от правата g получаваме

$$g : \begin{cases} \frac{X}{s} = \frac{X_0}{s} + a \\ \frac{Y}{s} = \frac{Y_0}{s} + b \\ \frac{Z}{s} = \frac{Z_0}{s} + c \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} x = \frac{X_0}{s} + a \\ y = \frac{Y_0}{s} + b \\ z = \frac{Z_0}{s} + c \\ t = \frac{1}{s} \end{cases} \quad (3)$$

Нека в горните уравнения оставим $s \rightarrow \pm\infty$ (при което точката M ще се отдалечава от фиксираната точка M_0). Извършвайки граничния преход в (3), получаваме $(x, y, z, t) = (a, b, c, 0)$.

Безкрайната точка на правата g с направляващ вектор $\vec{p}(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ се нарича точката U с хомогенни координати $U(a, b, c, 0)$.

Добавяйки безкрайната точка U_g към множеството от крайните точки върху g , получаваме разширена права $\bar{g}$, т.е. $\bar{g} = g \cup U_g$.

Всяка крайна права притежава единствена безкрайна точка.

Успоредните прави имат една и съща безкрайна точка. Това е така, тъй като правите, които са успоредни помежду си, имат един и същ направляващ вектор $\vec{p}(a, b, c)$ и следователно безкрайната им точка има хомогенни координати $U(a, b, c, 0)$.

Можем да направим извода, че в разширената равнина $\bar{\mathbb{R}}^2$ ($\mathbb{R}^2$ плюс безкрайните точки на всички прави, лежащи в нея) всеки две прави се пресичат. Неуспоредните помежду си прави се пресичат в крайна точка, а успоредните прави се пресичат в безкрайната си точка.

Хомогенните координати $(x, y, z, t) \neq (0, 0, 0, 0)$, т.е. не съществува точка в разширеното тримерно пространство $\mathbb{R}^3$ с хомогенни координати $(0, 0, 0, 0)$. Ако $x = y = z = 0$, то тази точка е координатното начало (крайна точка) с хомогенни координати $O(0, 0, 0, 1)$. Ако пък $t = 0$, то точката е безкрайната точка на някоя права и следователно нейните първи три координати (x, y, z) са координати на направляващия вектор на тази права и следователно $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Ако е дадена наредената четворка $(x, y, z, t) \neq (0, 0, 0, 0)$, то съществува точно една точка, за която (x, y, z, t) са нейните хомогенни координати.

Множеството от всички безкрайни точки в дадена равнина α се нарича безкрайна права ω_α . С $\bar{\alpha}$ означаваме разширената равнина $\bar{\alpha} = \alpha \cup \omega_\alpha$.

Ако две равнини са успоредни, те имат обща безкрайна права. Следователно всеки две равнини в разширеното тримерно пространство $\mathbb{R}^3$ имат пресечница.

Множеството от всички безкрайни точки и прави в пространството се нарича безкрайна равнина Ω . Разширено пространство $\bar{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \Omega$.

Пример. Дадена е правата $g : 2x + 3y - 5 = 0$. Намерете нейната безкрайна точка.

Тъй като нормален вектор на правата g е $\vec{N}(2, 3)$, то направляващ вектор на правата е векторът $\vec{v}(3, -2)$. Следователно безкрайната точка на правата е $U_g(3, -2, 0)$.

Пример. Дадена е правата

$$g : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+2}{5}.$$

Намерете безкрайната точка на правата g .

Тъй като $\vec{v}(3, -4, 5)$ е направляващ вектор за правата, то нейната безкрайна точка е $U_g(3, -4, 5, 0)$.

Пример. Дадена е правата

$$g : \begin{cases} x - y + z + 3 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0. \end{cases}$$

Намерете безкрайната точка на g .

Тъй като равнините, задаващи правата, имат съответно нормални вектори $\vec{N}_1(1, -1, 1)$ и $\vec{N}_2(2, 1, 0)$, то направляващ вектор за правата е векторът $\vec{v} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = (-1, 2, 3)$. Следователно безкрайната точка на правата е $(-1, 2, 3, 0)$.

3. Уравнения на прави и равнини в хомогенни координати

Нека умножим двете страни на равенствата (3) с s . По този начин уравнението на правата g добива вида

$$g : \begin{cases} sx = X_0 + a.s \\ sy = Y_0 + b.s \\ sz = Z_0 + c.s \\ st = 1 + 0.s \end{cases} \quad (4)$$

Отчитаме, че относно хомогенни координати: $M(sx, sy, sz, st) = (x, y, z, t)$ (произволна точка от g), $M_0(X_0, Y_0, Z_0, 1)$ (фиксирана точка от g) и $U_g(a, b, c, 0)$ (безкрайната точка на g). Тогава краткият запис на уравнението (4) на правата g относно хомогенни координати е

$$M = M_0 + s.U_g. \quad (5)$$

Съгласно (5) две различни точки M_1 и M_2 от правата g ще се получат при две различни стойности на параметъра s (съответно s_1 и s_2 , $s_1 \neq s_2$) чрез равенствата

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 + s_1.U_g \\ M_2 &= M_0 + s_2.U_g \end{aligned} \quad (6)$$

От горните две равенства намираме

$$U_g = \frac{M_1 - M_2}{s_1 - s_2}, \quad M_0 = -\frac{s_2 M_1 - s_1 M_2}{s_1 - s_2}.$$

Тогава след заместване на тези изрази за M_0 и U_g в (5) и преобразуване получаваме

$$M = -\frac{s_2 M_1 - s_1 M_2}{s_1 - s_2} + s. \frac{M_1 - M_2}{s_1 - s_2} = \frac{s - s_2}{s_1 - s_2} M_1 + \frac{s_1 - s}{s_1 - s_2} M_2.$$

Следователно параметричното уравнение за правата g относно хомогенни координати в тримерното разширено пространство

$$g : M = \alpha.M_1 + \beta.M_2, \quad (7)$$

където

$$\alpha = \frac{s - s_2}{s_1 - s_2}, \quad \beta = \frac{s_1 - s}{s_1 - s_2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

Следователно относно хомогенни координати всяка точка от правата g е линейна комбинация на две нейни произволни точки.

Ако относно хомогенни координати $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ и $M(x, y, z, t)$, координатният запис на уравнението (7) е

$$g : \begin{cases} x = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ y = \alpha y_1 + \beta y_2 \\ z = \alpha z_1 + \beta z_2 \\ t = \alpha t_1 + \beta t_2 \end{cases} \quad (8)$$

Пример. Нека относно хомогенни координати са дадени точките $M_1(1, -2, 3, 4)$ и $M_2(0, 1, -1, 2)$. Последната координата и на двете точки е различна от нула, следователно двете точки са крайни. Уравнението на крайната права g , която те определят, е

$$g : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha - \beta \\ t = 4\alpha + 2\beta \end{cases}$$

Нехомогенните координати на тези точки са съответно $M_1\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $M_2\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Следователно направляващ вектор за правата g през точките M_1 и M_2 е насочената отсечка $\overrightarrow{M_1M_2}\left(-\frac{1}{4}, 1, -\frac{5}{4}\right) \parallel (1, -4, 5)$. Тогава безкрайната точка на правата g е $U_g(1, -4, 5, 0)$.

Уравнението на правата g може да се зададе и в нехомогенни координати.

Пример. Нека относно хомогенни координати са дадени точките $M_1(1, -2, 3, 4)$ и $M_2(0, 1, -1, 0)$. Точката M_1 е крайна, а точката M_2 е безкрайна, тъй като последната ѝ координата е нула. Следователно двете точки определят крайна права g с уравнение

$$g : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha - \beta \\ t = 4\alpha \end{cases}$$

Безкрайната точка на правата g е точката $M_2(0, 1, -1, 0)$, а направляващият вектор на тази права има координати $(0, 1, -1)$.

Уравнението на правата g може да се зададе и в нехомогенни координати.

Пример. Нека относно хомогенни координати са дадени точките $M_1(1, -2, 3, 0)$ и $M_2(0, 1, -1, 0)$. И двете дадени точки са безкрайни, тъй като последните им координати са равни на нула. Тогава двете точки определят безкрайна права ω с уравнение

$$\omega : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha - \beta \\ t = 0 \end{cases}$$

Всички точки от правата ω са безкрайни (тя не съдържа крайни точки).

Относно хомогенни координати всяка точка от дадена равнина δ е линейна комбинация на три точки от същата равнина, т.е. равнина се задава чрез уравнението

$$\delta : M = \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3,$$

където M_1, M_2, M_3 са три фиксирани точки от равнината и $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, като $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

4. Общи уравнения в хомогенни координати

Относно нехомогенни координати (X, Y) права g в равнина се определя с общото си уравнение

$$g : AX + BY + C = 0. \quad (9)$$

Като използваме, че $X = \frac{x}{t}$, $Y = \frac{y}{t}$ (при $t \neq 0$), от горното уравнение получаваме

$$A\frac{x}{t} + B\frac{y}{t} + C = 0$$

откъдето

$$g : Ax + By + Ct = 0. \quad (10)$$

Уравнението (10) се удовлетворява от всички крайни точки върху g .

Безкрайната точка на g има координати $U_g(a, b, 0)$, където $\vec{v}(a, b)$ е направляващият вектор на g . Тъй като $\vec{v}(a, b) \perp \vec{N}(A, B)$ – нормален вектор на g , то

$$A.a + B.b = A.a + B.b + C.0 = 0.$$

Това означава, че и безкрайната точка на g също удовлетворява уравнението (10), което се нарича **общо уравнение на права в равнина относно хомогенни координати**.

Безкрайните прави съдържат само безкрайни точки ($t = 0$). Уравнение от вида (10) се удовлетворява от наредени тройки $(x, y, 0)$ за произволни реални числа (x, y) , за които $(x, y) \neq (0, 0)$, точно когато $A = B = 0$. Следователно общото уравнение на безкрайната права в разширената равнина Oxy е

$$\omega : t = 0.$$

Аналогично получаваме, че **общото уравнение на равнина α относно хомогенни координати има вида**

$$\alpha : Ax + By + Cz + Dt = 0. \quad (11)$$

Безкрайната равнина се определя от $\Omega : t = 0$.

Относно хомогенни координати права g в разширеното тримерно пространство може да се зададе като пресечница на две равнини по следния начин

$$g : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1t = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2t = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Пример. Намерете общата безкрайна точка на равнините

$$\alpha : x + y - 2z + 4t = 0, \quad \beta : 2x - y + z - t = 0.$$

За намиране на търсената безкрайна точка U , решаваме системата от уравненията на двете равнини и уравнението на безкрайната равнина ($\Omega : t = 0$)

$$U : \begin{cases} x + y - 2z + 4t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ t = 0, \end{cases}$$

еквивалентна на

$$U : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

с решения $y = 5x, z = 3x, t = 0$. Следователно при избор на стойност за x , различна от нула, например $x = 1$ получаваме $U(1, 5, 3, 0)$.

Друг начин е да отчетем, че дадените равнини се пресичат в крайна права и да намерим нейния направляващ вектор и оттам нейната безкрайна точка, която е общата безкрайна точка на двете равнини.

Пример. Намерете общата безкрайна точка на равнините

$$\alpha : 2x - y - z - t = 0, \quad \beta : 4x - 2y - 2z + 3t = 0.$$

За намиране на търсената безкрайна точка U , решаваме системата от уравненията на двете равнини и уравнението на безкрайната равнина ($\Omega : t = 0$)

$$U : \begin{cases} 2x - y - z - t = 0 \\ 4x - 2y - 2z + 3t = 0 \\ t = 0, \end{cases}$$

еквивалентна на

$$U : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 4x - 2y - 2z = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Тъй като всички съответни коефициенти в първите две уравнения са пропорционални, то те са еквивалентни на $2x - y - z = 0$, т.е. на $z = 2x - y$. Двете равнини са успоредни и се пресичат в безкрайната си права (имат обща безкрайна права). Тогава всяка точка от тази права е обща безкрайна точка на двете равнини. Затова намираме две безкрайни точки от тази права, т.е. две решения на горната система $U_1(2, 0, 1, 0)$ при $x = 1, y = 0, t = 0$ и $U_2(0, 1, -1, 0)$ при $x = 0, y = 1, t = 0$ и записваме уравнението на правата през U_1 и U_2 , както следва $\omega : U = \alpha U_1 + \beta U_2$, т.е.

$$\omega : \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha - \beta \\ t = 0. \end{cases}$$

Пример. Намерете безкрайната трансверзала на правите

$$l : \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}, \quad p : \begin{cases} x = 2s \\ y = -1 + 4s \\ z = 1 + s. \end{cases}$$

В тази задача търсим трансверзалата на двете дадени кръстосани прави (проверете, че правите са кръстосани), която минава през съответните им безкрайни точки. Намираме безкрайните точки на двете прави, които са съответно $U_l(1, -1, -2, 0)$ и $U_p(2, 4, 1, 0)$ и построяваме правата през тях

$$\omega : \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = -\alpha + 4\beta \\ z = -2\alpha + \beta \\ t = 0. \end{cases}$$

Пример. Намерете уравнението на правата l , която пресича правите

$$a : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}, \quad b : \begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$$

и минава през безкрайната точка на правата

$$c : \begin{cases} x + 4y + z = 0 \\ 3x + 4y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Търсим правата l , която лежи в една равнина с правата a и в една равнина с правата b и минава през безкрайната точка на c (т.е. е успоредна на c). Можете да проверите, че правите a и b са кръстосани, т.е. се търси тяхната трансверзала, успоредна на правата c .

Да намерим безкрайната точка U_c на правата c . Записваме уравненията ѝ в хомогенни координати

$$c : \begin{cases} x + 4y + z = 0 \\ 3x + 4y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

и търсим пресечната ѝ точка с безкрайната равнина $\Omega : t = 0$. Получаваме $U_c(2, -1, 2, 0)$.

Построяваме снопа равнини с носител правата a и търсената права лежи в равнина от този сноп (уравнение в хомогенни координати):

$$\lambda(x + y - 3t) + \mu(y - z) = 0.$$

От този сноп търсим равнината, която съдържа безкрайната точка на правата c . Така достигахме до

$$\lambda - 3\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3\mu,$$

откъдето търсената равнина, съдържаща правите a и l и безкрайната точка U_c , има уравнението

$$\alpha : 3x + 4y - z - 9t = 0.$$

Аналогично построяваме снопа равнини през правата b

$$\lambda(2x + 4y + z) + \mu(3y + z) = 0$$

и от него търсим равнината β , която съдържа безкрайната точка U_c . Получаваме

$$2\lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = \mu.$$

Така получаваме

$$\beta : 2x + 10y + 3z = 0.$$

Търсената права $l = \alpha \cap \beta$, т.е.

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 4y - z - 9t = 0 \\ 2x + 10y + 3z = 0. \end{array} \right.$$

5. Още за уравнение на права в хомогенни координати

Нека в разширената равнина точките в хомогенни координати разглеждаме като вектор-редове $P = (x, y, t) \neq (0, 0, 0)$, а трите коефициента в общите уравнения на правите $l : Ax + By + Ct = 0$ разглеждаме като вектор-стълбове $l = (A, B, C)$. Тогава общото уравнение на правата l може да се запише с матрично умножение във вида

$$P.l^T = 0 \Leftrightarrow (x \ y \ t) \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0.$$

Познатата операция векторно умножение на наредени тройки може да се приложи върху точки от разширената равнина в хомогенни координати $P_1(x_1, y_1, t_1)$ и $P_2(x_2, y_2, t_2)$, при което получената наредена тройка ще съдържа трите коефициента в общото уравнение на правата l , минаваща през двете различни точки P_1 и P_2 . Това важи както за крайни, така и за безкрайни точки.

Същото уравнение понякога се записва във вида

$$l : \left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{array} \right| = 0$$

за уравнение на права през две различни крайни точки.

Аналогично, може да се въведе операцията векторно произведение на наредени тройки от коефициентите в общите уравнения на две различни прави $l_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $l_2 = (A_2, B_2, C_2)$, при което резултатът ще бъде наредената тройка от хомогенните координати на пресечната точка на двете прави l_1 и l_2 – докажете самостоятелно за две неуспоредни крайни прави и за две успоредни крайни прави. Това важи и за пресечната точка на произволна крайна права и безкрайната права $\omega : t = 0$.

При използване на хомогенни координати (проективни координати) в разширената равнина съществува дуалност между понятията точка и права – във всяко вярно твърдение двете понятия могат да бъдат заменени едно с друго, при което ще се получи ново вярно твърдение. Това е един от основните принципи на проективната геометрия.

Пример. Намерете уравнението на правата l през точките с декартови координати $A(1, 2)$ и $B(4, 3)$.

Записваме двете крайни точки в хомогенни координати, т.е. $A(1, 2, 1)$, $B(4, 3, 1)$. Пресмятаме векторното произведение на наредените тройки от хомогенните координати на двете точки и така получаваме наредената тройка $A \times B = (-1, 3, -5)$. Тези числа са съответно коефициентите (A, B, C) от общото уравнение на правата, минаваща през двете точки $l : Ax + By + Ct = 0$. Следователно $l : x - 3y + 5t = 0$.

Пример. Намерете пресечната точка M на правите $l_1 : x + 2y - 3 = 0$ и $l_2 : 2x + 3y + 6 = 0$.

Записваме наредените тройки от коефициентите в общите уравнения на двете прави $l_1 = (1, 2, -3)$ и $l_2 = (2, 3, 6)$ и пресмятаме тяхното векторно произведение $l_1 \times l_2 = (21, -12, -1)$, което съвпада с хомогенните координати на пресечната точка M на правите, т.е. $M(21, -12, -1)$, а в декартови координати имаме $M(\frac{21}{-1}, \frac{-12}{-1}, 1)$, т.е. $M(-21, 12)$.

6. Двойно отношение на 4 точки върху една права

Нека точките P_1, P_2, P_3 и P_4 лежат върху една права (крайна права) и относно хомогенни координати имаме

$$\begin{aligned} P_3 &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \\ P_4 &= \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Тогава числото

$$\delta(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{\lambda_2 \mu_1}{\lambda_1 \mu_2} \tag{14}$$

се нарича **двойно отношение** на четирите точки P_1, P_2, P_3 и P_4 (взети в този ред), лежащи върху една права.

Нека върху правата, съдържаща четирите точки P_1, P_2, P_3 и P_4 , изберем координатна система с начало точка $O(0)$ и единичен базисен вектор $\vec{e}(1)$. Тогава хомогенните координати на точката O и безкрайната точка U на тази права са съответно: $O(0, 1)$ и $U(1, 0)$. За

точките $P_1(x_1, t_1)$ и $P_2(x_2, t_2)$ имаме съответно

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1.1 + t_1.0 & x_2 &= x_2.1 + t_2.0 \\ t_1 &= x_1.0 + t_1.1 & t_2 &= x_2.0 + t_2.1 \end{aligned} \quad (15)$$

Следователно

$$\left| \begin{array}{l} P_1 = x_1.U + t_1.O \\ P_2 = x_2.U + t_2.O \end{array} \right. \quad (16)$$

По-общо за точката $P_i(x_i, t_i)$ е изпълнено $P_i = x_i.U + t_i.O$.

Тъй като точките P_1 и P_2 са различни, то наредените двойки от хомогенните им координати (x_1, t_1) и (x_2, t_2) не са пропорционални и следователно системата от уравненията (16), разгледана като система линейни уравнения относно U и O , е определена. Основната детерминанта е

$$(12) = \begin{vmatrix} x_1 & t_1 \\ x_2 & t_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогава получаваме

$$U = \frac{t_2 P_1 - t_1 P_2}{x_1 t_2 - x_2 t_1}, \quad O = -\frac{x_2 P_1 - x_1 P_2}{x_1 t_2 - x_2 t_1}. \quad (17)$$

Сега изразяваме останалите две точки P_3 и P_4 чрез U и O по аналогичен начин. Имаме

$$P_3 = x_3.U + t_3.O,$$

откъдето след заместване на (17) намираме

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{x_3 t_2 P_1 - x_3 t_1 P_2}{x_1 t_2 - x_2 t_1} - \frac{t_3 x_2 P_1 - t_3 x_1 P_2}{x_1 t_2 - x_2 t_1} \\ P_3 &= \frac{1}{x_1 t_2 - x_2 t_1} [-(x_2 t_3 - x_3 t_2) P_1 + (x_1 t_3 - x_3 t_1) P_2]. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогично за другата точка имаме

$$P_4 = \frac{1}{x_1 t_2 - x_2 t_1} [-(x_2 t_4 - x_4 t_2) P_1 + (x_1 t_4 - x_4 t_1) P_2]. \quad (19)$$

Тогава, съгласно определението за двойно отношение, имаме

$$\delta(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{(x_1 t_3 - x_3 t_1)(x_2 t_4 - x_4 t_2)}{(x_2 t_3 - x_3 t_2)(x_1 t_4 - x_4 t_1)} = \frac{(13)(24)}{(14)(23)}, \quad (20)$$

където

$$(ij) = \begin{vmatrix} x_i & t_i \\ x_j & t_j \end{vmatrix}.$$

Нека и четирите точки са крайни, то $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 1$. Тогава нека координатите им са $P_i(X_i, 1)$. Имаме

$$\delta(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(X_1 - X_3)(X_2 - X_4)}{(X_2 - X_3)(X_1 - X_4)}. \quad (21)$$

Да си припомним просто отношение на три точки. Ако точките A , B и C лежат върху една права (три различни точки), то числото λ , за което $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BC}$, се нарича просто отношение на точките A , B и C , взети в този ред, и се означава с $\lambda = (ABC)$.

Ако $P_1(X_1)$, $P_2(X_2)$ и $P_3(X_3)$ са три различни точки върху една права, то

$$(P_1P_2P_3) = \frac{X_3 - X_1}{X_3 - X_2} = \frac{X_1 - X_3}{X_2 - X_3}. \quad (22)$$

Аналогично

$$(P_1P_2P_4) = \frac{X_1 - X_4}{X_2 - X_4}. \quad (23)$$

Тогава за четири крайни точки върху една права имаме

$$\delta(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(X_1 - X_3)(X_2 - X_4)}{(X_2 - X_3)(X_1 - X_4)} = \frac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)}. \quad (24)$$

Ако точките $P_i(X_i)$ ($i = 1, 2, 3$) са крайни, а точката $P_4 = U$ е безкрайна (т.е. е безкрайната точка на правата, върху която лежат първите три точки), то в хомогенни координати $P_i(X_i, 1)$ ($i = 1, 2, 3$) и $P_4(X_4, 0)$. Тогава от (20) получаваме

$$\delta(P_1P_2P_3U) = \frac{X_1 - X_3}{X_2 - X_3} = (P_1P_2P_3). \quad (25)$$

Свойства на двойното отношение – доказват непосредствено чрез формулата (20):

- 1) $\delta(P_1P_2P_3P_4) = \delta(P_3P_4P_1P_2)$;
- 2) $\delta(P_1P_2P_4P_3) = \delta(P_2P_1P_3P_4) = \frac{1}{\delta(P_1P_2P_3P_4)}$;
- 3) $\delta(P_4P_2P_3P_1) = \delta(P_1P_3P_2P_4) = 1 - \delta(P_1P_2P_3P_4)$.

Пример. Нека точките A , B , C и D лежат върху една права, като C е средата на AB и D е средата на BC . Намерете $\delta(ABCD)$, $\delta(ACBD)$, $\delta(BDCA)$.

Нека въведем координатна система върху правата като $A(0)$ и $B(1)$. Тогава от C – средата на AB следва $C(\frac{1}{2})$. От D – средата на BC следва, че $D(\frac{3}{4})$. Тогава

$$\delta(ABCD) = \frac{(0 - \frac{1}{2})(1 - \frac{3}{4})}{(0 - \frac{3}{4})(1 - \frac{1}{2})} = \frac{1}{3}.$$

От свойствата на двойното отношение имаме

$$\delta(ACBD) = 1 - \delta(ABCD) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\delta(BDCA) = \delta(CABD) = \frac{1}{\delta(ACBD)} = \frac{3}{2}.$$

Пример. Точките A, B, C, D лежат върху една права и абсцисите им образуват аритметична прогресия. Намерете $\delta(ABCD)$.

Като в горния пример, нека $A(0)$. Тогава $B(d), C(2d), D(3d)$, където $d \neq 0$ е разликата на аритметичната прогресия. Тогава

$$\delta(ABCD) = \frac{(0 - 2d)(d - 3d)}{(d - 2d)(0 - 3d)} = \frac{4}{3}.$$

Пример. Върху една права са дадени точките $A(2), B(7)$ и $C(4)$. Намерете точката D от същата права, такава че $\delta(ABCD) = 5$.

Нека $D(x, t)$, а $A(2, 1), B(7, 1)$ и $C(4, 1)$. Тогава

$$\delta(ABCD) = \frac{(2 - 4)(7t - x)}{(7 - 4)(2t - x)} = -\frac{2(x - 7t)}{3(x - 2t)} = 5 \Leftrightarrow \frac{x - 7t}{x - 2t} = -\frac{15}{2},$$

откъдето $17x = 44t$. Тъй като $(x, t) \neq (0, 0)$, то точката D е крайна и можем да изберем $t = 1$. Следователно $x = \frac{44}{17}$. В хомогенни координати $D(44, 17)$.

7. Хармонични групи

Точките P_1, P_2, P_3, P_4 , лежащи върху една права, образуват **хармонична група**, ако $\delta(P_1P_2P_3P_4) = -1$.

Тъй като

$$\delta(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)},$$

то това означава, че $(P_1P_2P_3) = -(P_1P_2P_4)$, т.е точките P_3 и P_4 делят отсечката P_1P_2 в едно и също отношение, но едната точка я дели вътрешно, а другата – външно.

Точката C е средата на отсечката AB , точно когато $\delta(ABCU) = -1$ (където U е безкрайната точка на правата AB).

8. Транслация в хомогенни координати

Ротацията на ортонормирана координатна система около нейния център, зададена в декартови координати, е линейно преобразуване. Транслацията в декартови координати обаче не е линейно преобразуване, тъй като се определя от

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b, \end{cases}$$

където $\vec{v}(a, b)$ е векторът на транслация (отместването). Ако обаче разгледаме транслация на крайни точки ($t = 1$) относно хомогенни координати, тогава горните равенства могат да се представят с матрично произведение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + a \\ y' + b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Барицентрични координати в равнината

Един частен случай на хомогенни координати в равнината са барицентричните координати (въведени от Аугуст Мьобиус, 1827 г.).

Нека A, B, C са върхове на триъгълник. Тогава за всяка точка D от равнината на $\triangle ABC$ съществуват числа (x, y, z) , такива че

$$\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \quad (D = xA + yB + zC), \quad x + y + z = 1. \quad (26)$$

Разглеждаме координати (x, y, z) , зададени с горното равенство и определени с точност до ненулев множител, т.е. (x, y, z) и $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ при $\lambda \neq 0$ да определят една и съща точка. Такива координати се наричат барицентрични координати в равнината. Често се разглеждат (записват) като отношение $(x : y : z)$.

Имаме

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}. \quad (27)$$

Тъй като $\overrightarrow{AD}$ лежи в равнината на $\triangle ABC$ и $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ е една база на тази равнина, то съществуват еднозначно определени числа (λ, μ) такива, че

$$\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}. \quad (28)$$

Следователно

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \mu(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &= (1 - \lambda - \mu)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC}, \end{aligned} \quad (29)$$

откъдето след полагане на $x = 1 - \lambda - \mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$ се вижда, че за всяка точка D от равнината на $\triangle ABC$ могат да бъдат намерени (x, y, z) , такива че $x + y + z = 1$.

Изпълнено е

$$x = \frac{S_{DBC}}{S_{ABC}}, \quad y = \frac{S_{DCA}}{S_{ABC}}, \quad z = \frac{S_{DAB}}{S_{ABC}}, \quad (30)$$

където S са ориентираните лица на съответните триъгълници.